

PROBLEMAS DIDACTICOS QUE IMPLICAN LA GRAVEDAD

P. Kittl ⁽¹⁾ y G. Diaz ⁽²⁾

⁽¹⁾ Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 2777, Santiago, Chile

⁽²⁾ Departamento de Ciencia de los Materiales, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 2777, Santiago, Chile, e-mail: gediaz@cec.uchile.cl

RESUMEN

Se trata por métodos geométricos la estructura del campo gravitatorio sobre la Tierra. Luego el caso de una bola que rueda sin resbalar por un plano inclinado, con una ranura, en un medio muy enrarecido. El caso anterior permite discutir las leyes de la caída como hizo Galileo. Luego se discute el mismo caso en medios resistentes, donde el roce depende de una potencia de la velocidad. La misma discusión se extiende al caso del péndulo. Especial atención a la pérdida de energía por rebote en los dos casos.

PRIMERA PARTE

1.- Estructura del campo gravitatorio sobre la Tierra

El campo gravitatorio puede caracterizarse, en dirección, por el de una plomada tomando en cuenta el hilo de suspensión. Veamos cómo varía la dirección (Fig. 1), sean A y B la situación de dos plomadas separadas por la distancia s medida sobre la Tierra. La forma de la Tierra es, con mucha aproximación, la de una esfera con radio de $6.37 \times 10^6 \text{ m}$ y una masa de $5.96 \times 10^{24} \text{ kg}$. Luego, el ángulo que forman las dos plomadas, medido en radianes es, si suponemos $s = 10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$

$$\varphi_r = \frac{s}{R} = \frac{10^3 \text{ m}}{6,37 \times 10^6 \text{ m}} = 1,57 \times 10^{-4} \quad (1.1)$$

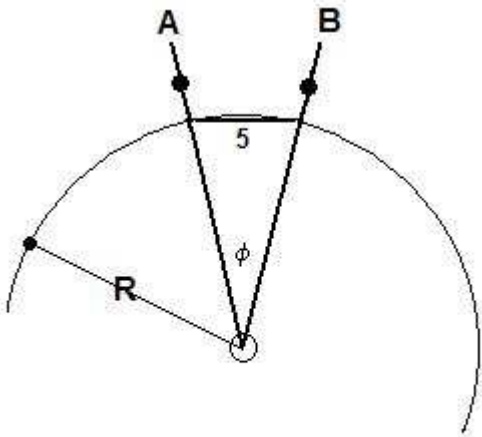


Figura 1

El ángulo φ_r está medido en radianes. Para reducirlo a segundos establecemos la proporción

$$\frac{360^\circ \times 60' \times 60''}{\varphi''} = \frac{2\pi}{\varphi_r} = \frac{2\pi}{1,57 \times 10^{-4}} \quad (1.2)$$

donde φ'' es el ángulo medido en segundos, $360 \times 60 \times 60$ es el número de segundos en el círculo que equivalen a 2π radianes, por lo tanto, de la ecuación (1.2) obtenemos

$$\varphi'' = \frac{1,57 \times 10^{-4} \times 360^\circ \times 60' \times 60''}{2\pi} = \frac{1,57 \times 10^{-4} \times 1.296.000}{2 \times 3,1416} \cong 32'' \quad (1.3)$$

Se requieren entonces observaciones astronómicas de precisión para poner de manifiesto este ángulo. Aquí vimos cómo varía la dirección cuando nos ubicamos sobre la superficie de la Tierra sin variar la altura, es decir, suponiendo el origen de la altura como una superficie quieta de agua. Esta hipótesis aproxima la esfera de radio constante con mucha aproximación. Variemos ahora la altura, teniendo en cuenta la ley de Newton, podemos establecer la relación entre la masa de la Tierra y la gravedad

$$f \frac{Mm}{R^2} = gm \quad (1.4)$$

f es la constante universal de la gravitación $f = 6.67 \times 10^{-8} \text{cm}^2/\text{gs}^2$, M es la masa de la Tierra $M = 5.96 \times 10^{26} \text{g}$, $R \approx 6.37 \times 10^8 \text{cm}$ el radio de la Tierra. Eliminando, m , la masa de un cuerpo muy pequeño respecto de M , $m \ll M$, se tiene

$$g = f \frac{M}{R^2} = \frac{6,67 \times 5,96}{(6,37)^2} \times \frac{10^{-8} \times 10^{26}}{10^{16}} \text{g} \frac{\text{cm}^3}{\text{gs}^2} \frac{1}{\text{cm}^2} \approx 9,80 \times 10^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \quad (1.5)$$

Como se comprueba con la experiencia. Si se realiza la medición a una distancia h de la superficie de la Tierra, donde se midió g se tiene

$$g + \Delta g = f \frac{M}{(R+h)^2} = f \frac{M}{R^2} \frac{1}{1 + \frac{2h}{R} + \frac{h^2}{R^2}} \quad (1.6)$$

$$g + \Delta g \cong g \frac{1}{1 + \frac{2h}{R}}, \quad \left(\frac{h}{R} \right)^2 \ll \frac{h}{R}$$

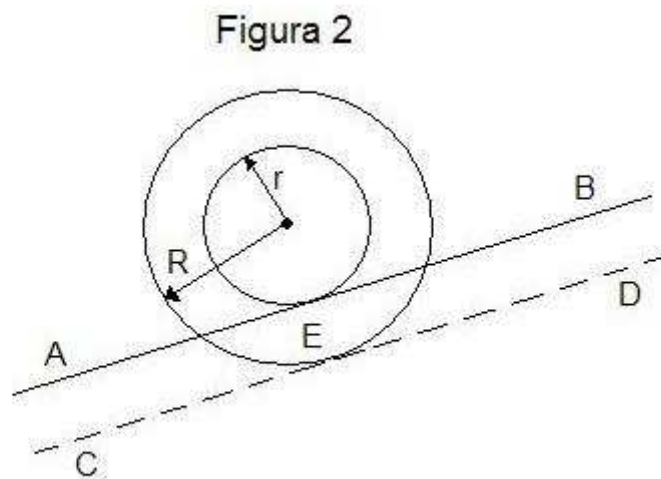
En la ecuación (1.6) consideramos $h/R \approx 0$ muy pequeño. Finalmente

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{1}{1 + \frac{2h}{R}} - 1 \cong 1 - \frac{2h}{R} - 1 \cong -\frac{2h}{R} \cong -9,42 \times 10^{-5} \quad (1.7)$$

Tomando $h \approx 300\text{m}$, altura de la torre Eiffel, el experimento fue realizado por von Jolly, aproximadamente en 1905. Si se transporta una masa de 1kg desde la base de la torre a su cúspide el peso disminuye en $9,42 \times 10^{-2}\text{g}$. Si la diferencia de altura es de 3m la diferencia de peso es de $9,42 \times 10^{-4}\text{g} \sim 1\text{mg}$. Esa experiencia es fácilmente realizable {1}, si se tiene una balanza sensible al 10^{-2}mg se le cuelga 1kg a 3m equilibrando inclusive el hilo del cual cuelga, al pesarlo en la balanza su peso disminuye en 1mg . Se comprueba entonces cómo varía el campo gravitatorio horizontalmente y verticalmente.

2.- Caída de una bola que rueda sin resbalar, por una ranura, en un plano inclinado

Sea (Fig. 2) AB la traza con el plano del dibujo del plano inclinado, CD la traza de la ranura donde la esfera de radio R rueda en una ranura que alcanza hasta el radio r de giro donde apoya la esfera.



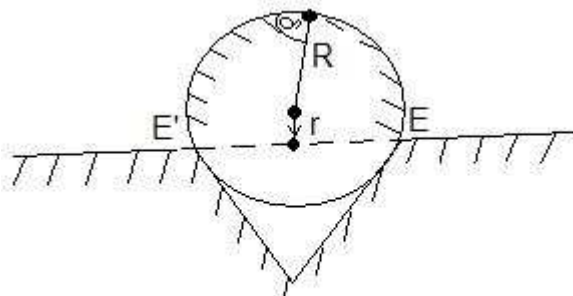


Figura 3

Proyectando en un plano perpendicular al del dibujo en la Fig. 2 se tiene (Fig. 3) la forma en que la esfera circula por la ranura. El punto de contacto E, que puede corresponder a un plano tangente a la esfera, es el lugar donde podría haber roce o adherencia. Esta adherencia puede materializarse por una fuerza aplicada a una distancia muy pequeña de E, hacia debajo de la figura y normal al plano inclinado. Estas fuerzas deben ser iguales y por lo tanto no influyen (Fig. 4).

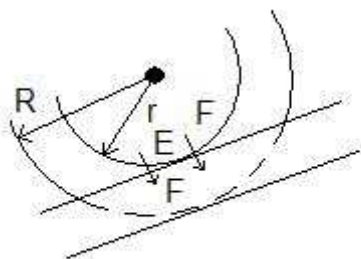


Figura 4

Obviamente que si la adherencia fuera una soldadura se trataría de otro problema. Veamos qué puede ocurrir con las fuerzas de roce estático que se ponen de manifiesto en que la esfera se mueve a partir de cierto ángulo ϑ , que es muy pequeño. Estas fuerzas tendrían que estar aplicadas en la esfera un poco arriba de E, a una distancia muy pequeña en dirección paralela al plano inclinado (Fig. 5).

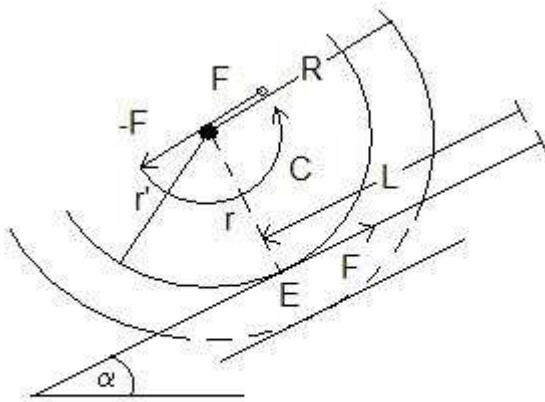


Figura 5

La fuerza F de la figura 5 impide la rodadura, pero cuando ella ya empieza, para ver cómo afecta al movimiento la trasladamos al centro de gravedad O como dos fuerzas F iguales y opuestas, paralelas a la fuerza F original. Se convierte en una cupla C y fuerza F que actúa en sentido contrario al de la gravedad. Si el centro de gravedad O se desplaza una longitud l la fuerza F realiza un trabajo $F l$. La cupla C realiza el trabajo $C \phi$ donde ϕ es el ángulo que gira, es decir $C \phi = - r F (l/r) = - l F$. Por lo tanto ambos trabajos se anulan mutuamente. La ecuación de la energía da

$$\frac{1}{2} M \dot{l}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = M g l \operatorname{sen} \alpha \quad (2.1)$$

donde M es la masa de la esfera, \dot{l} la velocidad sobre el plano inclinado, I el momento de inercia de una esfera $I = (2/5) M R^2$, ω la velocidad angular de la esfera alrededor de O , $\dot{l} = \omega r$, g la aceleración de la gravedad, α el ángulo que con la horizontal tiene el plano inclinado y l la distancia que recorrió el centro de gravedad O . La ecuación (2.1) se transforma en

$$\frac{1}{2} \dot{l}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} R^2 \frac{\dot{l}^2}{r^2} = g l \operatorname{sen} \alpha \quad (2.2)$$

O lo que es lo mismo

$$\dot{l}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \frac{R^2}{r^2} \right) = g l \operatorname{sen} \alpha \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) se transforma en

$$\begin{aligned}
 \dot{l}^2 &= kl \\
 k &= \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \frac{R^2}{r^2}}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Como se ve, la esfera cae más lentamente que una caída libre, no sólo porque g está afectado por $\operatorname{sen} \alpha$ sino que además dividido por un número superior a $1/2$. Este valor se obtiene cuando se trata de un punto material $R = 0$. La ecuación (2.4) da

$$\begin{aligned}
 \dot{l} &= \frac{dl}{dt} = \sqrt{kl} \\
 t &= \int_0^l dt = \int_0^l \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{dl}{\sqrt{l}} = 2\sqrt{\frac{l}{k}}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

De la ecuación (2.5) se obtiene

$$l = \frac{k}{4} t^2 \tag{2.6}$$

Cuando $\alpha = \pi/2$, $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ y la ecuación (2.6) se transforma a $l = gt^2/2$, porque debe tomarse $R = 0$, y que la esfera no rueda más. Por lo tanto, se transforma en una caída libre. Como para ángulos pequeños de α se tiene $k \ll g$, con una simple cámara que tome 50 cuadros por segundo se pueden comprobar las leyes de la caída y el carácter vectorial del campo gravitatorio dado α . En el caso de una esfera de hierro con $R = 1\text{cm}$, $r = 0.8\text{cm}$, $M = 33\text{g}$, $\alpha = 10^\circ$, se obtiene, con una densidad del hierro de 7.9g/cm^3 , tomando $l = 30\text{cm}$

$$k = 209,4 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \quad ; \quad t = \sqrt{\frac{4l}{k}} = 0,757\text{s} \tag{2.7}$$

Lo que daría casi 38 imágenes del movimiento, que es perfectamente observable. La gravedad simulada k disminuye, con el método del plano inclinado, 4.5 veces respecto de g . Este método fue ideado por Galileo para establecer las leyes de la caída.

3.- Choque de la esfera contra un plano

La esfera choca contra la pared CA perpendicular al plano AB. Punteado se ve la penetración de la esfera en la ranura y punteado el círculo por donde rueda la esfera en la ranura. La esfera llega con una velocidad \sqrt{kL} , donde L es la longitud desde donde rueda la esfera (Fig.6).

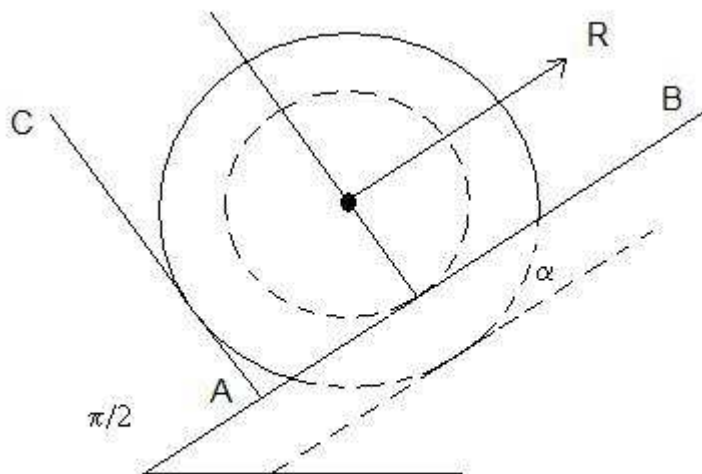


Figura 6

Con un choque perfectamente elástico la velocidad se invierte $v_0 = \sqrt{kL}$ cuando $t = 0$, el nuevo sistema de coordenadas tiene sentido contrario al anterior. Sin embargo, como la esfera viene rodando con una velocidad angular ω , un choque perfectamente elástico sería que a partir de $t = 0$, ω se invirtiera. En ambos casos eso no puede ser cierto, tiene que haber pérdida de energía porque la pared perpendicular puede quedar con alguna deformación plástica o generar calor por roce, lo que absorbe energía. Luego, cuando $t = 0$, instante del rebote, la energía E_0 de la esfera sería

$$E_0 = \lambda \frac{1}{2} M j_0^2 + \mu \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{\lambda}{2} M j_0^2 + \mu \frac{1}{2} \frac{2}{5} j_0^2 \frac{R^2}{r^2} M \quad (3.1)$$

Finalmente

$$E_0 = \frac{M j_0^2}{2} \left(\lambda + \frac{2}{5} \mu \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (3.2)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \mu \leq 1$$

El coeficiente λ puede variar entre 0, lo que significa un choque totalmente plástico y 1, totalmente elástico. En cuanto a μ puede variar entre -1 , lo que significa un choque totalmente plástico en la rotación; la superficie donde choca la esfera absorbe la energía de rotación o por deformación plástica o por frotación generando calor; hasta $\mu = 1$, lo que significa que la rotación es devuelta elásticamente. En el caso estudiado, si el choque frontal fuera elástico $\lambda = 1$, y el rotacional plástico $\mu = -1$, la variación de E_0 sería

$$\frac{\lambda}{\frac{2}{5} \mu \frac{R^2}{r^2}} = \frac{1}{-\frac{2}{5} \frac{1}{(0,8)^2}} = -1,6 \quad (3.3)$$

De la ecuación (3.2) se deduce que un estudio cuantitativo que sea un caso real y permita determinar λ y μ tiene que realizarse tanto determinando l_0 como ω_0 . Al ascender la energía de la esfera es

$$\frac{M\dot{l}_0^2}{2} \left(\lambda + \frac{2}{5} \mu \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{M\dot{l}^2}{2} \left(1 + \frac{2}{5} \mu \frac{R^2}{r^2} \right) = Mg l \text{sen} \alpha \quad (3.4)$$

Determinando cuando $\dot{l} = 0$ se tiene

$$\frac{\dot{l}_0^2}{2} \left(\lambda + \frac{2}{5} \mu \frac{R^2}{r^2} \right) = g l_m \text{sen} \alpha \quad (3.5)$$

l_m es la longitud donde $\dot{l} = 0$. Bastaría entonces determinar la velocidad de llegada de la esfera l_{L0} y la de partida l_0 para obtener λ en un choque vertical

$$\lambda = \frac{\dot{l}_{L0}}{\dot{l}_0} \quad (3.6)$$

La ecuación (3.5) permite obtener μ , conociendo l_f y l_0 , este valor de μ se puede cotejar con el obtenido por la medición de la variación de ω . En nuestro caso, como la esfera rueda sin resbalar tomaremos $\lambda = \mu = 1$.

La ecuación (3.4) se transforma fácilmente en

$$\begin{aligned} \dot{l}^2 &= \frac{k}{k'} \dot{l}_0^2 - k l \\ k &= \frac{g \text{sen} \alpha}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \frac{R^2}{r^2}} \quad ; \quad k' = \frac{g \text{sen} \alpha}{\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{5} \frac{R^2}{r^2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

De la ecuación (3.7) se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{l} = \dot{l}_0 \sqrt{\frac{k}{k'}} \sqrt{1 - k' \frac{l}{\dot{l}_0^2}} \quad (3.8)$$

La longitud máxima de ascensión del rebote es $l_m = \dot{l}_0^2/k$, como se deduce de la ecuación (3.7) con un cambio de variable se obtiene

$$\begin{aligned} x &= l \frac{k'}{\dot{l}_0^2} = \frac{l}{l_m} \\ t &= \frac{l_m}{\dot{l}_0} \sqrt{\frac{k'}{k}} \int_0^{l/l_m} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2 \frac{l_m}{\dot{l}_0} \sqrt{\frac{k'}{k}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{l}{l_m}} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

El tiempo T de ascensión se determina cuando $l = l_m$, con lo cual $T = 2l_m / \dot{l}_0$.

4.- Mediciones

Suponiendo que se conoce $l = l(t)$ con la ecuación (2.6) que corresponde a la caída de la esfera se tiene

$$\ln l = 2 \ln t + \ln k - \ln 4 \quad (4.1)$$

De la ecuación (4.1) se puede obtener con mínimos cuadrados k y por lo tanto g , pero lo que es muy importante el valor l y ω en el momento del choque, ω puede medirse directamente o calcularse por la fórmula $\dot{l} = \omega r$.

La ecuación (3.7) da la siguiente ecuación del movimiento

$$\dot{l}^2 = k(l_m - l) \quad (4.2)$$

Con la ecuación (4.1) se puede obtener k y la velocidad inicial l_0 y ω_0 del rebote y por lo tanto, todos los parámetros del choque.

A partir de la ecuación (3.8) se obtiene

$$\frac{l}{l_m} = 1 - \left(1 - \frac{\dot{l}_0}{2l_m} t\right)^2 \quad ; \quad \dot{l} = \dot{l}_0 \left(1 - \frac{\dot{l}_0}{2l_m} t\right) \quad (4.3)$$

Se debe recordar que l_0 es la velocidad con la cual choca la esfera, $l_0 = \sqrt{(kl)} \{2,5\}$. De la ecuación (4.2) se obtiene

$$\dot{l} = -\frac{kt}{2} + \dot{l}_0 \quad ; \quad l = -\frac{kt^2}{4} + \dot{l}_0 t \quad (4.4)$$

Las ecuaciones (4.3) se transforman, teniendo en cuenta que $T = 2l_m / \dot{l}_0$, en

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \frac{2l_m}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \\ \frac{l}{l_m} &= 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

5.- Influencia del roce con el medio ambiente

En todo lo anterior no hemos tomado en cuenta el roce con el medio ambiente. Para introducirlo tomemos en cuenta la ecuación del movimiento, derivando la ecuación (2.4) se tiene la ecuación newtoniana

$$2\dot{l} \ddot{l} = k\dot{l}$$

$$\ddot{l} = \frac{k}{2}$$
(5.1)

La aceleración de la masa unitaria es la constante $k/2$ o $k^2/2$ en el caso de la caída o el rebote. El roce puede depender de la velocidad en la forma

$$\ddot{l} = \frac{d\dot{l}}{dt} = \frac{k}{2} + \varphi(\dot{l})$$
(5.2)

La ecuación (5.2) se resuelve fácilmente

$$\frac{d\dot{l}}{\frac{k}{2} + \varphi(\dot{l})} = dt$$
(5.3)

La velocidad en función del tiempo se obtiene integrando la ecuación (5.3)

$$t = \int_0^{\dot{l}} \frac{d\dot{l}}{\frac{k}{2} + \varphi(\dot{l})}$$
(5.4)

Resolviendo la ecuación (5.4) se obtiene una función implícita de l que se puede explicitar algunas veces. Recordando que $dt = \dot{l}/dl$ y reemplazando en la ecuación (5.3) se obtiene

$$\frac{\dot{l}d\dot{l}}{\frac{k}{2} + \varphi(\dot{l})} = dl$$
(5.5)

O lo que es lo mismo

$$l = \int_0^{\dot{l}} \frac{\dot{l}d\dot{l}}{\frac{k}{2} + \varphi(\dot{l})}$$
(5.6)

En un medio resistente hay una velocidad límite, hay que recordar que la acción del roce es de signo contrario a la fuerza activa, en el caso de caída, en este caso k , luego $k/2 + \varphi(\dot{l}) = 0$ nos da la velocidad límite. Siempre el movimiento, en estos casos tipo proyectil balístico (donde la fuerza activa es la gravedad supuesta constante), la velocidad es siempre inferior a la límite. Si $\varphi(\dot{l})$ es un polinomio $\varphi(\dot{l}) = \sum a_n \dot{l}^n$ la ecuación (5.4) se puede desarrollar en serie convergente lo mismo que la ecuación (5.6). En el caso de $\varphi(\dot{l}) = -\rho \dot{l}^n$ la velocidad límite es

$$\dot{l}_l = \sqrt[n]{\frac{k}{2\rho}}$$
(5.7)

Tomando como variable l/l_l las ecuaciones (5.4) y (5.6) se transforman en

$$t = \frac{2\dot{l}_l}{k} \int_0^{\dot{l}_l} \frac{dx}{1-x^n} \quad ; \quad l = \frac{2\dot{l}_l^2}{k} \int_0^{\dot{l}_l} \frac{x dx}{1-x^n} \quad (5.8)$$

En el caso del rebote tanto la gravedad como la resistencia operan en el mismo sentido, frenan el movimiento y la ecuación se obtiene derivando la ecuación (3.4)

$$\ddot{l} = -\frac{k}{2} \quad (5.9)$$

Introduciendo el roce en la ecuación (5.9) se tiene

$$\ddot{l} = -\frac{k}{2} - \rho \dot{l}^n \quad (5.10)$$

Luego se obtiene de las ecuaciones (5.4) y (5.6)

$$t = \frac{2\dot{l}_l}{k} \int \frac{dx}{1+x^n} \quad ; \quad l = \frac{2\dot{l}_l^2}{k} \int \frac{x dx}{1+x^n} \quad (5.11)$$

Cuando se parte de una velocidad l_0 y se quiere llegar al punto máximo el límite inferior de las integrales de la ecuación (5.11) es cero.

Es paradójico, pero cierto, que alcanzando una velocidad infinita se obtiene, en un tiempo finito, T , una longitud finita l_m

$$T = \frac{2\dot{l}_l}{k} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{2\dot{l}_l}{k} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{1+x} dx = \frac{2\dot{l}_l}{k} \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$$

$$p = \frac{1}{n} \quad , \quad n > 1 \quad (5.12)$$

$$l_m = \frac{2\dot{l}_l^2}{k} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^n} = \frac{2\dot{l}_l^2}{k} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{2}{n}-1}}{1+x} dx = \frac{2\dot{l}_l^2}{k} \frac{\pi}{\frac{2}{n} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}$$

$$p = \frac{2}{n} \quad , \quad n > 2$$

En las ecuaciones (5.12) se usa la integral siguiente

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} \quad (5.13)$$

$$0 < p < 1$$

6.- Influencia del roce cuando $\varphi(l) = \pm \rho v$

En el caso de la caída las ecuaciones (5.8) se transforman en

$$t = \frac{2\dot{l}_l}{k} \int_0^{i/i_l} \frac{dx}{1-x}, \quad l = \frac{2\dot{l}_0^2}{k} \int_0^{i/i_l} \frac{x dx}{1-x} \quad (6.1)$$

La integral de la primera de las ecuaciones (6.1) es

$$t = \frac{2\dot{l}_l}{k} \left[\ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \right]_0^{i/i_l} = \frac{2\dot{l}_l}{k} \ln \left(\frac{1}{1-i/i_l} \right) \quad (6.2)$$

De la ecuación (6.2) se puede obtener

$$i = \dot{l}_l \left(1 - e^{-\frac{kt}{2\dot{l}_l}} \right) \quad (6.3)$$

Recordando que $\dot{l}_l = k/2\rho$, ecuación (5.7), se tiene

$$i = \dot{l}_l (1 - e^{-\rho t}) = \frac{k}{2\rho} - \frac{k}{2\rho} \left(1 - \rho t + \frac{\rho^2 t^2}{2!} - \dots \right) \quad (6.4)$$

$$i = \frac{k}{2} t - \frac{k\rho}{4} t^2 + \dots$$

Cuando $\rho \rightarrow 0$ se tiene

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} i = \frac{k}{2} t \quad (6.5)$$

La ecuación (6.5) coincide con la derivada de la ecuación (2.6) donde $\rho = 0$. Integrando la ecuación (6.3) se tiene

$$l = \frac{k}{2\rho} \left(t + \frac{1}{\rho} e^{-\rho t} \right) - \frac{k}{2\rho^2} \quad (6.6)$$

puesto que cuando $t = 0, l = 0$.

Veamos dónde tiende l cuando $\rho \rightarrow 0$, desarrollando en serie

$$l = \frac{k}{2\rho} t - \frac{k}{2\rho^2} \left(1 - \rho t + \frac{\rho^2 t^2}{2!} - \dots \right) - \frac{k}{2\rho^2} \quad (6.7)$$

$$= \frac{k}{4} t^2 - \frac{k\rho}{12} t^3 + \dots$$

Luego

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \dot{l} = \frac{k}{4} t^2 \quad (6.8)$$

Que coincide con la ecuación (2.6) deducida con $\rho = 0$. Para ρ pequeños se puede adoptar los dos primeros términos de la ecuación (6.7) y con los valores experimentales obtener ρ , puesto que k de la ecuación (2.4) se puede calcular.

En el caso del rebote, de acuerdo a la ecuación (5.11) se tiene

$$t = \frac{2\dot{l}_l}{k'} \int_{i_{0r}/\dot{l}_l}^{i/\dot{l}_l} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{1+i/\dot{l}_l}{1+i_{0r}/\dot{l}_l} \right) \quad (6.9)$$

De la ecuación (6.9) se obtiene

$$i = \dot{l}_l \left[\left(1 + \frac{i_{0r}}{\dot{l}_l} \right) e^{-\rho t} - 1 \right], \quad \dot{l}_l = \frac{k}{2\rho} \quad (6.10)$$

Eliminando las potencias superiores a ρ , como ρ^2 etc., se obtiene

$$\dot{l} = i_{0r} - \frac{kt}{2} + \rho \frac{kt^2}{4} - i_{0r}\rho t \quad (6.11)$$

en el límite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \dot{l} = i_{0r} - \frac{kt}{2} \quad (6.12)$$

De la ecuación (6.10) se obtiene

$$\begin{aligned} l &= \int_0^l dl = \dot{l}_l \int_0^t \left[\left(1 + \frac{i_{0r}}{\dot{l}_l} \right) e^{-\rho t} - 1 \right] dt = -\frac{\dot{l}_l}{\rho} \left[\left(1 + \frac{i_{0r}}{\dot{l}_l} \right) e^{-\rho t} \right]_0^t - \dot{l}_l t \\ l &= \frac{\dot{l}_l}{\rho} \left(1 + \frac{i_{0r}}{\dot{l}_l} \right) (1 - e^{-\rho t}) - \dot{l}_l t \end{aligned} \quad (6.13)$$

Desarrollando en serie la ecuación (6.13) y eliminando las potencias superiores a ρ el valor de l es

$$l = i_{0r} t - \frac{kt^2}{4} + \rho \left(\frac{kt^3}{12} - i_{0r} \frac{t^2}{2} \right) \quad (6.14)$$

que en el límite cuando $\rho \rightarrow 0$ es la ecuación (4.4).

Se puede obtener el tiempo T que tarda en llegar a la altura máxima en el rebote cuando $\dot{i} = 0$, o sea

$$\dot{i} = 0 = \frac{k}{2\rho} \left[\left(1 + \frac{\dot{i}_{0r}}{k} 2\rho \right) e^{-\rho T} - 1 \right] \quad (6.15)$$

Por lo tanto

$$e^{-\rho T} = \frac{1}{1 + \frac{2\rho}{k} \dot{i}_{0r}} \quad (6.16)$$

y finalmente

$$T = \frac{1}{\rho} \ln \left(1 + \frac{2\rho}{k} \dot{i}_{0r} \right) \quad (6.17)$$

Usando el desarrollo en serie siguiente

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (6.18)$$

$x^2 < 1$

Por lo tanto se obtiene

$$T = \frac{2}{k} \dot{i}_{0r} - \frac{4\rho}{k^2} \dot{i}_{0r}^2 + \frac{8\rho^2}{k^3} \dot{i}_{0r}^3 - \dots \rightarrow \frac{2}{k} \dot{i}_{0r} \quad (6.19)$$

$\rho \rightarrow 0$

El valor de l_m ahora se calcula reemplazando en la ecuación (6.13) el valor de T.

SEGUNDA PARTE

7.- Sobre el péndulo

Parece que el primero que se ocupó del péndulo fue Galileo(1), quien estableció experimentalmente el isocronismo de las oscilaciones. Es decir, que si la amplitud se mantiene pequeña, las oscilaciones tienen la misma duración aunque la amplitud disminuya. También estableció (2) que si un cuerpo cae desde una altura 2l y por l trazamos

una circunferencia (Fig. 7), el tiempo que tarda un móvil que recorre un plano inclinado desde donde corta a la circunferencia B, hasta el pié de la perpendicular A al plano horizontal distante l del centro del círculo es el mismo.

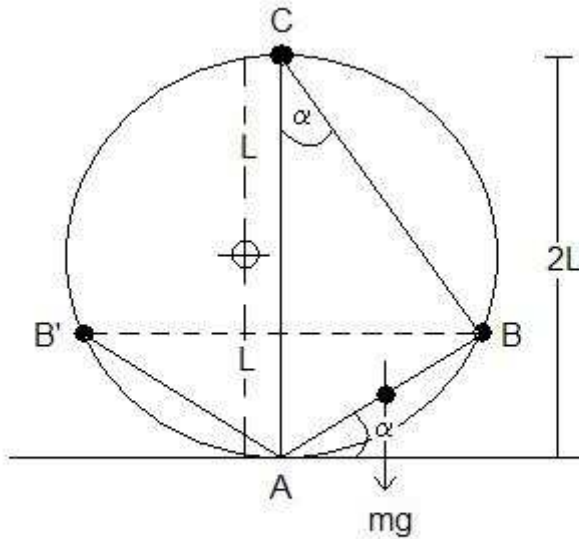


Figura 7

Con este teorema pudo, según Mach (3) establecer la duración de una oscilación. Efectivamente, el tiempo que tarda un punto material para caer desde C hasta A es

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7.1)$$

Sobre el plano inclinado BA el peso mg según la dirección AB es $mg \operatorname{sen} \alpha$ y el tiempo que tarda en recorrer el segmento $AB = 2l \operatorname{sen} \alpha$ es

$$t = \sqrt{\frac{2l \operatorname{sen} \alpha}{g \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2}}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7.2)$$

Luego, el tiempo para elevarse desde A a B' es el mismo y multiplicado por dos

$$t = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7.3)$$

Suponiendo $\alpha \rightarrow 0$ la ecuación (7.3) es aproximadamente lo que se conoce actualmente

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7.4)$$

El libro de Mach, muy famoso y que produjo una impresión tan duradera en Einstein que le dió su nombre a un principio de la relatividad general, tiene una discusión completa de las ideas y contribuciones de Galileo y Newton, entre otros, a la mecánica. Es conveniente la lectura del libro de Mach porque tanto Galileo como Newton (4) no escribían fórmulas como se hace actualmente sino que usaban un lenguaje geométrico, con lo cual su lectura es actualmente muy difícil. La ecuación (7.4), pudo ser escrita por Huyghens (5), que tampoco usaba la escritura literal. Esta debió ser escrita por primera vez por Juan Bernoulli (6) o Euler (7). La solución exacta para amplitudes no pequeñas se encuentra en Legendre (8) y directamente en Poisson (9) donde después se encuentra el estudio del movimiento pendular en un medio resistente con el cuadrado de la velocidad, pero para amplitudes muy pequeñas. El estudio completo, para amplitudes pequeñas en medios resistentes está en Routh (10). La ecuación completa en medios resistentes no ha sido tomada en cuenta actualmente, el tratado de Korn y Korn (11) no se ocupa del caso con roce y amplitud finita. Esto es una consecuencia de que en el pasado se investigó la figura de la Tierra con el péndulo (12), existe un extenso tratado histórico sobre el péndulo de C. Wolf (13) y actualmente, debido a los métodos modernos estos estudios han perdido totalmente importancia. En este estudio usamos el péndulo como método simple y práctico para determinar la energía absorbida en el choque por un material que no sea totalmente elástico. Complementando lo que se ha hecho antes con el plano inclinado.

8.- Ecuación diferencial y solución general para coeficientes de roce pequeños ($\rightarrow 0$)

Establecer y discutir el caso del péndulo simple sin roce, lo hacen sistemáticamente todos los tratados de Mecánica Racional como Marcolongo (14) o Appel (15). Es fácil ver que la ecuación del movimiento es

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\text{sen}\varphi - \rho_1 l m \dot{\varphi} + \rho_2 ml^2 \dot{\varphi}^2 \quad (8.1)$$

En la Figura 7, $l\ddot{\varphi}$ es la aceleración tangencial que genéricamente tiende a aumentar φ , $-mg\text{sen}\varphi$ es la componente tangencial de la gravedad actuando sobre la partícula m , $-\rho_1 ml \dot{\varphi}$ es una fuerza de roce proporcional a la velocidad $l\dot{\varphi}$, $\rho_2 ml^2 \dot{\varphi}^2$ es una fuerza de roce proporcional al cuadrado de la velocidad, m es la masa de la partícula vinculada a O por un hilo inextensible de longitud l y de masa muy pequeña respecto de la masa de la partícula.

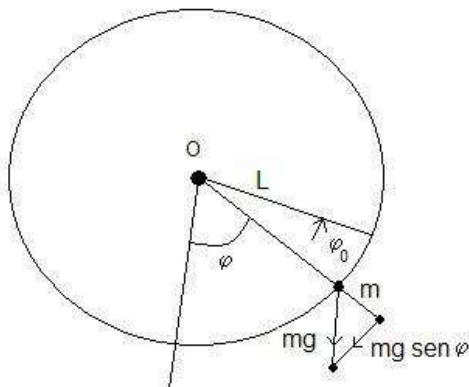


Figura 8

A su vez, las dimensiones de la partícula son muy pequeñas respecto de la longitud del hilo. Como $\dot{\varphi}$ tiende genéricamente a aumentar φ debemos tomar la fuerza $\rho_1 l \dot{\varphi}$ con signo negativo. Los coeficientes ρ_1 y ρ_2 son los de roce por unidad de masa. El término $\rho_2 m l^2 \dot{\varphi}^2$ es el roce proporcional al cuadrado de la velocidad, con signo positivo porque tiende a aumentar el ángulo φ , pero cuando $\varphi < 0$ debe tomarse con signo negativo. Luego, la ecuación (8.1) es la ecuación de Newton: fuerza igual a masa por aceleración.

Las dimensiones de cada término son

$$[ml\ddot{\varphi}] = \frac{ML}{T^2} \quad ; \quad [mg] = \frac{ML}{T^2} \quad ; \quad [\rho_1 ml\dot{\varphi}] = \frac{ML}{T^2} \quad ; \quad [\rho_2 ml^2\dot{\varphi}^2] = \frac{ML}{T^2} \quad (8.2)$$

de donde se desprende

$$[\rho_1] = \frac{1}{T} \quad ; \quad [\rho_2] = \frac{1}{L} \quad (8.3)$$

Simplificando la ecuación (8.1) se tiene

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \text{sen} \varphi - \rho_1 \dot{\varphi} + \rho_2 l \dot{\varphi}^2 \quad (8.4)$$

La ecuación (8.4) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal. Esto significa que si $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son soluciones de la ecuación (8.1), la suma de ellas, $\varphi_1 + \varphi_2$, no lo es. Este tipo de ecuaciones es de solución difícil salvo si suponemos que $\rho_1, \rho_2 \rightarrow 0$, es decir, son muy pequeños respecto de φ , ($\rho_1 \dot{\varphi}, \rho_2 l \dot{\varphi}^2$) $\ll \varphi$.

Para estudiar el problema se comienza por considerar el caso $(\rho_1, \rho_2) = 0$, por lo tanto, la ecuación (8.4) queda

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \text{sen} \varphi \quad (8.5)$$

con condiciones iniciales

$$t = 0 \begin{cases} \varphi = \varphi_0 \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

El procedimiento general consiste en multiplicar la ecuación (8.5) por $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \dot{\varphi} \text{sen} \varphi \quad (8.7)$$

La ecuación (8.7) es la derivada de

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l} \cos \varphi + C \quad (8.8)$$

El valor de la constante es

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^2(0) = 0 &= \frac{2g}{l} \cos \varphi_0 + C \\ C &= -\frac{2g}{l} \cos \varphi_0\end{aligned}\tag{8.9}$$

Por lo tanto, la ecuación (8.8) se transforma en

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)\tag{8.10}$$

La ecuación (8.10) se puede integrar por una cuadratura

$$t = \int_0^t dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}\tag{8.11}$$

Usando la fórmula

$$\cos \varphi = 1 - 2\text{sen}^2 \frac{\varphi}{2}\tag{8.12}$$

La ecuación (8.11) se transforma en

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\text{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}}\tag{8.13}$$

En la ecuación (8.11) el signo negativo proviene de que para un $dt > 0$, $d\varphi < 0$. Introduciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned}\text{sen} \frac{\varphi}{2} &= \text{sen} \varphi_0 \text{sen} u \quad ; \quad u = \arcsen \left(\frac{\text{sen} \varphi/2}{\text{sen} \varphi_0/2} \right) \\ k &= \text{sen} \frac{\varphi_0}{2}\end{aligned}\tag{8.14}$$

la ecuación (8.13) se transforma en

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_u^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} - \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} \right]\tag{8.15}$$

Por lo tanto, la ecuación (8.15) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 t &= K\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - F\left(\frac{\varphi_0}{2}, u\right) \\
 u &= \arcsen\left(\frac{\sen \varphi/2}{\sen \varphi_0/2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{8.16}$$

Donde en la ecuación (8.16) $K(\varphi_0/2)$ es la integral elíptica completa de primera especie y $F(\varphi_0/2, u)$ es la integral elíptica incompleta de primera especie según Legendre. Existen tablas muy desarrolladas de estas integrales (16).

Para ángulos pequeños ($\varphi \leq \varphi_0 \rightarrow 0$), la ecuación (8.13) se transforma en

$$t = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{\varphi_0^2}{4} - \frac{\varphi^2}{4}}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \arcsen\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)
 \tag{8.17}$$

Con lo cual

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{g}{l}}\right)
 \tag{8.18}$$

El periodo es

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}
 \tag{8.19}$$

al igual que la ecuación (7.4). Para oscilaciones pequeñas vale el isocronismo como descubrió Galileo.

Como nuestra intención es determinar la velocidad de la masa suspendida, en el momento de un choque normal contra una pared plana e inmediatamente después, con el objeto de determinar la energía perdida, esta solución no tiene valor práctico. Hay que intentar otras vías.

9.- Solución por series de la ecuación diferencial del péndulo simple con roce pequeños $(\rho_1, \rho_2) \rightarrow 0$

Es bien conocido el desarrollo de una función en serie de Taylor

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n \quad (9.1)$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla la ecuación (9.1) se discuten en los tratados comunes de análisis (17,18), éstas están, sin embargo, aseguradas si la función es continua y con derivadas finitas y continuas. La función es $\varphi(t)$ y están dadas las condiciones para $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$ y $\dot{\varphi}(0) = 0$, luego la derivada segunda está dada por la ecuación diferencial (8.1) y derivando se obtienen las derivadas sucesivas.

Veamos primero el caso de amplitudes pequeñas y sin roce, la ecuación diferencial y las condiciones de contorno son

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi \quad (9.2)$$

$$t = 0 : \quad \varphi = \varphi_0 \quad ; \quad \dot{\varphi} = 0$$

A continuación se calculan sus derivadas sucesivas y sus valores para $t = 0$

φ	φ_0	
$\dot{\varphi}$	$\dot{\varphi}_0 = 0$	
$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi$	$\ddot{\varphi}_0 = -\frac{g}{l} \varphi_0$	
$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \dot{\varphi}$	$\ddot{\varphi}_0 = -\frac{g}{l} \dot{\varphi}_0 = 0$	
$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \ddot{\varphi} = \left(\frac{g}{l}\right)^2 \varphi$	$\ddot{\varphi}_0 = \left(\frac{g}{l}\right)^2 \varphi_0$	
$\varphi^{IV} = \left(\frac{g}{l}\right)^2 \dot{\varphi}$	$\varphi_0^{IV} = \left(\frac{g}{l}\right)^2 \dot{\varphi}_0 = 0$	
$\varphi^{VI} = \left(\frac{g}{l}\right)^2 \ddot{\varphi} = -\left(\frac{g}{l}\right)^3 \varphi$	$\varphi_0^{VI} = -\left(\frac{g}{l}\right)^3 \varphi_0$	
$\varphi^{VII} = -\left(\frac{g}{l}\right)^3 \dot{\varphi}$	$\varphi_0^{VII} = -\left(\frac{g}{l}\right)^3 \dot{\varphi}_0 = 0$	
$\varphi^{VIII} = -\left(\frac{g}{l}\right)^3 \ddot{\varphi} = \left(\frac{g}{l}\right)^4 \varphi$	$\varphi_0^{VIII} = \left(\frac{g}{l}\right)^4 \varphi_0$	(9.3)
\vdots	\vdots	

De acuerdo a las ecuaciones (9.3) y (9.1) donde $a = t = 0$, $h = t$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi_0 \left[1 - \frac{g}{l} \frac{t^2}{2!} + \left(\frac{g}{l}\right)^2 \frac{t^4}{4!} - \left(\frac{g}{l}\right)^3 \frac{t^6}{6!} + \dots \right] \\ &= \varphi_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{l}{g}}\right)\end{aligned}\tag{9.4}$$

Como (8.18).

Continuemos con el caso de amplitudes pequeñas y roce, la ecuación diferencial es

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi - \rho_1\dot{\varphi} + \rho_2 l \dot{\varphi}^2\tag{9.5}$$

con las condiciones de contorno anteriores. Las derivadas sucesivas donde se han eliminado los términos con potencias superiores de ρ_1 y ρ_2

$$\begin{aligned}\varphi \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\varphi - \rho_1\dot{\varphi} + \rho_2 l \dot{\varphi}^2 \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\rho_1\varphi - 2\rho_2 g \varphi \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{g^2}{l^2}\varphi + 2\frac{g^2}{l}\rho_2\varphi^2 + 2\frac{g}{l}\rho_1\dot{\varphi} - 3g\rho_2\dot{\varphi}^2 \\ \varphi^V &= -2\frac{g^2}{l^2}\rho_1\varphi + \frac{g^2}{l^2}\dot{\varphi} - 2\frac{g^2}{l}\rho_2\varphi\dot{\varphi} \\ \varphi^{VI} &= -\frac{g^3}{l^3}\varphi + 2\frac{g^3}{l^2}\rho_2\varphi^2 - 3\frac{g^2}{l^2}\rho_1\dot{\varphi} - \frac{g^2}{l}\rho_2\dot{\varphi}^2 \\ &\vdots\end{aligned}\tag{9.6}$$

Reemplazando las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
 \varphi_0 & \\
 \dot{\varphi}_0 &= 0 \\
 \ddot{\varphi}_0 &= -\frac{g}{l} \varphi_0 \\
 \ddot{\varphi}_0 &= \frac{g}{l} \rho_1 \varphi_0 \\
 \ddot{\varphi}_0 &= \frac{g^2}{l^2} \varphi_0 + 2 \frac{g^2}{l} \rho_2 \varphi_0^2 \\
 \varphi_0^{IV} &= -2 \frac{g^2}{l^2} \rho_1 \varphi_0 \\
 \varphi_0^{VI} &= -\frac{g^3}{l^3} \varphi_0 + 2 \frac{g^3}{l^2} \rho_2 \varphi_0^2 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

Usando la ecuación (9.1) y ordenando se obtiene

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{g}{l}}\right) + \varphi_0 \frac{g}{l} \left(\rho_1 \frac{t^3}{3!} + 2\rho_2 g \frac{t^4}{4!} - 2\rho_1 \frac{g}{l} \frac{t^5}{5!} + 2\rho_2 \frac{g^2}{l} \frac{t^6}{6!} + \dots \right) \tag{9.8}$$

Se ve que a la ecuación (9.4) hay que agregarle un término correctivo que proviene del roce. Las ecuaciones (9.8) pueden prolongarse tanto como se quiera hasta obtener con suficiente aproximación la llegada de la partícula material al plano $\varphi = 0$ y por lo tanto determinar ρ_1 y ρ_2 .

Para amplitudes grandes y sin roce la ecuación diferencial es

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \text{sen} \varphi \tag{9.9}$$

Las derivadas sucesivas son

$$\begin{aligned}
 &\varphi \\
 &\dot{\varphi} \\
 &\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \varphi \\
 &\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \dot{\varphi} \cos \varphi \\
 &\ddot{\varphi} = \frac{g}{l} (\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen} \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \\
 &\varphi^V = \frac{g}{l} (\dot{\varphi}^3 \cos \varphi + 3\dot{\varphi} \ddot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \\
 &\varphi^{VI} = \frac{g}{l} (-\dot{\varphi}^4 \operatorname{sen} \varphi + 6\dot{\varphi}^2 \ddot{\varphi} \cos \varphi + 3\ddot{\varphi}^2 \operatorname{sen} \varphi + 3\dot{\varphi} \ddot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{9.10}$$

Introduciendo en las ecuaciones (9.10) las condiciones iniciales y luego aproximando para ángulos pequeños para llegar a las ecuaciones (9.3), se obtiene

$$\begin{aligned}
 &\varphi_0 \\
 &\dot{\varphi}_0 = 0 \\
 &\ddot{\varphi}_0 = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \varphi_0 \cong -\frac{g}{l} \varphi_0 \\
 &\ddot{\varphi}_0 = 0 \\
 &\ddot{\varphi}_0 = -\frac{g}{l} \dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0 = \left(\frac{g}{l}\right)^2 \cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \cong \left(\frac{g}{l}\right)^2 \varphi_0 \\
 &\varphi^V = 0 \\
 &\varphi^{VI} = \left(\frac{g}{l}\right)^3 \operatorname{sen} \varphi_0 (4\operatorname{sen}^2 \varphi_0 - 1) \cong -\left(\frac{g}{l}\right)^3 \varphi_0 \\
 &\varphi^{VII} = 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Prolongando suficientemente la serie que resulta de las ecuaciones (9.11) se obtiene una aproximación tan grande como se quiera, la serie resultante es la función inversa de la integral elíptica de primera especie de Legendre, es decir, $F_0(t)$ dada por la ecuación (8.18).

Introduzcamos ahora el roce que depende de la velocidad, no tomaremos en cuenta ρ_2 porque es un efecto pequeño respecto del que produce ρ_1 . Luego, la ecuación diferencial en este caso es

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \text{sen } \varphi - \rho_1 \dot{\varphi} \quad (9.12)$$

Las derivadas sucesivas, eliminando las potencias superiores de ρ_1 , son

$$\begin{aligned} & \varphi \\ & \dot{\varphi} \\ & \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \text{sen } \varphi - \rho_1 \dot{\varphi} \\ & \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \dot{\varphi} \cos \varphi + \rho_1 \frac{g}{l} \text{sen } \varphi \\ & \ddot{\varphi} = \frac{g^2}{l^2} \cos \varphi \text{sen } \varphi + \frac{g}{l} \dot{\varphi}^2 \text{sen } \varphi + 2\rho_1 \frac{g}{l} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ & \varphi^V = \frac{g^2}{l^2} \dot{\varphi} (\cos^2 \varphi - \text{sen}^2 \varphi) + \frac{g}{l} \dot{\varphi}^3 \cos \varphi - 4 \frac{g}{l} \rho_1 \dot{\varphi}^2 \text{sen } \varphi - 2\rho_1 \frac{g^2}{l^2} \cos \varphi \text{sen } \varphi \\ & \vdots \end{aligned} \quad (9.13)$$

Reemplazando las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} & \varphi_0 \\ & \dot{\varphi}_0 = 0 \\ & \ddot{\varphi}_0 = -\frac{g}{l} \text{sen } \varphi_0 \\ & \ddot{\varphi}_0 = \rho_1 \frac{g}{l} \text{sen } \varphi_0 \\ & \ddot{\varphi}_0 = \frac{g^2}{l^2} \cos \varphi_0 \text{sen } \varphi_0 \\ & \varphi_0^V = -2\rho_1 \frac{g^2}{l^2} \cos \varphi_0 \text{sen } \varphi_0 \\ & \vdots \end{aligned} \quad (9.14)$$

Cuando en las ecuaciones (9.14) se coloca $\rho_1 = 0$, coinciden con las ecuaciones (9.11) y si $\varphi_0 \rightarrow 0$ coincide con las ecuaciones (9.7).

Puede entonces considerarse el problema completamente resuelto. Se prolonga la serie tanto como sea necesario para que los errores de las mediciones (φ, t) sean mayores que los de la aproximación numérica, si hay más observaciones, que parámetros se puedan obtener los valores de ρ_1 , ρ_2 y g con mínimos cuadrados. De esta manera también calcular la velocidad cuando $\varphi = 0$ y el choque es frontal. Cambiando las condiciones iniciales siendo $\varphi \neq 0$ al partir el péndulo en el rebote, o sea $t = 0$, $\varphi = 0$. El cálculo de las series permite con observaciones (φ, t), obtener el valor inicial φ_0 o su velocidad $\dot{\varphi}_0$ y la energía que tiene la masa del péndulo al apartarse después del choque.

Otro método consiste en reemplazar en la ecuación del movimiento desarrollos en serie de las funciones que aparecen. En consecuencia

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \\
 \dot{\varphi}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots \\
 \ddot{\varphi}(t) &= 2a_2 + 2 \times 3a_3 + 3 \times 4a_4 t^2 + \dots \\
 \text{sen } \varphi &= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{9.15}$$

Reemplazando las ecuaciones (9.15) e igualando los coeficientes para un mismo t se obtiene

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \varphi_0 \\
 a_1 &= \dot{\varphi}_0 = 0 \\
 a_2 &= -\frac{1}{2} \frac{g}{l} \left(a_0 + \frac{a_0^3}{6} \right) - \frac{1}{2} \rho_1 a_1 \\
 a_3 &= -\frac{1}{2 \times 3} \frac{g}{l} \left(a_1 - \frac{a_0 a_1}{2} \right) - \frac{\rho_1}{2 \times 3} 2a_2 \\
 a_4 &= -\frac{1}{3 \times 4} \frac{g}{l} \left[a_2 - \frac{1}{2} (a_0^2 a_2 + a_1^2 a_0) \right] - \frac{\rho_1}{3 \times 4} 3a_3 \\
 a_5 &= -\frac{1}{4 \times 5} \frac{g}{l} \left[a_3 - \frac{1}{6} (a_1^3 + 6a_0 a_1 a_2) \right] - \frac{\rho_1}{4 \times 5} 4a_4 \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{9.16}$$

De esta forma todos los coeficientes quedan determinados y adaptables a los cálculos numéricos.

10.- Otra solución para φ finito y $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 = 0$

La ecuación diferencial (9.12) se multiplica por $\dot{\varphi}$ y se integra respecto de t

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \dot{\varphi} \text{sen } \varphi &= -\rho_1 \dot{\varphi}^2 \\
 \dot{\varphi}^2 - 2 \frac{g}{l} \cos \varphi &= -2\rho_1 \int \dot{\varphi}^2 dt
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

Con la sustitución

$$y = \int \dot{\varphi}^2 dt \quad ; \quad y' = \dot{\varphi}^2
 \tag{10.2}$$

Con la ecuación (10.2) la ecuación (10.1) se transforma en

$$y' + 2\rho_1 y = 2 \frac{g}{l} \cos \varphi \quad (10.3)$$

La ecuación (10.3) es una ecuación diferencial que resolvió Bernoulli (6)

$$y e^{2\rho_1 \varphi} - 2 \frac{g}{l} \int_0^{\varphi} e^{2\rho_1 \varphi} \cos \varphi d\varphi = C \quad (10.4)$$

Es fácil ver que derivando la ecuación (10.4) se obtiene la ecuación (10.3). Para efectuar la integral se usa

$$\int e^{ax} \cos px dx = e^{ax} \frac{a \cos px + p \sin px}{a^2 + p^2} \quad (10.5)$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\varphi} e^{2\rho_1 \varphi} \cos(\varphi) d\varphi = \frac{e^{2\rho_1 \varphi}}{1 + 4\rho_1^2} [2\rho_1 \cos(\varphi) + \sin(\varphi)] \quad (10.6)$$

La ecuación diferencial (10.3) se transforma en

$$y = C e^{-2\rho_1 \varphi} + \frac{2g}{l(1 + 4\rho_1^2)} [-2\rho_1 \cos(\varphi) + \sin(\varphi)] \quad (10.7)$$

La derivada de la ecuación (10.7) permite determinar $\dot{\varphi}^2$

$$\dot{\varphi}^2 = -2\rho_1 C e^{-2\rho_1 \varphi} + \frac{2g}{l(1 + 4\rho_1^2)} [\cos(\varphi) - 2\rho_1 \sin(\varphi)] \quad (10.8)$$

Para dar valores a C se toman las condiciones iniciales con lo que

$$C = \frac{2g e^{-2\rho_1 \varphi_0}}{\rho_1 l (1 + 4\rho_1^2)} [\cos \varphi_0 - 2\rho_1 \sin \varphi_0] \quad (10.9)$$

Finalmente

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l(1+4\rho_1^2)} \left\{ \cos \varphi - e^{-2\rho_1(\varphi_0-\varphi)} \cos \varphi_0 + 2\rho_1 \left(e^{-2\rho_1(\varphi_0-\varphi)} \sin \varphi_0 - \sin \varphi \right) \right\} \quad (10.10)$$

Con la ecuación (10.10) se puede determinar $\varphi = \varphi(t)$ por una cuadratura. También la fórmula (10,10) permite ver que la velocidad del péndulo cuando $\varphi = 0$ es menor que cuando $\rho_1 = 0$. En el párrafo 11 siguiente se puede ver cómo es posible determinar con bastante aproximación como va decreciendo la velocidad y la amplitud.

11.- Solución de Poisson para roce que depende del cuadrado de la velocidad

Poisson (9) pudo integrar la ecuación diferencial del movimiento con $\rho_1 = 0$, $\rho_2 \neq 0$, esta es

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = l\rho_2 \dot{\varphi}^2 \quad (11.1)$$

$$[\rho_2] = \frac{1}{L}$$

Multiplicando la ecuación (11.1) por $d\varphi$ y teniendo en cuenta que

$$y = \int \dot{\varphi}^2 d\varphi \quad ; \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} d\varphi = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) d\varphi = d \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} \quad (11.2)$$

$$\int \frac{d^2 \varphi}{dt^2} d\varphi = \int \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{1}{2} y'$$

La ecuación (11.1) se transforma en

$$y' - 2\frac{g}{l} \cos \varphi - 2\rho_2 y = 0 \quad (11.3)$$

O sea, la lineal de Bernoulli (6) con su solución

$$y e^{-2l\rho_2 \varphi} - 2\frac{g}{l} \int e^{-2l\rho_2 \varphi} \cos \varphi d\varphi = C \quad (11.4)$$

Por lo tanto

$$y = C e^{2l\rho_2 \varphi} + \frac{2g}{l(1+4l^2\rho_2^2)} (\sin \varphi - 2\rho_2 l \cos \varphi) \quad (11.5)$$

Donde se ha efectuado la integral indicada en la ecuación (11.4).

Para obtener $\dot{\varphi}^2$ derivamos respecto de φ la ecuación (11.5)

$$\dot{\varphi}^2 = 2l\rho_2 C e^{2l\rho_2\varphi} + \frac{2g}{l(1+4l^2\rho_2^2)}(\cos\varphi + 2\rho_2 l \sin\varphi) \quad (11.6)$$

Cuando $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ luego la constante C es

$$C = -\frac{2ge^{-2l\rho_2\varphi}}{2l\rho_2(1+4l^2\rho_2^2)}(\cos\varphi_0 + 2\rho_2 l \sin\varphi_0) \quad (11.7)$$

Finalmente

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l(1+4l^2\rho_2^2)} \left[\cos\varphi + 2\rho_2 l \sin\varphi - (\cos\varphi_0 + 2\rho_2 l \sin\varphi_0) e^{2l\rho_2(\varphi-\varphi_0)} \right] \quad (11.8)$$

Cuando el punto material llega a la pared $\varphi = 0$ y

$$\dot{\varphi}^2(\varphi=0) = \frac{2g}{l(1+4l^2\rho_2^2)} \left[1 - (\cos\varphi_0 + 2\rho_2 l \sin\varphi_0) e^{-2l\rho_2\varphi_0} \right] \quad (11.9)$$

La velocidad es menor que en el vacío, cuando $\rho_2 = 0$

$$\dot{\varphi}^2(\varphi=0, \rho_2=0) = 2\frac{g}{l}(1 - \cos\varphi_0) \quad (11.10)$$

La ecuación (11.10) verifica, como se puede apreciar en la figura 8, el principio de la conservación de la energía. En el punto $\varphi = 0$ la energía cinética $(l^2\dot{\varphi}^2 m)/2$ es igual a la energía potencial $mg(l - l\cos\varphi)$.

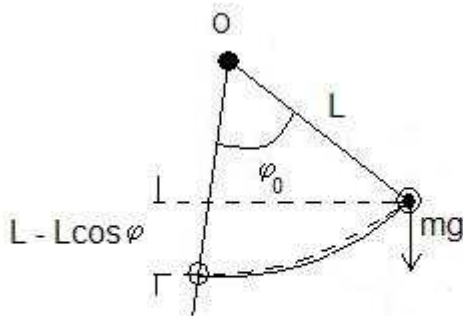


Figura 9

Si el péndulo no choca y sigue oscilando en un ángulo φ_1 se produce que $\dot{\varphi} = 0$ y reemplazando en la ecuación (11.8)

$$e^{2l\rho_2\varphi_1} (\cos \varphi_1 + 2l\rho_2 \sin \varphi_1) = (\cos \varphi_0 + 2l\rho_2 \sin \varphi_0) e^{-2l\rho_2\varphi_0} \quad (11.11)$$

El valor de φ_1 diferirá poco de φ_0 , luego $\varphi_1 = \varphi_0 - \delta$ y si se desprecia δ^2 y $\rho_2\delta$ se tiene

$$\delta \sin \varphi_0 = 2l\rho_2 (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) \quad (11.12)$$

Por lo tanto

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{2l\rho_2}{\sin \varphi_0} (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) \quad (11.13)$$

Si suponemos las oscilaciones muy pequeñas

$$\varphi_1 \cong \varphi_0 - \frac{2l\rho_2}{3} \varphi_0^2 \quad (11.14)$$

Cuando vuelva a oscilar llegará a un ángulo φ_2 con la misma ley que la definida por la ecuación (11.14)

$$\varphi_2 \cong \varphi_1 - \frac{2l\rho_2}{3} \varphi_1^2 \quad (11.15)$$

Con cálculos bastante complejos y largos, Poisson demuestra que con las aproximaciones supuestas y para ángulos pequeños ($\varphi_0 \rightarrow 0$) las oscilaciones son isócronas, lo cual también obtuvo Galileo, para roce proporcional al cuadrado de la velocidad. Como las ecuaciones obtenidas son iguales a la ecuación (8.27) si tomamos el tiempo con tal unidad que $\omega = 1$, ($\omega = 1/T$) (por lo tanto, el ángulo mide el tiempo) en el caso anterior las oscilaciones son isócronas también. Luego, no podemos saber, por la observación de oscilaciones pequeñas, cuál roce es el real.

12.- Método de Routh para pequeñas oscilaciones

Routh (10) transforma la ecuación (8.4) tomando $\rho_1, \rho_2 \neq 0$ y desarrollando en serie el $\sin \varphi$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l} \sin \varphi - \rho_1 \dot{\varphi} + l\rho_2 \dot{\varphi}^2 \\ \sin \varphi &= \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi &= -\rho_1 \dot{\varphi} + l\rho_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} \frac{g}{l} \varphi^3 + \dots \end{aligned} \quad (12.1)$$

Luego toma la solución de la primera parte

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{l}{g}}\right) \quad (12.2)$$

y sustituye la ecuación (12.2) en la ecuación (12.1) obteniendo una serie de lenta convergencia, para mejorar esto usa la ecuación

$$\ddot{\varphi} + \rho_1 \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (12.3)$$

La ecuación (12.3) tiene la solución

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\frac{\rho_1 t}{2}} \cos\left(t \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\rho_1^2}{4}}\right) \quad (12.4)$$

La ecuación (12.4) se reemplaza en la ecuación (12.1) y se eliminan los términos de orden superior al tercero, si se los toma en cuenta a los restantes aparece otra ecuación diferencial que debe ser resuelta. Finalmente, se puede determinar cómo disminuye la amplitud y el tiempo para recorrer cada lazo entre una posición de velocidad instantánea nula es el mismo, aunque las amplitudes disminuyan. Este último detalle puede verse en Poisson.

13.- Investigaciones modernas

En 1892 Poincaré (19,20) inicia un nuevo método de estudio de las ecuaciones diferenciales. La ecuación (12.1) se puede transformar de la manera siguiente

$$\ddot{\varphi} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} v \quad ; \quad v = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v \frac{dv}{d\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi - v \rho_1 + l \rho_2 v^2 \quad (13.1)$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{g \sin \varphi}{l v} - \rho_1 + l \rho_2 v^2$$

La última ecuación de la (13.1) define un campo de direcciones en el plano (v, φ) , de tal manera que dado un punto cualquiera en el campo se puede saber en qué dirección se mueve. Un estudio detallado del método, a nivel elemental, está muy bien desarrollado en Soker (21).

Con el objeto de dar un ejemplo trataremos el caso del péndulo simple con amplitud muy pequeña. Para ángulos muy pequeños la ecuación (8.10) se transforma así

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= 1 - \frac{\varphi^2}{2} \quad ; \quad \cos \varphi_0 = 1 - \frac{\varphi_0^2}{2} \\ \dot{\varphi}^2 &= 2 \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) = 2 \frac{g}{l} \left[1 - \frac{\varphi^2}{2} - \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right) \right] \\ \dot{\varphi}^2 &= \frac{g}{l} (\varphi_0^2 - \varphi^2) \quad ; \quad \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l} \varphi^2 = \frac{g}{l} \varphi_0^2 \end{aligned} \quad (13.2)$$

La última ecuación de las (13.2) con un cambio de variable queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tau &= t \sqrt{\frac{g}{l}} \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \dot{\varphi}^2 \frac{l}{g} &= \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \frac{g}{l} \frac{l}{g} = \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \end{aligned} \quad (13.3)$$

Luego, derivando respecto de τ tenemos, a partir de la ecuación (13.2)

$$\dot{\varphi}^2 + \varphi^2 = \varphi_0^2 \quad (13.4)$$

En el plano $\varphi, \dot{\varphi}$ se trata de una circunferencia de radio φ_0 (fig. 9).

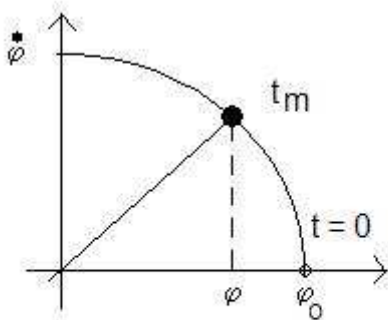


Figura 10

El tiempo que tarda de ir desde φ_0 a φ , o sea, de $t = 0$ a t es

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^\tau d\tau = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varphi_0 \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}}} = \left[\arccos \frac{\varphi}{\varphi_0} \right]_{\varphi_0}^{\varphi} \\ &= \arccos \frac{\varphi}{\varphi_0} - \arccos 1 = \arccos \frac{\varphi}{\varphi_0} \end{aligned} \quad (13.5)$$

A partir de la ecuación (13.5)

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{\varphi_0} &= \cos \tau = \cos \left(t \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \\ \varphi &= \varphi_0 \cos \left(t \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \end{aligned} \quad (13.6)$$

La ecuación diferencial y su solución son

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l} \varphi \\ \varphi &= \varphi_0 \cos \left(t \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \end{aligned} \quad (13.7)$$

De la misma manera se pueden tratar infinidad de problemas no lineales. Poincaré estudió el caso

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{ax + bv + P(x,v)}{cx + dv + Q(x,v)} \\ v &= \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (13.8)$$

donde P y Q se anulan con el segundo orden en el origen (19).

14.- El método energético

Si dejamos que el péndulo oscile hasta casi $-\varphi_0$ abandonándolo a sí mismo (Fig. 10) partiendo de φ_0 , con la altura h_0 desde la horizontal que pasa por el centro de curvatura, cuando llega a ($-\varphi_0$, $\varphi = 0$), con una altura h_1 , se supone que por energía perdida en el roce $h_1 < h_0$. Esa diferencia corresponde a la energía $(h_1 - h_0)mg$ y es lo que se pierde por roce.

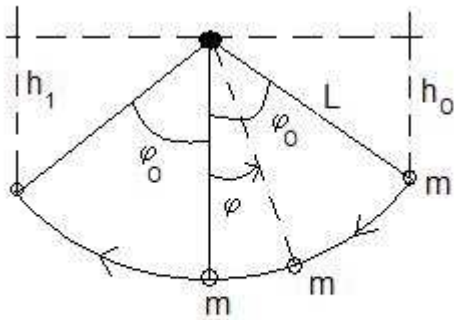


Figura 11

Como se conoce con bastante aproximación el valor de la velocidad en función de φ tomando $\rho_1, \rho_2 \rightarrow 0$ se puede calcular la energía que el roce absorbe. La ecuación de la energía se obtiene multiplicando la ecuación (8.1) por $\dot{\varphi}$ e integrando

$$\frac{ml\dot{\varphi}^2}{2} = mg(\cos \varphi - \cos \varphi_0) + ml\rho_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \dot{\varphi} d\varphi + ml^2\rho_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \dot{\varphi}^2 d\varphi \quad (14.1)$$

puesto que $d\varphi = \dot{\varphi} dt$. Como suponemos $(\rho_1, \rho_2) \rightarrow 0$ podemos determinar $\varphi = \varphi(t)$ con $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

Designando por $\Delta\varepsilon_1$ y $\Delta\varepsilon_2$ las energías perdidas por roce se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varepsilon_1}{m} &= 2 \int_{\varphi_0}^0 l\dot{\varphi}\rho_1 l d\varphi = -l^2\rho_1^2 \int_0^{\varphi_0} \dot{\varphi} d\varphi \\ \frac{\Delta\varepsilon_2}{m} &= 2 \int_{\varphi_0}^0 l^2\dot{\varphi}^2\rho_2 l d\varphi = -2l^3\rho_2 \int_0^{\varphi_0} \dot{\varphi}^2 d\varphi \end{aligned} \quad (14.2)$$

El cálculo de $\Delta\varepsilon_1$ se obtiene de la ecuación (14.1)

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^2 &= 2\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \\ \cos\varphi &= 1 - 2\text{sen}^2\frac{\varphi}{2} \quad ; \quad \dot{\varphi}^2 = 4\frac{g}{l}\left(\text{sen}^2\frac{\varphi_0}{2} - \text{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right) \\ \text{sen}\frac{\varphi}{2} &= \text{sen}u \text{sen}\frac{\varphi_0}{2} \quad ; \quad \cos\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{2} = (\cos u) du \left(\text{sen}\frac{\varphi_0}{2}\right) \\ d\varphi &= \frac{2\cos u \text{sen}\frac{\varphi_0}{2} du}{\cos\frac{\varphi_0}{2}} = \frac{2\cos u \text{sen}\frac{\varphi_0}{2} du}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\frac{\varphi_0}{2}\text{sen}^2u}} \\ \dot{\varphi} &= 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\text{sen}^2\frac{\varphi_0}{2} - \text{sen}^2\frac{\varphi}{2}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\text{sen}\frac{\varphi_0}{2}\cos u\end{aligned}\tag{14.2}$$

De acuerdo con las ecuaciones (14.2)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\varepsilon_1}{m} &= -2l^2\rho_1\sqrt{\frac{g}{l}}\int_0^{\varphi_0}\sqrt{\text{sen}^2\frac{\varphi_0}{2} - \text{sen}^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi \\ &= -2l^2\rho_1\sqrt{\frac{g}{l}}\int_0^{\pi/2}\frac{k^2\cos^2u du}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u}} \\ k &= \text{sen}\frac{\varphi_0}{2} = \text{sen}\vartheta\end{aligned}\tag{14.3}$$

La integral de la ecuación (14.3) se obtiene usando las identidades

$$\begin{aligned}\frac{k^2\cos^2u}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u}} &= \frac{k^2(1 - \text{sen}^2u)}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u}} = \frac{k^2}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u}} - \frac{k^2\text{sen}^2u}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u}} \\ &= \frac{k^2}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u}} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u}} + \sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u}\end{aligned}\tag{14.4}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{k^2\cos^2u du}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u}} &= (k^2 - 1)\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u}} + \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - k^2\text{sen}^2u} du \\ &= (k^2 - 1)K(\vartheta) + E(\vartheta) \\ k &= \text{sen}\frac{\varphi}{2} = \text{sen}\vartheta\end{aligned}\tag{14.5}$$

Donde $K(\vartheta)$ y $E(\vartheta)$ son las integrales elípticas completas de Legendre de primera y segunda especie, respectivamente. Finalmente

$$\Delta\varepsilon_1 = -2m\rho_1 l^2 \sqrt{\frac{g}{l}} \left[(k^2 - 1)K(\vartheta) + E(\vartheta) \right] \quad (14.6)$$

$$k = \text{sen} \frac{\varphi_0}{2} = \text{sen} \vartheta$$

En el caso de $\Delta\varepsilon_2$ de acuerdo con la ecuación (14.2)

$$\Delta\varepsilon_2 = -2m\rho_2 l^2 g \int_0^{\varphi_0} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) d\varphi \quad (14.7)$$

$$= -2m\rho_2 l^2 g (\varphi_0 \cos \varphi_0 + \text{sen} \varphi_0)$$

En una experiencia se adoptó $\varphi_0 = 30^\circ$, $l = 10^2 \text{cm}$, $m = 10 \text{g}$, $g = 10 \times 10^2 \text{cm/s}^2$ y la observación dió que $h_1 - h_0 = 5 \times 10^{-2} \text{cm}$.

Si suponemos que $\Delta\varepsilon$ es absorción primero por ρ_1 siendo $\rho_2 = 0$ y segundo por ρ_2 siendo $\rho_1 = 0$ se obtiene

$$\Delta\varepsilon_1 = \Delta/mg \cong 50 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}^2}$$

$$\rho_1 = \frac{\Delta\varepsilon_1}{2ml^2 \sqrt{\frac{g}{l}} \left[(k^2 - 1)K(\vartheta) + E(\vartheta) \right]} \cong 2.5 \times 10^{-5} \text{s}^{-1} \quad (14.8)$$

$$K(\vartheta) = 1.59814 \quad ; \quad E(\vartheta = 15^\circ) = 1.54414 \quad ; \quad k = \text{sen} \vartheta = 0.2588$$

$$\rho_2 = \frac{\Delta\varepsilon_2}{2ml^2 g (\varphi_0 \cos \varphi_0 + \text{sen} \varphi_0)} \cong 5 \times 10^{-7} \text{cm}^{-1}$$

Si se trabaja con muchas oscilaciones $\Delta l = h_1 - h_0$ se puede determinar con mucha exactitud partiendo del mismo φ_0 . Si se varía el ángulo φ_0 se puede determinar cuál de los denominadores $(k^2 - 1)K(\vartheta) + E(\vartheta)$ o $\varphi_0 \cos \varphi_0 + \text{sen} \varphi_0$ es el que predomina. También variando l , $\Delta\varepsilon_1$ varía con $l^{3/2}$ y $\Delta\varepsilon_2$ con l^{+2} . Parece ser este último método el más práctico para estimar ρ_1 y ρ_2 y saber qué cantidad de energía se perdió por roce para cada proceso.

15.- El rebote

Para tomar en cuenta el rebote en el plano $\varphi = 0$, basta cambiar las condiciones de contorno iniciales. El péndulo llega a $\varphi = 0$ con una velocidad y rebota con otra φ_0 que no es la de llegada con signo cambiado sino que además hay que restarle la energía que perdió y que es absorbida por la pared donde chocó. En el rebote el término en ρ_2 debe ser ahora negativo. Las condiciones iniciales son

$$t = 0 \begin{cases} \varphi = 0 \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \end{cases} \quad (15.1)$$

Hay que recordar que aquí ρ_2 es negativo. La ecuación (8.10) cambia en

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 + 2\frac{g}{l}(\cos \varphi - 1) \quad (15.2)$$

Usando la ecuación (8.12)

$$t = \int_0^t dt = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + 2\frac{g}{l}(\cos \varphi - 1)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (15.3)$$

$$k = \frac{2}{\dot{\varphi}_0} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad ; \quad u = \arcsen\left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{k}\right) \quad ; \quad t = \frac{1}{\dot{\varphi}_0} F(k, u)$$

Cuando φ es muy pequeño

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{l}{g} \dot{\varphi}_0^2 - \varphi^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \arcsen\left(\frac{\varphi}{\dot{\varphi}_0} \sqrt{\frac{g}{l}}\right) \quad (15.4)$$

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \operatorname{sen}\left(t \sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

Si se desarrolla en serie como en las ecuaciones (9.3) se obtiene

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 \left[t - \frac{g}{l} \frac{t^3}{3!} + \left(\frac{g}{l}\right)^2 \frac{t^5}{5!} - \dots \right] \quad (15.5)$$

Tomando en cuenta los roces y para amplitudes pequeñas es válida la ecuación (9.5) que con las condiciones iniciales dadas en la ecuación (15.1) se obtiene el siguiente desarrollo, tomando en cuenta (9.6)

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}_0 \left[t - \frac{g}{l} \frac{t^3}{3!} + \left(\frac{g}{l}\right)^2 \frac{t^5}{5!} - \dots \right] \quad (15.6)$$

$$+ \dot{\varphi}_0 \left[(-\rho_1 + \rho_2 \dot{\varphi}_0) \frac{t^2}{2!} + \left(2\rho_1 \frac{g}{l} - 3\rho_2 g \dot{\varphi}_0\right) \frac{t^4}{4!} - \left(3\rho_1 \left(\frac{g}{l}\right)^2 + \rho_2 \frac{g^2}{l} \dot{\varphi}_0\right) \frac{t^6}{6!} \right]$$

O lo que es lo mismo

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \operatorname{sen} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right) + \dot{\varphi}_0 \left[(-\rho_1 + \rho_2 \dot{\varphi}_0) \frac{t^2}{2!} + \left(2\rho_1 \frac{g}{l} - 3\rho_2 g \dot{\varphi}_0 \right) \frac{t^4}{4!} - \left(3\rho_1 \left(\frac{g}{l} \right)^2 + \rho_2 \frac{g^2}{l} \dot{\varphi}_0 \right) \frac{t^6}{6!} \right] \quad (15.7)$$

Para amplitudes finitas es válida la ecuación (9.12) con $\rho_2 = 0$ y con las condiciones iniciales dadas por la ecuación (15.1) y se obtiene

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}_0 \left[t - \frac{g}{l} \frac{t^3}{3!} + \left(\frac{g^2}{l^2} + \frac{g}{l} \dot{\varphi}_0^2 \right) \frac{t^5}{5!} - \dots \right] + \rho_1 \dot{\varphi}_0 \left[-\frac{t^2}{2!} + 2 \frac{g}{l} \frac{t^4}{4!} - \dots \right] \quad (15.8)$$

En el rebote se puede estimar lo que se pierde en roce sabiendo el ángulo que alcanza el péndulo en el rebote. Si ese ángulo es φ_1 se abandona el péndulo retirando la pared $\varphi = 0$ y conociendo la altura a la que llega al otro lado de la pared, se estima la pérdida de energía como en el párrafo 14.

REFERENCIAS

Primera parte

1.- Gray, A. y Gray, J. G., A treatise on dynamics. Mac Millan, Londres 1911.

Segunda parte

1.- Galileo, Galilei. Diálogos acerca de dos nuevas ciencias, traducción de José San Román Villasante, anotada para Teófilo Isnardi, Librería del Colegio, Buenos Aires, 1944, Traducción sacada de la edición nacional italiana de 1898, reproducción fiel de la princeps del año 1638. La observación se encuentra en la jornada primera, p. 127 de la traducción de San Román.

2.- Ibidem., Jornada tercera, teorema VI, proposición VI.

3.- Mach, Ernest. La mécanique, exposé historique et critique de son développement, traducción de Emil Bertrand sobre la cuarta edición alemana, Herman, Paris 1904. Capítulo II, segunda parte, trabajos de Huyghens, párrafo 7, p. 156.

4.- Newton, Isaac. Mathematical principles of natural philosophy, traducción del latín de Andrew Motte, revisada por Florian Cajori, editado por Enciclopedia Británica, 1952. Primera edición 1686.

5.- Huyghens, Cristian. Horlogium oscillatorium, 1673, citado por Mach, Ibidem.

6.- Bernoulli, Juan. Acta Eruditorum, 1695. Académie des Sciences de Paris, 1737.

7.- Euler, Leonardo. Traité pratique de Mécanique 1748. Comentado por Maximilien Marie Histoire des Sciences mathématiques et physiques, Paris 1886, tomo VIII.

- 8.- Legendre, Adrien – Marie. *Traité des fonctions elliptiques*, Paris 1825.
- 9.- Poisson, Simeòn – Denis. *Traité de Mécanique*, Haumann, Bruselas, 1838, p. 101, Capítulo V.
- 10.- Routh, Edward John. *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, Dover 1955. Ediciones 1860 a 1905. Capítulo VII, Free and forced oscillations, p. 255.
- 11.- Korn, G. A. y Korn, T. M. *Mathematical Handbook for Scientist and Engineers*. Capítulo 9, Non linear second – order equations. Mc Graw Hill, 1961.
- 12.- Clarke, C. B. *Tratado de Geodesia*. Traducido del inglés por Eduardo León y Ortiz, Bailly – Baillere, Madrid 1910. Capítulo XIV, del péndulo.
- 13.- Wolf, C. *Bibliografía del péndulo*, Collections des memories relatifs a la Physique, Societé Francaise de Physique, tomo IV, 1889.
- 14.- Marcolongo, R., *Meccanica Razionale*, tomo II, p. 64, Hoepli, Milan, 1923.
- 15.- Appell, P., *Traité de Mécanique Rationnelle*, tomo I, p. 439, Gauthiers – Villars, Paris 1909.
- 16.- Abramowitz, M. y Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.
- 17.- Pascal, E. *Eseseizci Critici di Calcolo Diferénciale e Integrale*, Hoepli, Milano, 1909,&73, p. 129.
- 18.- Gousart, E. *Cours d`analyse Mathematique*, tomo I, §85, p. 207, Gauthiers – Villars, Paris 1943.
- 19.- Poincarè, Henri. *Les methods nouvelles de la mècanique cèleste*, volumen I, Gauthiers – Villars, Paris 1892.
- 20.- Poincarè, Henri. *Sur las courves definies par ecuations diferentiales*, Ouveres, Gauthier – Villars, volumen I, 1892.
- 21.- Stoker, J. J. *Non linear vibrations in mechanical and electrical systems.*, Interscience, New York, 1950.