

ESTUDIO PROBABILÍSTICO DE LA TENACIDAD CRÍTICA EN COBRE Y EL LÍMITE DE FLUENCIA EN ACERO

P. KITTL

Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
Casilla 2777, Correo 21, Santiago, Chile

G. DÍAZ

Departamento de Ciencia de los Materiales
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
Casilla 2777, Correo 21, Santiago, Chile
Email: gdiaz@ing.uchile.cl

R.WENDLER

V. SANTIBÁÑEZ

Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
Casilla 2777, Correo 21, Santiago, Chile

RESUMEN

Con los datos de tenacidad crítica del cobre y el límite de fluencia en el acero se obtuvieron los parámetros de Weibull de sus distribuciones por el método de los momentos y de linealización. Se determinó por el método de Monte Carlo las dispersiones de esos parámetros. Suponiendo una tolerancia en una determinada probabilidad de falla se determinó cuántos ensayos hay que hacer para que un lote de esos materiales tenga la tolerancia dada. Finalmente se calcula la precisión con que hay que efectuar las mediciones en los dos casos para que los errores de medición no oculten la dispersión de los parámetros producido por las propiedades propias de los materiales.

1. INTRODUCCIÓN

Los defectos que están repartidos al azar y con tamaños también en la misma forma, hacen que la grieta con que se mide la tenacidad crítica en modo I, K_{IC} , avance con mayor o menor facilidad. Lo mismo ocurre con el límite de fluencia σ_f , que depende de la repartición y tamaño de los defectos. Las bases teóricas de lo tratado aquí se encuentran en [1], [2], [3], [4], [5] y [6].

De acuerdo a esa hipótesis, de defectos de tamaño y distribución aleatoria, se obtiene la distribución de Weibull (1.1)

$$F(\sigma_f) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \sigma_f < \sigma_{f,L} \\ 1 - \exp \left[-\frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma_f - \sigma_{f,L}}{\sigma_{f,0}} \right)^m \right], & \sigma_f \geq \sigma_{f,L} \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $F(\sigma_f)$ es la probabilidad de falla acumulativa y llamamos falla la iniciación de la deformación plástica cuando σ llega a σ_f ; V es el volumen de la muestra sometida a tensión uniforme σ , V_0 la unidad de volumen, $\sigma_{f,0}$, $\sigma_{f,L}$ y m parámetros. En el caso de la tenacidad crítica la $F(K_{IC})$ es

$$F(K_{IC}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq K_{IC} < K_{IC,L} \\ 1 - \exp \left[-\frac{L}{L_0} \left(\frac{K_{IC} - K_{IC,L}}{K_{IC,0}} \right)^m \right], & K_{IC} \geq K_{IC,L} \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $F(K_{IC})$ es la probabilidad acumulativa de que se active la grieta de tamaño L , L_0 , es la unidad de longitud y $K_{IC,0}$, $K_{IC,L}$ y m son parámetros. Si F depende del volumen V de la fórmula (1.1) esto no se verifica en general porque es difícil lograr distribuciones semejantes de tensión en volúmenes diferentes. También es difícil lograr distribuciones semejantes de defectos, cuando esto ocurre, el cuerpo se denomina Weibulliano. Lo mismo ocurre cuando se estudia K_{IC} con respecto a L .

Así que se supondrá en este trabajo que todas las muestras son iguales en forma, tamaño y distribución de tensiones, por lo tanto se puede tomar $V = V_0$, y $L = L_0$. Las medidas de σ_f y K_{IC} se detallan en la Tabla 1. Los valores de σ_f se obtuvieron de [7,8] y K_{IC} de [9].

En la columna de F se ha colocado el F "best fit".

$$F(\sigma_{f,n}) = \frac{n - 1/2}{N}, \quad F(K_{IC,n}) = \frac{n - 1/2}{N} \quad (1.3)$$

Tabla 1. Valores de σ_f y K_{IC} observados.

n	σ_f, MPa	$F(\sigma_f), \%$	n	$K_{IC}, MPa\sqrt{m}$	$F(K_{IC}), \%$
1	506	1,79	1	17,75	2,27
2	524	5,36	2	18,05	6,82
3	524	8,93	3	18,05	11,36
4	533	12,5	4	18,05	15,91
5	542	16,07	5	18,05	20,45
6	546	19,24	6	18,05	25,00
7	546	23,21	7	18,41	29,55
8	546	26,79	8	18,42	34,10
9	555	30,36	9	18,68	38,64
10	563	33,93	10	18,79	43,18
11	563	37,50	11	18,87	47,73
12	563	41,07	12	18,94	52,27
13	563	44,64	13	18,94	56,82
14	563	48,21	14	18,94	61,36
15	563	51,79	15	18,98	65,91
16	565	55,36	16	19,22	70,46
17	569	58,93	17	19,27	75,00
18	576	62,50	18	19,45	79,55
19	579	66,07	19	19,51	84,10
20	579	69,64	20	19,65	88,64
21	579	73,21	21	19,71	93,18
22	587	76,79	22	19,85	97,73
23	596	80,36	$\delta = F_n - F_{n-1} = 4,54$		
24	604	83,93			
25	604	87,50			
26	604	91,07			
27	618	94,64			
28	623	98,21			
$\delta = F_n - F_{n-1} = 3,57$					

2. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE WEIBULL POR EL MÉTODO DE LOS MOMENTOS

Los parámetros se pueden determinar por medio de los momentos de primer y segundo orden [1], μ_1 y μ_2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \bar{\sigma}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{f,i} \\ \mu_2^2 = \Delta\sigma_f^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_{f,i} - \bar{\sigma}_f)^2 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \bar{K}_{IC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_{IC,i} \\ \mu_2^2 = \Delta K_{IC}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_{IC,i} - \bar{K}_{IC})^2 \end{array} \right.$$

Homologándolos con los de la F continua, tomando la variable σ como genérica

$$\mu_1 = \bar{\sigma} = \int_{\sigma_L}^{\infty} \sigma \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} = \sigma_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\frac{1}{m}} \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) + \sigma_L \quad (2.2)$$

$$\mu_2^2 = \Delta\sigma^2 = \int_{\sigma_L}^{\sigma} (\sigma - \bar{\sigma})^2 \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} = \sigma_0^2 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\frac{2}{m}} \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{m} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right] \quad (2.3)$$

Donde Γ es la función gamma de Euler

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{m-1} dt \quad (2.4)$$

De la ecuación (2.2) y (2.3) se obtiene dividiendo miembro a miembro

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\Delta\sigma}{\bar{\sigma}} \quad (2.5)$$

$$\frac{\Delta\sigma}{\bar{\sigma}} = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \quad (2.6)$$

La expresión (2.6) es un número real, obtenido de los datos experimentales función sólo de m . En la figura 1, se puede ver la dependencia de $\Delta\sigma/\bar{\sigma}$ con m , y cómo se obtiene dicho parámetro de la curva para la tensión de fluencia del acero y la tenacidad crítica en el cobre.

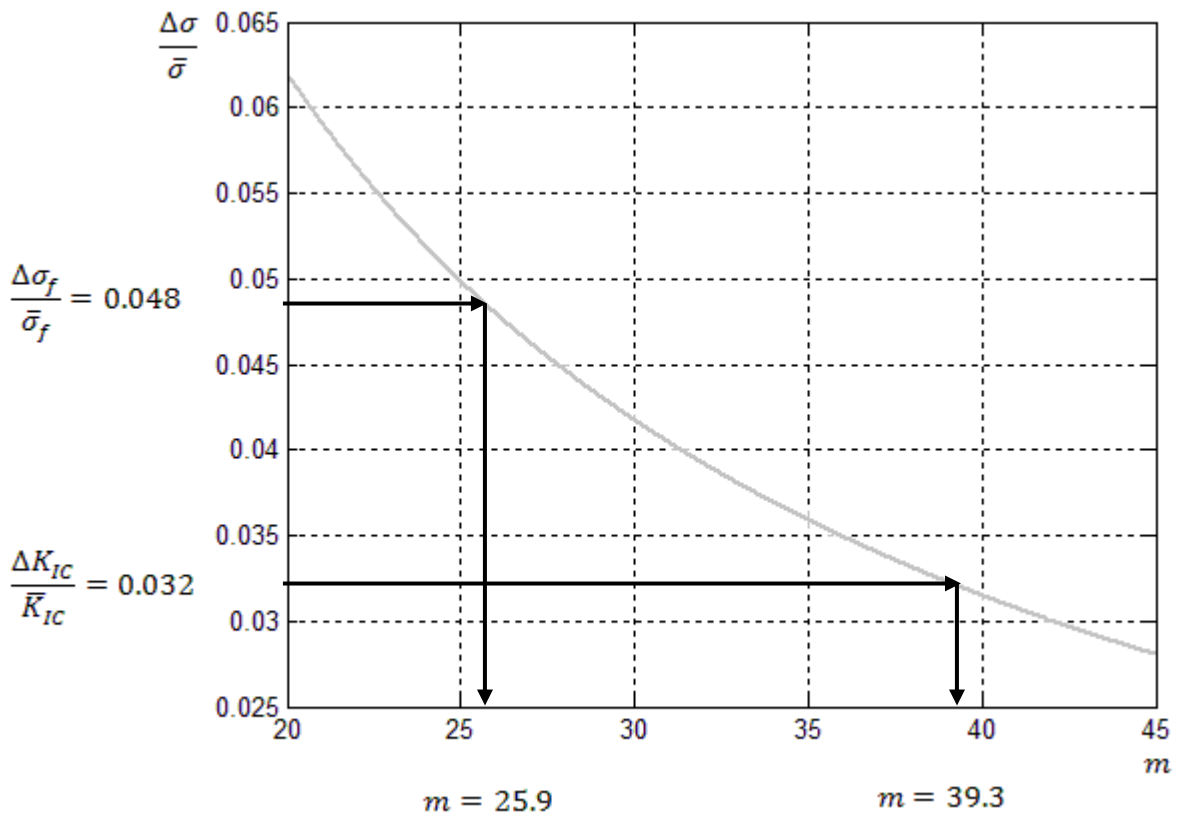


Figura 1. Valores de $\Delta\sigma/\bar{\sigma}$ en función de m . Para cada valor de $\Delta\sigma/\bar{\sigma}$ obtenido de la experiencia (2.1) se obtiene el m correspondiente.

Una vez obtenido el m se puede obtener σ_0

$$\sigma_0 = \frac{\bar{\sigma} - \sigma_L}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\frac{1}{m}} \quad (2.7)$$

En nuestros casos supondremos como primera aproximación $\sigma_L \approx 0$ y como $V = V_0$, por lo tanto la ecuación (2.7) se transforma en cada caso en

$$\sigma_{f,0} = \frac{\bar{\sigma}_f}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}, \quad K_{IC,0} = \frac{\bar{K}_{IC}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \quad (2.8)$$

En cada caso el parámetro m viene dado por los datos experimentales correspondientes. Los resultados obtenidos son

$$\begin{array}{ll} \bar{\sigma}_f = 564,4 \text{ MPa} & \bar{K}_{IC} = 18,8 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \Delta(\sigma_f) = 27,3 \text{ MPa} & \Delta(K_{IC}) = 0,604 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ m = 25,9 & m = 39,3 \\ \sigma_{f,0} = 578,2 \text{ MPa} & K_{IC,0} = 19,1 \text{ MPa}\sqrt{m} \end{array} \quad (2.9)$$

Si se construyen con estos parámetros las curvas teóricas, se obtienen las figuras 2 y 3.

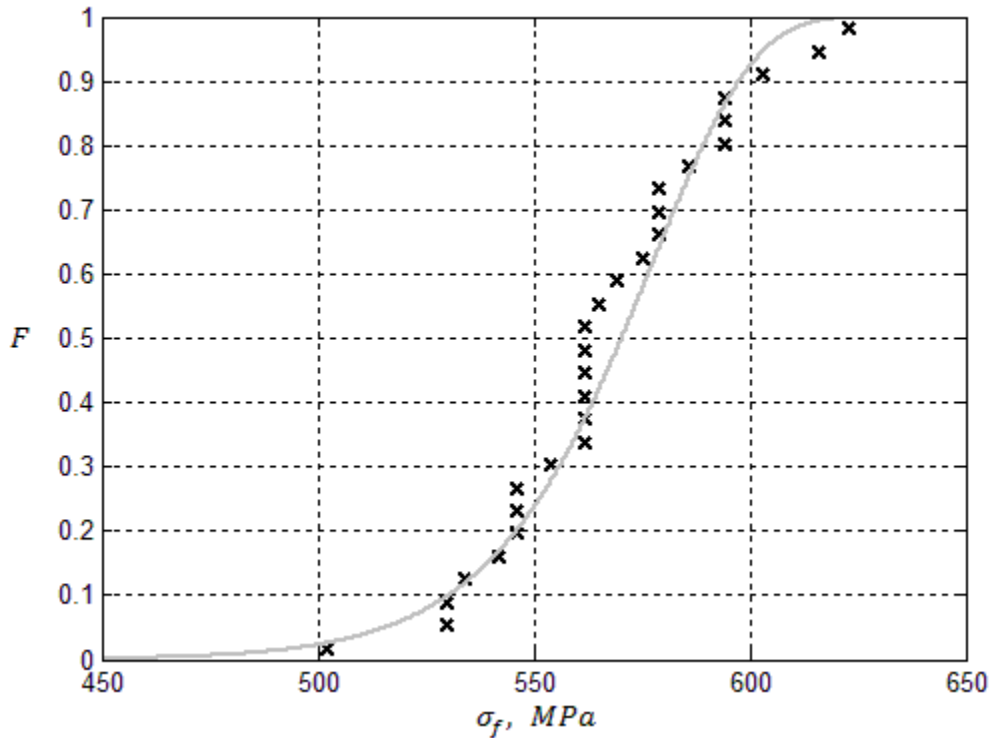


Figura 2. Datos experimentales y curva teórica de σ_f , tensión de fluencia, con $\sigma_{f,L} = 0$.

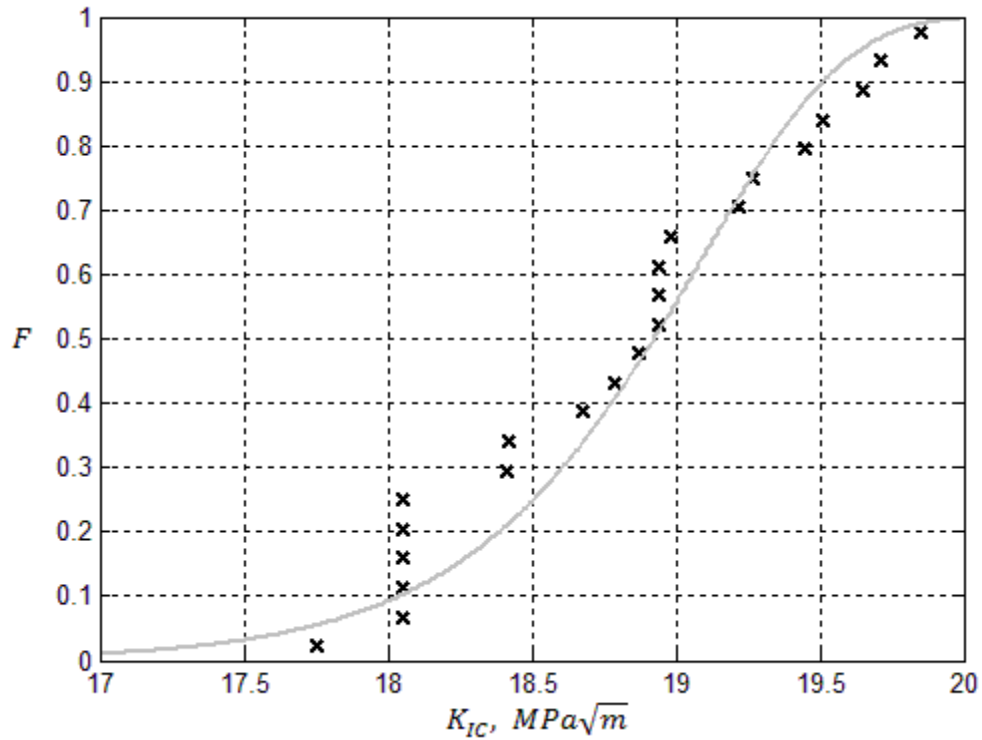


Figura 3. Datos experimentales y curva teórica de K_{IC} , tenacidad límite en modo I, con $K_{IC,L} = 0$.

Para afinar el ajuste se puede variar σ_L de acuerdo al conjunto $\{0 \leq \sigma_L^j \leq \sigma_i\}$, si σ_L^j fuera mayor que algún σ_i la cantidad dentro del paréntesis sería negativa y como m es un número real las fórmulas no tendrían sentido, porque aparecería un número imaginario. Los valores de σ_i^j , lo mismo que $\bar{\sigma}^j$, $\Delta^2 \sigma^j$ y m^j están determinados por las siguientes ecuaciones

$$\sigma_i^j = \sigma_i - \sigma_L^j, \quad \bar{\sigma}^j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma_L^j) = \bar{\sigma} - \sigma_L^j$$

$$\Delta^2 \sigma^j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{\sigma}^j - \sigma_i^j)^2 \quad (2.10)$$

$$\frac{\Delta \sigma^j}{\bar{\sigma}^j} = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m^j}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m^j}\right)}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m^j}\right)}$$

Con las ecuaciones de (2.10) se determinan los nuevos m^j y σ_0^j para cada σ_L^j

$$\sigma_0^j = \frac{\overline{\sigma^j}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m^j}\right)} \quad (2.11)$$

El error medio cuadrático entre cada curva con $\{\sigma_L^1, \sigma_L^2, \dots, \sigma_L^j, \dots, \sigma_L^M\}$ y los valores experimentales se determina con las diferencias, para cada F_i , entre el valor de σ_i^j y el σ_i , este último valor experimental

$$\delta\sigma_i^j = \sigma_i - \sigma_i^j$$

$$\Delta^2(\delta\sigma^j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma_i^j)^2 \quad (2.12)$$

El mínimo $\Delta^2(\delta\sigma^j)$ nos da el σ_L buscado como se ve en las figuras 4 y 5.

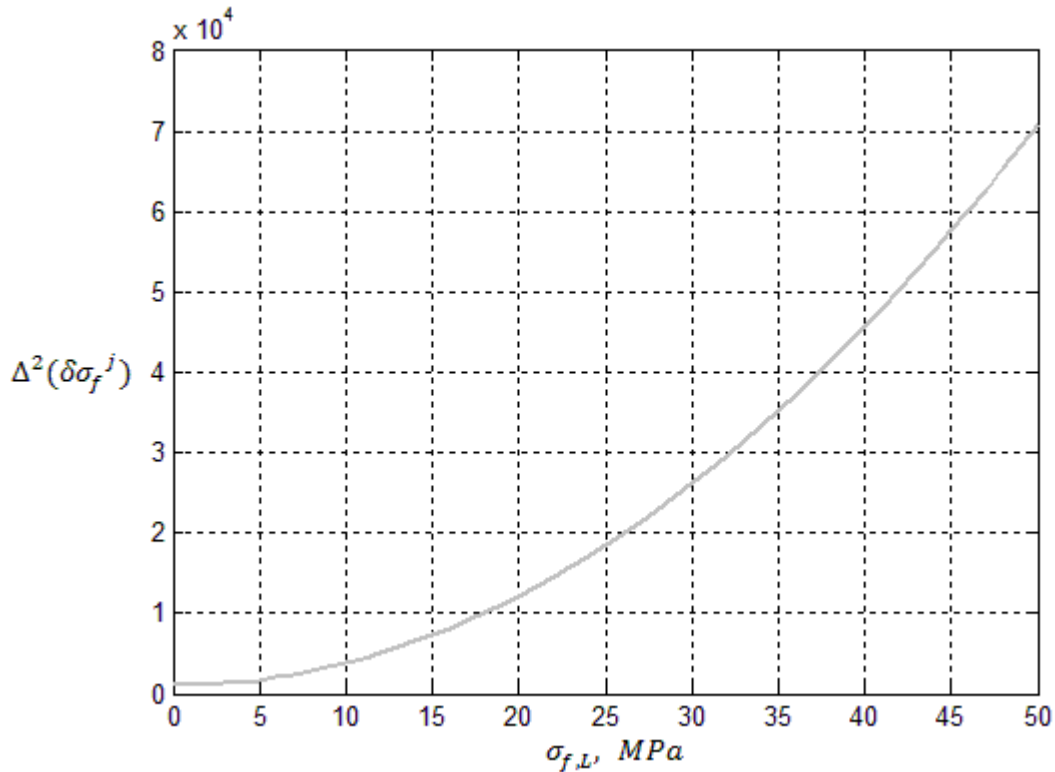


Figura 4. Determinación del parámetro $\sigma_{f,L}$ de la fluencia del acero, $\sigma_{f,L} = 0$ MPa.

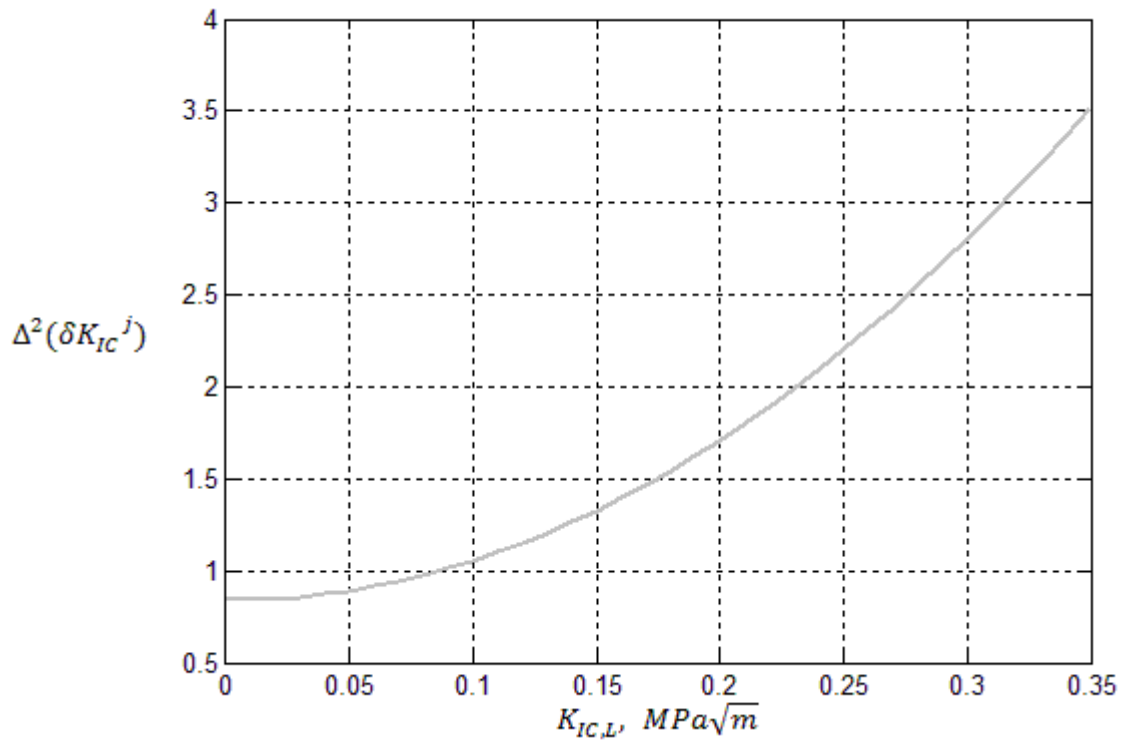


Figura 5. Determinación del parámetro $K_{IC,L}$ del cobre, $K_{IC,L} = 0 MPa\sqrt{m}$.

3. CÁLCULO DE LA DISEPERSIÓN DE LOS PARÁMETROS

Para obtener con que error se determinaron los parámetros de Weibull m , σ_0 y σ_L , se pueden usar dos caminos. El primero sería hacer un gran número de experiencias, digamos MN y para cada grupo de N^j de ellas determinar m^j , σ_0^j y σ_L^j con sus valores medios y sus dispersiones. Esto es bastante costoso, si se partió con 30 ensayos se harían 30 experiencias de 30 ensayos cada una, con lo cual habría que hacer un total de 900 ensayos, con un alto costo en tiempo y trabajo. El otro camino más rápido y económico es el de la simulación numérica, también llamado método de Montecarlo.

Para la simulación se determina un conjunto M de N números aleatorios.

$$\{0 \leq \mu_i^j \leq 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (3.1)$$

Estos números aleatorios se igualan a los F_i^j con los cuales se calculan los σ_i^j que corresponden

$$\mu_i^j = F_i^j = 1 - \exp \left[\left(\frac{\sigma_i^j - \sigma_L}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (3.2)$$

Para determinar los σ_i^j se usan los parámetros que se obtuvieron en la sección 2. Así obtenemos

$$\sigma_i^j = \sigma_L + \sigma_0 \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \mu_i^j} \right) \right]^{1/m} \quad (3.3)$$

Cada grupo $\{\sigma_i^j\}$ se determinan con el método desarrollado antes los parámetros m^j , σ_0^j y σ_L^j , del conjunto $\{m^j, \sigma_0^j, \sigma_L^j\}$ se calculan los valores medios y sus dispersiones. Los resultados se presentan en la tabla 2.

Como cada parámetro engendra 3 curvas $\bar{m} \pm \Delta m$, $\bar{\sigma}_0 \pm \Delta \sigma_0$ y $\bar{\sigma}_L \pm \Delta \sigma_L$, o sea:

$$\begin{array}{lll} \bar{m}, & \bar{m} + \Delta \bar{m}, & \bar{m} - \Delta \bar{m}; \\ \bar{\sigma}_0, & \bar{\sigma}_0 + \Delta \bar{\sigma}_0, & \bar{\sigma}_0 - \Delta \bar{\sigma}_0; \\ \bar{\sigma}_L, & \bar{\sigma}_L + \Delta \bar{\sigma}_L, & \bar{\sigma}_L - \Delta \bar{\sigma}_L; \end{array} \quad (3.4)$$

Tabla 2. Los parámetros y sus dispersiones.

Parámetro	Promedio	Dispersión
σ_f		
$m(\sigma_f)$	26.6	6.5
$\sigma_{f,0}, MPa$	578.3	4.8
$\sigma_{f,L}, MPa$	6.7	13.7
K_{IC}		
$m(K_{IC})$	42.32	7.95
$K_{IC,0}, MPa\sqrt{m}$	19.06	0.10
$K_{IC,L}, MPa\sqrt{m}$	0.08	0.13

Por lo tanto se pueden trazar $3 \times 3 \times 3 = 27$ curvas que encierran los valores que se pueden obtener para un nuevo conjunto de muestras del mismo origen. La probabilidad de que una muestra esté dentro de esa zona se obtiene a partir de la distribución de errores x o apartamientos de la media. Esa distribución está dada por la función de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (3.5)$$

Por lo tanto se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx = 1 \quad (3.6)$$

El valor medio es

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx = 0 \quad (3.7)$$

El valor medio cuadrático es

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \quad (3.8)$$

La dispersión

$$(\Delta x)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{2}, \quad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071 \quad (3.9)$$

La probabilidad de que un evento ocurra en el intervalo $[-\Delta, +\Delta]$ es

$$P(\Delta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.7071} e^{-x^2} dx \approx 0.683 = 68.3\% \quad (3.10)$$

La probabilidad de que ocurra en el intervalo $[-2\Delta, +2\Delta]$ es

$$P(2\Delta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1.4142} e^{-x^2} dx \approx 0.954 = 95.4\% \quad (3.11)$$

Si trazamos las curvas (3.4) para σ_f y K_{IC} se tiene una zona donde la ocurrencia es de 68.3%, si queremos más seguridad y usamos $\pm 2\Delta$ se puede tener una seguridad del 95.4%. En las figuras 6, 7, 8 y 9 se pueden ver la forma que tienen las curvas.

Si se toman logaritmos en la ecuación (1.1) se obtiene

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right] = m \cdot \ln(\sigma - \sigma_L) - m \cdot \ln(\sigma_0) \quad (3.12)$$

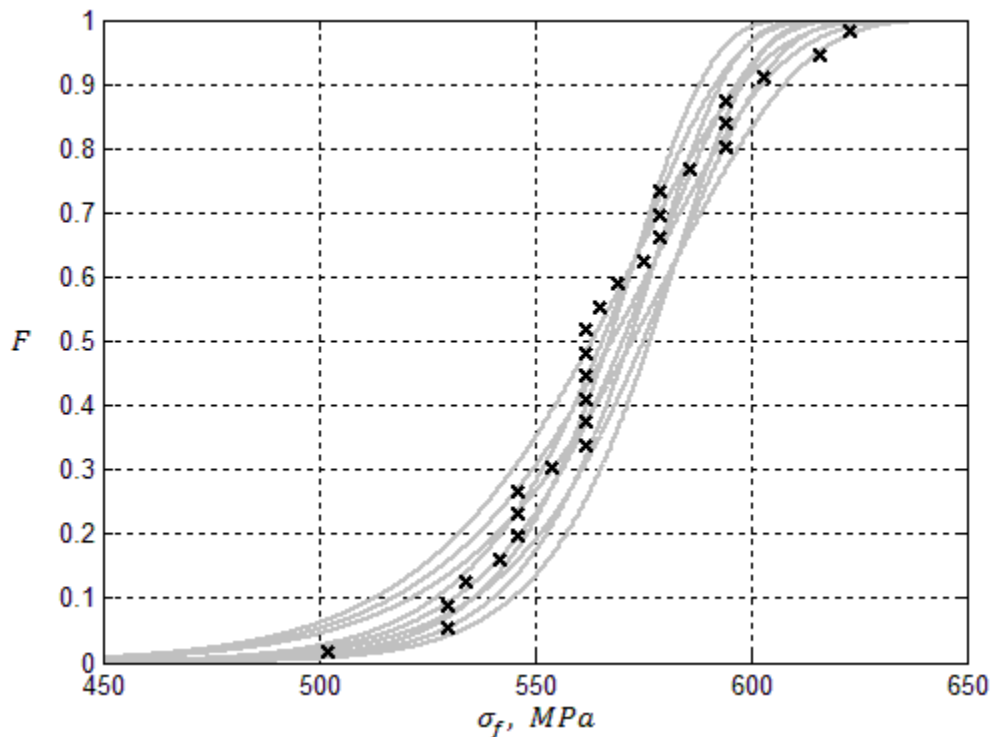


Figura 6. Curvas de probabilidad acumulativa de la tensión de fluencia del acero para los parámetros más y menos su dispersión.

La expresión (3.12) permite una representación lineal en función de $\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right]$ y $\ln(\sigma - \sigma_L)$.

Si se quiere encontrar la tensión de fluencia o la tenacidad crítica para un valor de probabilidad de falla acumulativa dado F_c hay que tomar de la intersección de la recta $F = F_c$ con las curvas, la que da el valor de σ_f y K_{IC} menor, que es la que dará el valor correcto. Para valores muy pequeños de F_c se debe usar los gráficos logarítmicos.

Eventualmente, si hay puntos (F, σ) que salen de la zona de las curvas, pueden eliminarse, por ser poco probables, y rehacer los cálculos sin ellos. En el presente caso, como el apartamiento casi no existe, el eliminar dichos puntos altera muy poco los cálculos y se deja de lado. En los gráficos presentados en las figuras 6, 7, 8 y 9 no hay 27 curvas, sino 9 porque la influencia de σ_L es muy pequeña y no hay diferencia en los gráficos entre $\sigma_L + \Delta\sigma_L$ y $\sigma_L - \Delta\sigma_L$, los σ son genéricos para σ_f y K_{IC} .

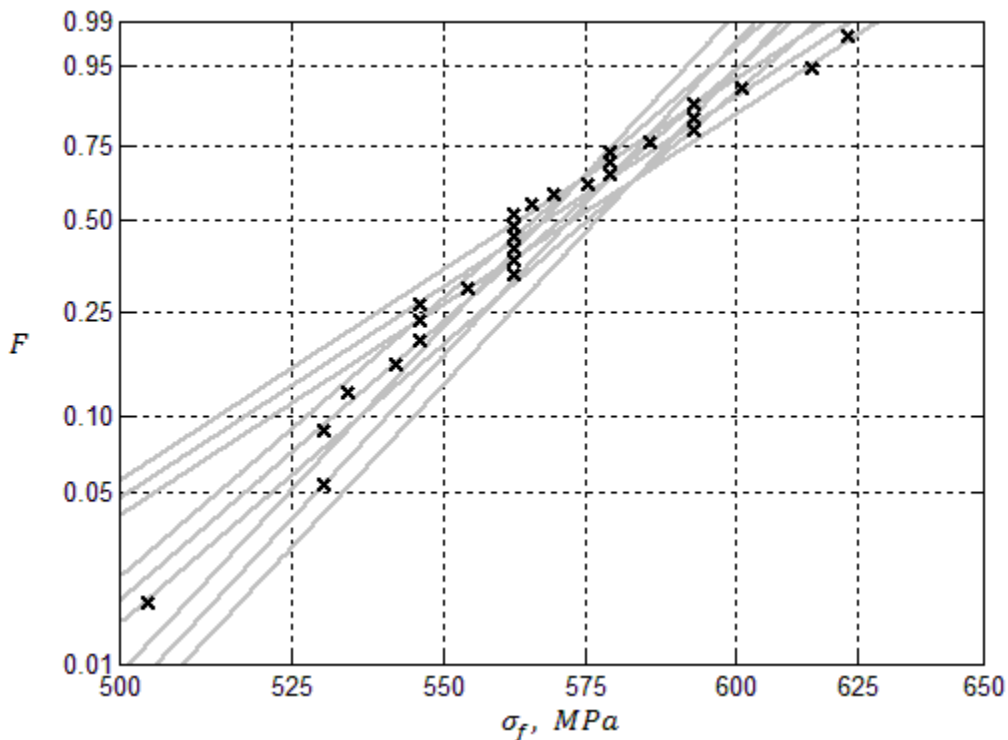


Figura 7. Representación logarítmica de la figura 6.

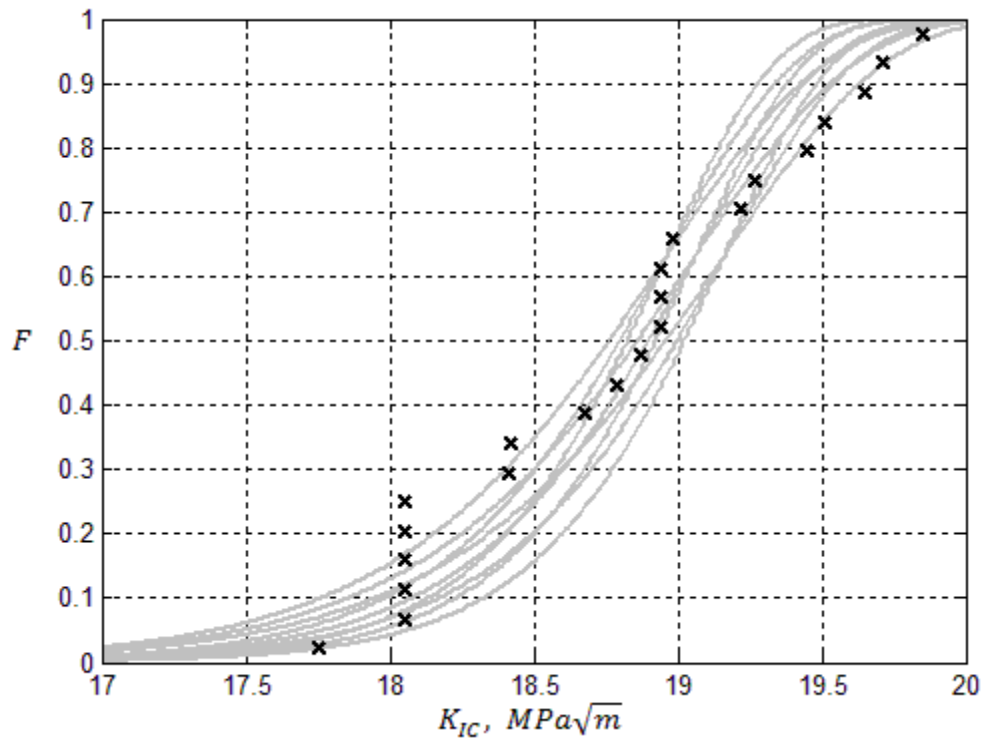


Figura 8. Curvas de probabilidad acumulativa de la tenacidad crítica del cobre para los parámetros más y menos su dispersión.

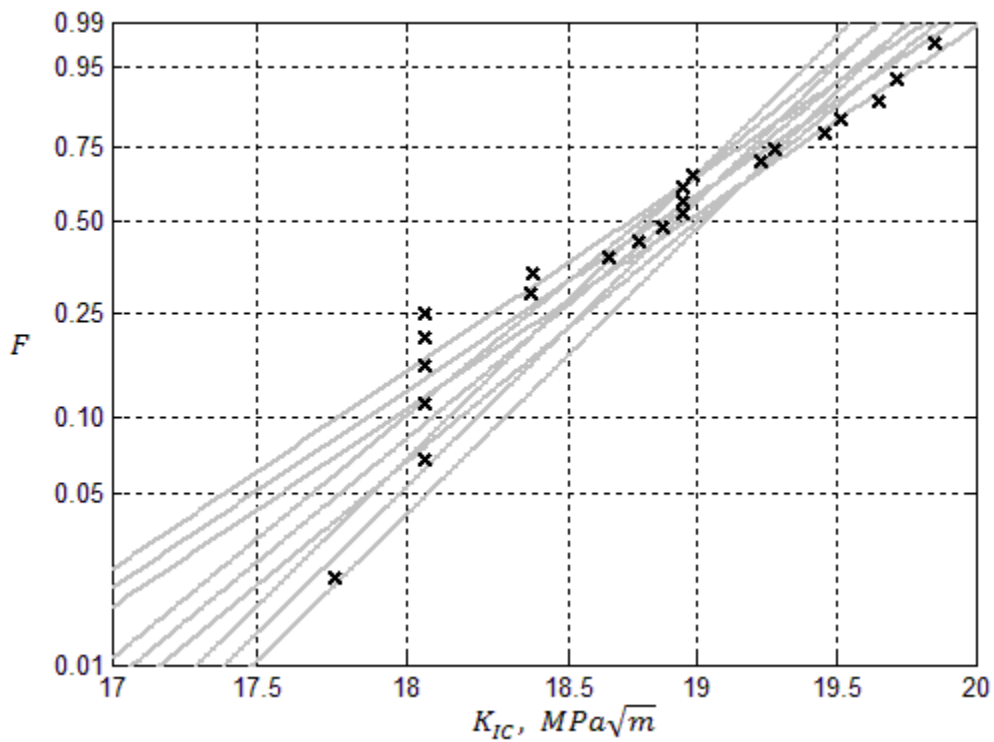


Figura 9. Representación logarítmica de la figura 8.

4. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Como se hizo anteriormente la expresión de la probabilidad acumulativa de Weibull se puede linealizar

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[-\frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_0} \right)^m \right], \quad \sigma \geq \sigma_L \quad (4.1)$$

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1 - F(\sigma)} \right) \right] = m \cdot \ln(\sigma - \sigma_L) - m \cdot \ln(\sigma_0) + \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) \quad (4.2)$$

El término $\ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$ pone de manifiesto la dependencia del volumen, tomando como ejes coordenados $\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1 - F(\sigma)} \right) \right]$ y $\ln(\sigma - \sigma_L)$, la ecuación (4.2) se representa como una recta y el término $\ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$ la desplaza de forma paralela a si misma dependiendo si $V \lesseqgtr V_0$. En nuestro caso $\frac{V}{V_0} = 1$. Los valores de F están dados por $F_i = \frac{i-1/2}{N}$ y los correspondientes σ son medidas experimentales. Para determinar los valores de m , σ_0 y σ_L se procede por aproximaciones sucesivas tomando primeramente $\sigma_L = 0$. Llamamos a

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1 - F_i} \right) \right] = y_i, \quad \ln(\sigma_i - \sigma_L) = x_i, \quad F_i = \frac{i - 1/2}{N} \quad (4.3)$$

Las ecuaciones del sistema de medidas es

$$y_i = a \cdot x_i + b, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.4)$$

Como se ve hay muchos más valores de (x_i, y_i) que coeficientes, que son sólo a y b . Para determinarlos se trata de hacer mínimo la suma del cuadrado de las diferencias entre los pares (x_i, y_i) y los valores que toma la ecuación con a y b buscados.

$$E = \sum_{i=1}^N [y_i - (a \cdot x_i + b)]^2 = \text{mínimo} \quad (4.5)$$

Las condiciones son

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2 \cdot \left[\sum_{i=1}^N y_i - \left(a \cdot N + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i \right) \right] = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2 \cdot \left[\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - \left(a \cdot \sum_{i=1}^N x_i + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \right] = 0$$

De donde

$$a = \frac{N \cdot (\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i) - (\sum_{i=1}^N x_i) \cdot (\sum_{i=1}^N y_i)}{N \cdot (\sum_{i=1}^N x_i^2) - (\sum_{i=1}^N x_i)^2} \quad (4.7)$$

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^N x_i) \cdot (\sum_{i=1}^N y_i) - (\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i)(\sum_{i=1}^N x_i)}{N \cdot (\sum_{i=1}^N x_i^2) - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}$$

La forma de proceder es para diferentes $\{\sigma_L \leq \sigma_i\}$, determinar los valores de a y b que hacen mínimo el error E y por lo tanto los de m y σ_0 y dados los $\{\sigma_L\}$ obtener el “mínimo minimorum” de E . En los casos tratados se obtuvo resultados concordantes con los del punto 2. Se calculan los coeficientes de determinación R^2 en cada uno de los casos. Los resultados se presentan en las figuras 10 y 11.

Tabla 3. Parámetros según los métodos utilizados.

Parámetro	Método de los Momentos	Mínimos Cuadrados
$m(\sigma_f)$	25.9 ± 6.5	24.7 ± 6.5
$\sigma_{f,0}, MPa$	578.2 ± 4.8	575.8 ± 4.8
$\sigma_{f,L}, MPa$	0.0 ± 13.7	0.0 ± 13.7
$m(K_{IC})$	39.25 ± 7.95	34.95 ± 7.95
$K_{IC,0}, MPa\sqrt{m}$	19.08 ± 0.10	19.10 ± 0.10
$K_{IC,L}, MPa\sqrt{m}$	0.08 ± 0.13	0.08 ± 0.13

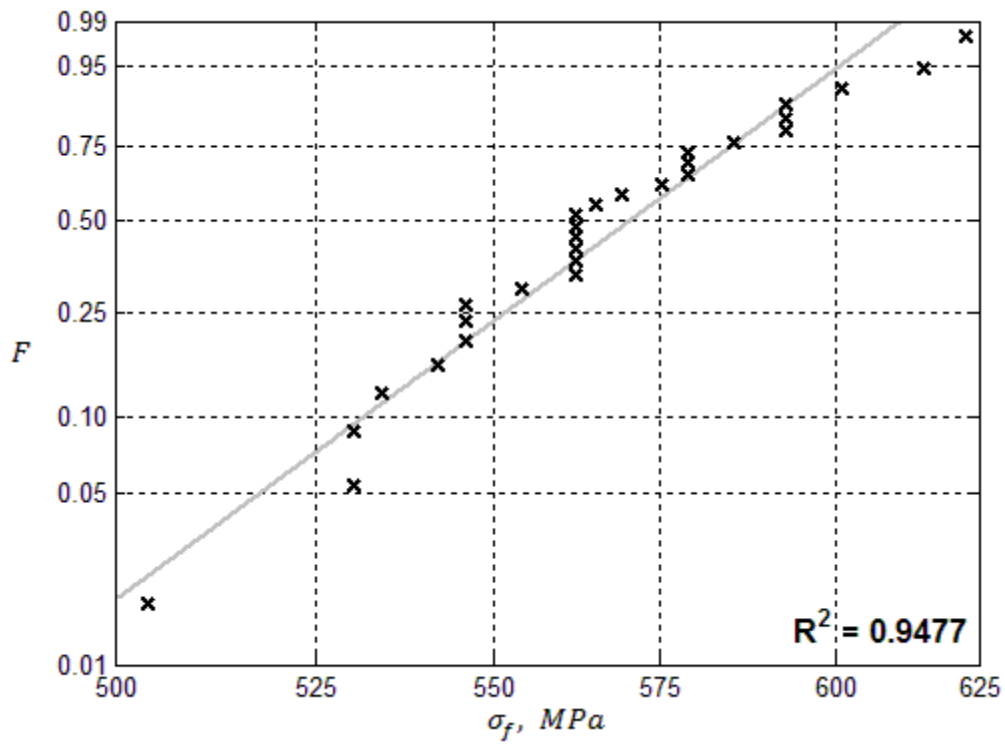


Figura 10. Ajuste de datos con el método de mínimos cuadrados para $\sigma_{f,L}$ nulo.

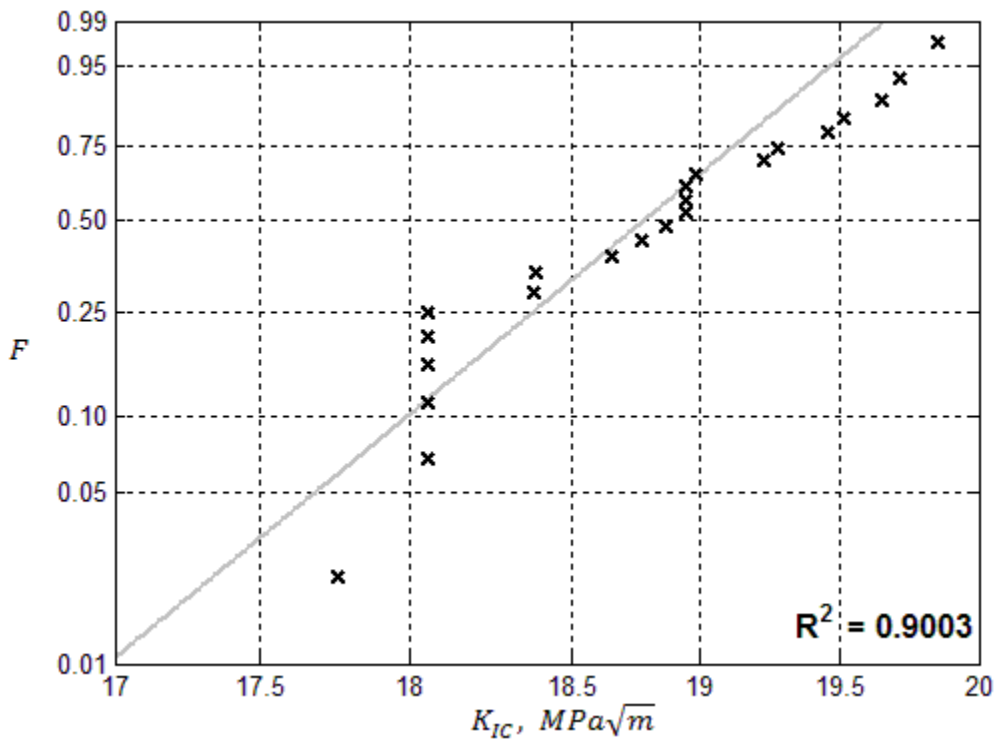


Figura 11. Ajuste de datos con el método de mínimos cuadrados para $K_{IC,L}$ nulo.

5. NÚMERO DE ENSAYOS NECESARIOS

Siempre que se fija una probabilidad acumulativa de diseño F_c hay que fijar una tolerancia δF , sino se corre el riesgo de que ningún conjunto de materiales pueda para un cierto σ_c , obtenido de los parámetros previos y F , pueda satisfacer el F_c . Para ello hay que determinar en función de F y δF los valores de δm , $\delta \sigma_0$ y $\delta \sigma_L$ dentro de cuyo rango la probabilidad acumulativa estará dentro del intervalo $(F, F + \delta F)$. Es fácil ver que se establecen las siguientes ecuaciones.

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right] = m \cdot \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_0} \right) \quad (5.1)$$

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-(F+\delta F)} \right) \right] = (m + \delta m) \cdot \ln \left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_0} \right)$$

$$\left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right]^{1/m} = \left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_0} \right) \quad (5.2)$$

$$\left[\ln \left(\frac{1}{1-(F+\delta F)} \right) \right]^{1/m} = \left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_0 + \delta \sigma_0} \right)$$

$$\left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right]^{1/m} = \left(\frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_0} \right) \quad (5.3)$$

$$\left[\ln \left(\frac{1}{1-(F+\delta F)} \right) \right]^{1/m} = \left(\frac{\sigma - (\sigma_L + \delta \sigma_L)}{\sigma_0} \right)$$

A partir de las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3) se obtiene que las variaciones δm , $\delta \sigma_0$ y $\delta \sigma_L$ compatibles con δF

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-(F+\delta F)} \right) \right]}{\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right]} - 1$$

$$\frac{\delta \sigma_0}{\sigma_0} = \left[\frac{\ln \left(\frac{1}{1-F} \right)}{\ln \left(\frac{1}{1-(F+\delta F)} \right)} \right]^{1/m} - 1 \quad (5.4)$$

$$\frac{\delta\sigma_L}{\sigma - \sigma_L} = 1 - \left[\frac{\ln \left(\frac{1}{1 - (F + \delta F)} \right)}{\ln \left(\frac{1}{1 - F} \right)} \right]^{1/m}$$

En las fórmulas (5.4) hay que tener en cuenta δF positivo y el valor $-\delta F$ obviamente no cuenta.

A partir de la matriz de Fischer, se obtiene que las dispersiones Δm , $\Delta\sigma_0$ y $\Delta\sigma_L$ obedecen la ley

$$\begin{aligned} \Delta m &= \frac{1}{\sqrt{N}} f(m, \sigma_0, \sigma_L) \\ \Delta\sigma_0 &= \frac{1}{\sqrt{N}} g(m, \sigma_0, \sigma_L) \\ \Delta\sigma_L &= \frac{1}{\sqrt{N}} h(m, \sigma_0, \sigma_L) \end{aligned} \quad (5.5)$$

De la misma manera

$$\begin{aligned} \delta m &= \frac{1}{\sqrt{N_m}} f(m, \sigma_0, \sigma_L) \\ \delta\sigma_0 &= \frac{1}{\sqrt{N_{\sigma_0}}} g(m, \sigma_0, \sigma_L) \\ \delta\sigma_L &= \frac{1}{\sqrt{N_{\sigma_L}}} h(m, \sigma_0, \sigma_L) \end{aligned} \quad (5.6)$$

De las ecuaciones (5.5) y (5.6) se obtiene

$$\begin{aligned} N_m &= N \cdot \left(\frac{\Delta m}{\delta m} \right)^2 \\ N_{\sigma_0} &= N \cdot \left(\frac{\Delta\sigma_0}{\delta\sigma_0} \right)^2 \\ N_{\sigma_L} &= N \cdot \left(\frac{\Delta\sigma_L}{\delta\sigma_L} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Si hacemos $F = 10^{-7}$ y $F + \delta F = 10^{-6}$ los valores obtenidos en los dos casos son

$$\sigma_{f,c} = 339 \text{ MPa} \left\{ \begin{array}{l} m(\sigma_f) = 25.9, \delta m(\sigma_f) = 3.7, N_m(\sigma_f) = 87 \\ \sigma_{f,0} = 578.2 \text{ MPa}, \delta \sigma_{f,0} = 49.2 \text{ MPa}, N_{\sigma_{f,0}} = 1 \\ \sigma_{f,L} = 0.0 \text{ MPa}, \delta \sigma_{f,L} = 31.5 \text{ MPa}, N_{\sigma_{f,L}} = 6 \end{array} \right. \quad (5.8)$$

$$K_{IC,c} = 13.4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \left\{ \begin{array}{l} m(K_{IC}) = 39.25, \delta m(K_{IC}) = 5.61, N_m(K_{IC}) = 45 \\ K_{IC,0} = 19.08 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}, \delta K_{IC,0} = 1.09 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}, N_{K_{IC,0}} = 1 \\ K_{IC,L} = 0.00 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}, \delta K_{IC,L} = 0.81 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}, N_{K_{IC,L}} = 1 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Debe tomarse el mayor de los valores de $N_m, N_{\sigma_0}, N_{\sigma_L}$ en (5.8) y (5.9), con lo que se obtiene $N_{\sigma_f} = 87$ y $N_{K_{IC}} = 45$ como número de probetas a ensayar.

6. PRECISIÓN NECESARIA EN LOS ENSAYOS

Lo último que queda por averiguar es con qué precisión se deben hacer los ensayos para que todo lo anterior sea válido. Es decir, que es necesario que los errores de los ensayos no enmascaren las fluctuaciones en las propiedades del material. Definimos el error que podemos apreciar como la diferencia entre el valor experimental σ_{ie} y el ajustado σ_{ia} para cada F_i .

$$\delta\sigma_i = \sigma_{ie} - \sigma_{ia} \quad (6.1)$$

Esos errores tienen un valor medio $\overline{\delta\sigma}$ y una dispersión

$$\begin{aligned} \overline{\delta\sigma} &= \overline{\sigma_{ie} - \sigma_{ia}} = 0 \\ \Delta(\delta\sigma) &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \delta\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

En el primer caso de (6.2) el valor medio de $\delta\sigma_i$, o sea, $\overline{\delta\sigma} = 0$, debido a que son igualmente probables tanto los valores positivos como los negativos. Los $\delta\sigma_i$, entonces, obedecen a la distribución de Gauss

$$f(\delta\sigma) = \frac{1}{\Delta(\delta\sigma)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta\sigma^2}{\Delta(\delta\sigma)^2}\right) \quad (6.3)$$

La probabilidad total acumulada de (6.3) es 1, como es fácil ver

$$\begin{aligned} F(\infty) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta\sigma) d(\delta\sigma) = 1 \\ x &= \frac{\delta\sigma}{\Delta(\delta\sigma) \cdot \sqrt{2}}, \quad d(\delta\sigma) = dx \Delta(\delta\sigma)\sqrt{2} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

La probabilidad acumulativa $\delta\sigma$ es

$$F(\delta\sigma) = \int_{-\infty}^{\delta\sigma} f(\delta\sigma) d(\delta\sigma) = \int_{-\infty}^0 f(\delta\sigma) d(\delta\sigma) + \int_0^{\delta\sigma} f(\delta\sigma) d(\delta\sigma) \quad (6.5)$$

Con el cambio de variable usado en (6.4)

$$F(\delta\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta\sigma/\Delta(\delta\sigma)\sqrt{2}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\delta\sigma}{\Delta(\delta\sigma)\sqrt{2}} \right) \quad (6.6)$$

Donde la función $\operatorname{erf}(x)$ está caracterizada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \quad (6.7)$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0, \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1, \quad \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$$

Simulamos una serie de errores en M ensayos con una distribución en base a un $\Delta(\delta\sigma)$ y con el conjunto $\{0 \leq \mu_i^j \leq 1\}$ con $i = 1, 2, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, M$ se obtiene un conjunto $\{\delta\sigma_i^j\}$ debido a que se hace $F(\delta\sigma_i^j) = \mu_i^j$ y mediante (6.6) se obtiene $\{\delta\sigma_i^j\}$.

$$\{\mu_i^j\} \text{ y } \Delta(\delta\sigma) \Rightarrow \mu_i^j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\delta\sigma_i^j}{\Delta(\delta\sigma)\sqrt{2}} \right) \quad (6.8)$$

$$\{\delta\sigma_i^j\} \Rightarrow \{\sigma_i - \delta\sigma_i^j\}$$

Con cada conjunto $\{\delta\sigma_i^j\} \Rightarrow \{\sigma_i - \delta\sigma_i^j\}$ se obtienen valores de m^j, σ_0^j y σ_L^j , o sea, $\{m^j, \sigma_0^j, \sigma_L^j\}$. Si en función de $\frac{\Delta(\delta\sigma)}{\bar{\sigma}}$ obtenemos m^j, σ_0^j y σ_L^j el valor de $\frac{\Delta(\delta\sigma)}{\bar{\sigma}}$ para el que $m - \Delta m \leq m^j \leq m + \Delta m$, $\sigma_0 - \Delta\sigma_0 \leq \sigma_0^j \leq \sigma_0 + \Delta\sigma_0$ y $\sigma_L - \Delta\sigma_L \leq \sigma_L^j \leq \sigma_L + \Delta\sigma_L$, nos da para el menor de los tres $\frac{\Delta(\delta\sigma)}{\bar{\sigma}}$, el $\Delta(\delta\sigma)$ admisible. Luego el error $\delta\sigma$ siempre debe ser menor al $\Delta(\delta\sigma)$ menor de los $\Delta(\delta\sigma)$. En las figuras 12, 13, 14 y 15 se presentan los resultados de estos cálculos. No se presentan los gráficos para el parámetro σ_L en cada uno de los casos debido a que su influencia es muy pequeña.

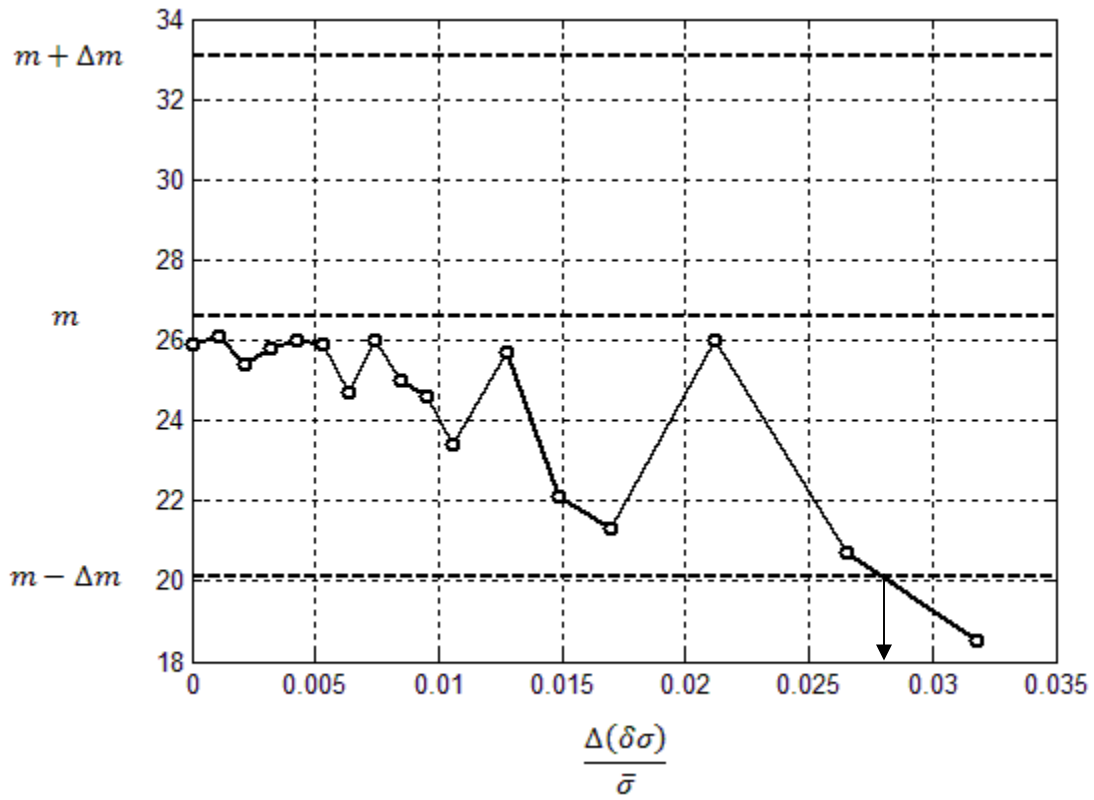


Figura 12. Parámetro $m(\sigma_f)$ en función del error específico de medición.

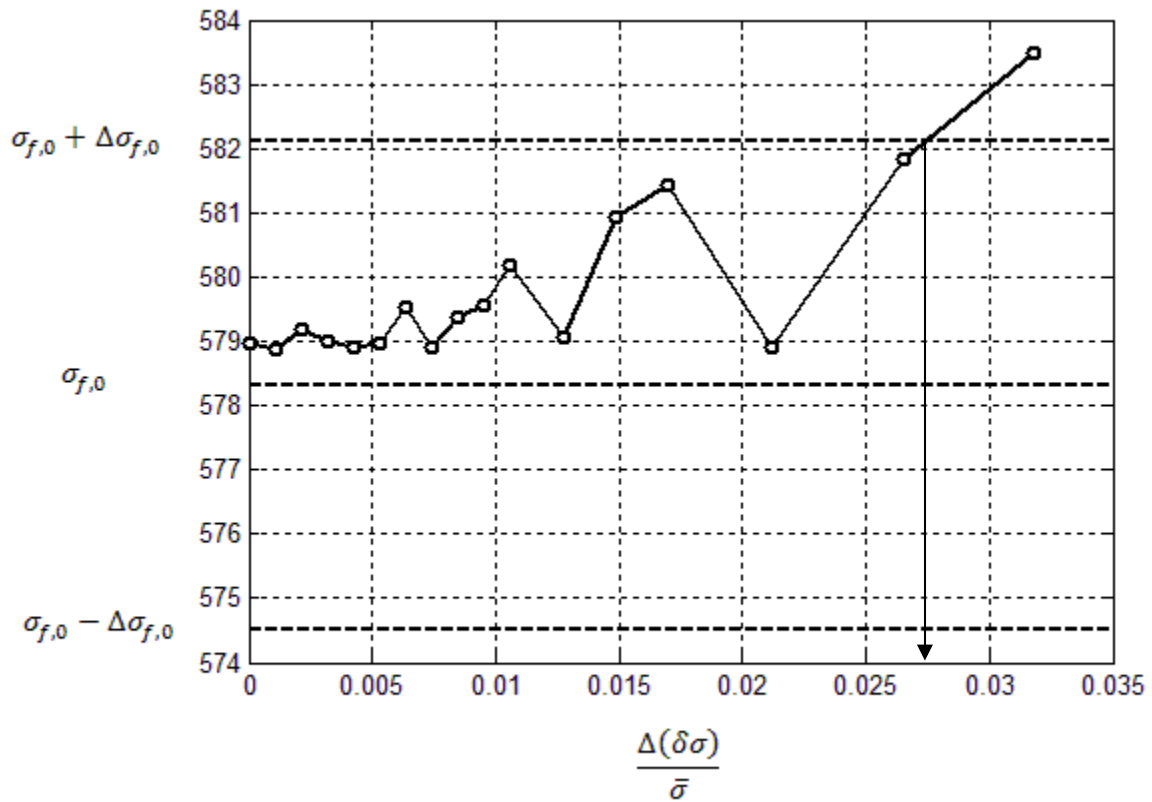


Figura 13. Parámetro $\sigma_{f,0}$ en función del error específico de medición.

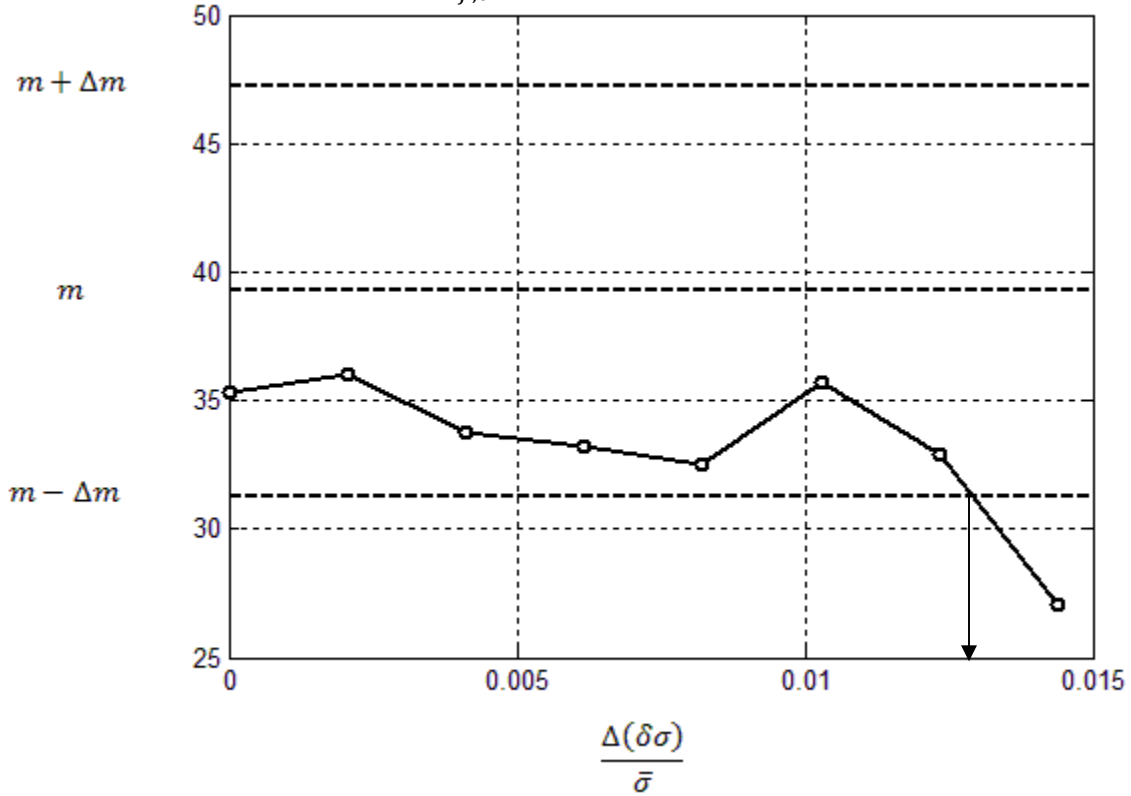


Figura 14. Parámetro $m(K_{IC})$ en función del error específico de medición.

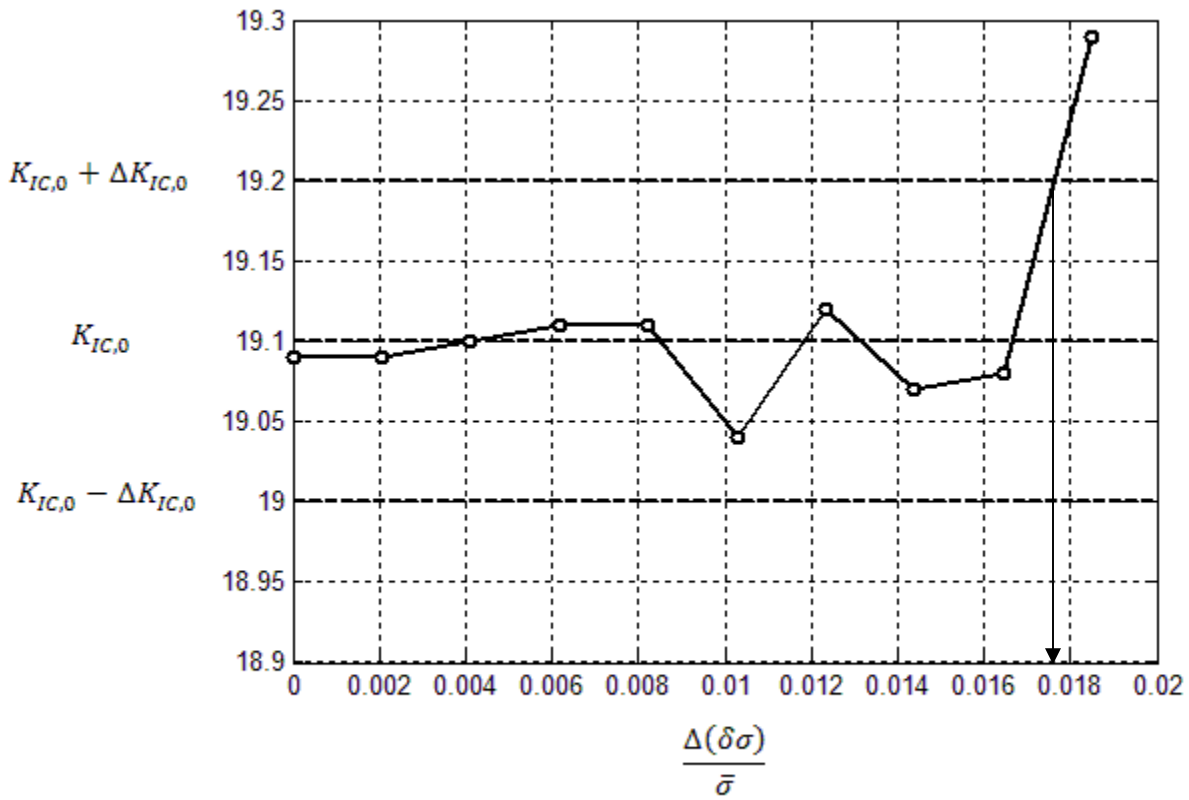


Figura 15. *Parámetro $K_{IC,0}$ en función del error específico de medición.*

7. CONCLUSIONES

Con los cálculos desarrollados en este trabajo, podemos establecer los siguientes pasos para un procedimiento de diseño:

1. Se elige un material y se dan la probabilidad de falla F y la tolerancia δF .
2. Se ensaya un número relativamente pequeño de N probetas, por ejemplo un número entre 10 y 30.
3. Con el resultado de los ensayos se determinan los parámetros m , σ_0 y σ_L y sus dispersiones con el método de la simulación. Eventualmente se eliminan los puntos que están fuera de la banda $\bar{m} \pm \Delta m$, $\bar{\sigma}_0 \pm \Delta\sigma_0$ y $\bar{\sigma}_L \pm \Delta\sigma_L$ y se vuelve a determinar m , σ_0 y σ_L .
4. Con los valores de F , δF , N , Δm , $\Delta\sigma_0$ y $\Delta\sigma_L$ se puede determinar el número de ensayos necesarios para determinar los parámetros cuya dispersión de un valor F' tal que $F' \leq F + \delta F$, y la precisión de las medidas.
5. De lote de material que se usará definitivamente se ensayan el número de muestras determinado en el punto 4. Se determinan los parámetros y para el F dado, se encuentra el σ_c de cálculo.
6. Por seguridad se puede repetir el proceso desde los puntos 1 a 4 y si todo concuerda, los resultados serán definitivos.

Los métodos que se han usado son los más prácticos. Otros métodos de la estadística pura que se supone son más exactos, son de elaboración más compleja, aunque finalmente dan el mismo resultado.

8. BIBLIOGRAFÍA

1. Kittl, P. y Díaz, G., Weibull's fracture statistics or probabilistic Strength of Materials State of the Art, Res Mechanica, 24 (1988) 99-2007.
2. Kittl, P., Rosales, M. y Díaz, G., Métodos computacionales de la resistencia probabilística de Materiales, Ciencia Abierta 13 (2001), <http://cabierta.uchile.cl/revista/7/flaw.htm>.
3. Díaz, G., Kittl, P., y Rosales, M., Probabilistic design and quality control in probabilistic strength of materials, International Journal of Solids and Structures, 40 (2003) 5001-5015.
4. Elgueta, M., Kittl, P., Probabilistic control of materials by a simulation method, Materials and Design, 28 (2007) 1919-1922.
5. Elgueta, M., Díaz, G., Zamorano, S., Kittl, P., On the use of Weibull and the normal acumulative probability models in structural design, Materials and Design, 28 (2007) 2496-2499.
6. Kittl, P. y Díaz, G., Introducción a los problemas de diseño en la resistencia probabilística de materiales e ingeniería, 1 (2009), <http://ing.umt.cl/docs/statistics.pdf>.
7. Díaz, G., Kittl, P., Artigas, A. y Martínez, V., A statistical analysis of mechanical properties and size effect in AISI 1020 and AISI 1045 steels subjected to traction, Applied Mechanics in the Americas, V6, pp 463-466, edited by H.I. Weber, P.B. Gonsalvez, I. Jasiuk, D. Pamplona, C. Steele and L. Bevilaqua, Published by AAA and ABCM, Río de Janeiro, Brasil, 1999.
8. Artigas, A., Estudio estadístico de propiedades mecánicas a la tracción en aceros trefilados SAE-1020 y SAE-1045, Memoria para optar al título de ingeniero civil mecánico, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 1997.
9. Meneses, C., Propiedades mecánicas de barras de cobre trefilado y sistema paralelo de fractura: un estudio probabilístico. Memoria para optar al título de ingeniero civil mecánico, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 1998.