MODELO SIMPLE DE UNIVERSO CÍCLICO COMO EXTENSIÓN A LA CELDA GENERALIZADA DE PLANCK

P. Kittl

Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
Casilla 2777, Correo 21, Santiago, Chile

G. Díaz

Departamento de Ciencia de los Materiales
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
Casilla 2777, Correo 21, Santiago, Chile
Email: gediaz@ing.uchile.cl

RESUMEN: Se muestra como a la celda originaria de Planck de donde se deducen las unidades mínimas de longitud, masa y tiempo y la máxima de temperatura, se le puede introducir calor, radiación y electricidad cambiando esas unidades. Se desarrolló con anterioridad un universo cíclico con sólo gravitación y energía cinética de acuerdo a la celda originaria de Planck, ahora se le agregan las otras energías determinando su influencia en el radio de curvatura máximo del universo y su semi-período. El resultado es que de acuerdo a las hipótesis que usamos casi no hay influencia, así es que la cinética del universo está influenciada sólo por su contenido en materia. El radio actual de curvatura del universo es $R \geq 10^{28}$ cm, su densidad es $\rho \leq 10^{-30}\, gcm^{-3}$ y su edad es $\geq 10.000 \times 10^{6}$ años. El universo es periódico y la introducción de otras energías y el porcentaje de materia oscura produce, en nuestra teoría, universos semejantes donde sólo varía un poco R, el radio máximo de curvatura R_m y el periodo T en la misma proporción. Tanto R_m como T aumentan $\leq$ 1,7 veces con respecto al modelo que sólo tiene materia. Este modelo se puede definir como un sistema aislado con materia, radiación, calor y electricidad, y con energía total nula.

1. <u>LA CELDA DE PLANCK</u>

En 1906 – 07 Planck determinó las unidades l_0 de longitud, m_0 de masa, t_0 de tiempo y θ_0 de temperatura en que las constantes universales, velocidad c de la luz, f de atracción universal de Newton, h constante de Planck y k de Boltzman fuera uno (1).

Así que tenemos en $cgsK$:

$$
\begin{aligned}
&c = 3\times10^{10}cms^{-1}, [c] = LT^{-1} \\
&f = 6.67\times10^{-8}cm^3g^{-1}s^{-2}, [f] = L^3M^{-1}T^{-2} \\
&h = 6.63\times10^{-27}cm^2gs^{-1}, [h] = L^2MT^{-1} \\
&k = 1.38\times10^{-16}cm^2gs^{-2}K, [k] = L^2MT^{-2}\theta^{-1}
\end{aligned}
\qquad (1,1)
$$

Donde el símbolo $[\ ]$ corresponde a las dimensiones de un valor en longitud L, masa M, tiempo T y temperatura θ. Los valores que encontró Planck (1,2) son:

$$
\begin{aligned}
&l_0 = c^{-3/2} f^{1/2} h^{1/2} \approx 4.04\times10^{-33}cm \\
&m_0 = c^{1/2} f^{-1/2} h^{1/2} \approx 5.46\times10^{-5}g \\
&t_0 = c^{-5/2} f^{1/2} h^{1/2} \approx 1.35\times10^{-43}s \\
&\theta_0 = c^{5/2} f^{-1/2} h^{1/2} k^{-1} \approx 3.56\times10^{32}K
\end{aligned}
\qquad (2,1)
$$

Expresados en el sistema c, g, s, K. Con esos valores de l_0, $m_{0,}$ t_0 y θ_0 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&c = 1.l_0t_0^{-1} \\
&f = 1.l_0^{\ 3}m_0^{\ -1}t_0^{\ -2} \\
&h = 1.l_0^{\ 2}m_0t_0^{\ -1} \\
&k = 1.l_0^{\ 2}m_0t_0^{\ -2}\theta_0
\end{aligned}
\qquad (3,1)
$$

En ese rango Planck expresa “Estas cantidades retendrán su significado mientras la ley de la gravitación, la de la propagación de la luz en el vacío y las dos principales leyes de la termodinámica sean válidas; ellas deben ser encontradas siempre las mismas, aunque se mida por las más diferentes inteligencias y los métodos más diversos".

Las expresiones de l_0, m_0, t_0 y θ_0 pueden obtenerse por el método dimensional (2) o mediante las siguientes igualdades:

$$\Delta \mathrm{E} = m_0 c^2 = \left| \frac{m_0^2 f}{l_0} \right| = k\theta_0 = h\upsilon_0, \quad \frac{l_0}{t_0} = c, \quad \frac{hc}{l_0} = h\upsilon_0 \qquad (4,1)$$

Las (4,1) significan que en esa celda la energía de masa $m_0 c^2$ es igual a la gravitatoria que aparece entre barras porque es negativa, a su vez igual a la térmica y a la de la radiación cuántica $hv_0 = \frac{hc}{t_0}$. La primera de estas igualdades puede expresarse como:

$$\mathrm{E} = m_0 c^2 - \frac{m_0}{l_0} f = 0 \qquad (5,1)$$

Lo que significa que en esas celdas las energías que se toman en cuenta son las de masa $m_0 c^2$ y la gravitatoria que son iguales y de signo contrario y por lo tanto su suma es cero. Las expresiones siguientes toman en cuenta la térmica y la de radiación cuántica.

$$\mathrm{E} = -\frac{m_0^2}{l_0} f + k\theta_0 = 0 \;, \qquad \mathrm{E} = -\frac{m_0^2 f}{l_0} + h\upsilon_0 = 0 \qquad (6,1)$$

Es decir, que no simultáneamente la celda contiene unas veces sólo la energía de masa, otras sólo la térmica y otras la de radiación para equilibrar la gravitatoria. La celda es alternativamente de masa, térmica y de radiación. <u>El objetivo de este trabajo es estudiar las consecuencias de ir introduciendo en la celda las diversas energías simultáneamente</u>.

2. <u>UNIVERSO COMO EXTENSIÓN A LA CELDA DE PLANCK MASIVA</u>

En trabajos anteriores (3 -10) desarrollamos un universo cíclico que contiene sólo energía de masa y gravitatoria. En ese universo se verifica.

$$\mathrm{E} = Mc^2 - \frac{M^2 f}{R} = 0 \qquad (1,2)$$

Donde M es la masa del universo y R el radio de curvatura de una esfera en el espacio de cuatro dimensiones en cuya superficie $2\pi^2 R^3$ está uniformemente distribuida la materia de densidad ρ Así que valiendo la relatividad restringida:

$$E = 2\pi^2 \rho R^3 = \frac{2\pi^2 \rho_0 R^3}{\sqrt{1 - \frac{\dot{R}^2}{c^2}}} \qquad (2,2)$$

Donde $\dot{R}$ es velocidad normal de la capa y ρ_0 la densidad del universo cuando $\dot{R} = 0$. En el sistema hay un tiempo absoluto, como en el primer universo de Einstein (6), de la (1,2) se obtiene:

$$\frac{M}{R} = \frac{c^2}{f} \qquad (3,2)$$

Que salvo un coeficiente próximo a uno fue obtenido por Einstein y que dice que cuando un universo tiene masa nula $R = 0$, por lo tanto no existe. Su espacio $2\pi^2 R^3$ desaparece. La (1,2) se transformen en:

$$c^2 - \frac{2\pi^2 \rho_0 f R^2}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}} \qquad (4,2)$$

La (4,2) permite obtener fácilmente el valor máximo de R, R_m

$$R_m = \frac{c}{\sqrt{2\pi^2 \rho_0 f}} \qquad (5,2)$$

La (4,2) es una ecuación diferencial que permite obtener la ecuación de la curva $t = t(R)$

$$t = \frac{R_m}{c} \int_0^{R/Rm} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = -\frac{R_m}{c} \int_{\pi/2}^{\phi = ar\cos R/Rm} \frac{d\phi}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2} sen^2\phi}} \qquad (6,2)$$

$$= \frac{R_m}{c\sqrt{2}} \int_{\phi}^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} sen^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{R_m}{c} \left[F\left(\theta = 45^\circ, \phi = 90^\circ\right) - F\left(\theta = 45^\circ, \phi = ar\cos R/Rm\right) \right]$$

Donde $F(\theta,\phi)$ es la integral elíptica de 2da. especie de Legendre, la (6,2) permite obtener el semi-período $T/2$

$$T/2 = \frac{R_m}{c}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{R_m}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\theta = 45^{o}, \phi = 90^{o}\right)$$

$$= \frac{R_m}{c}\frac{K(45^{o})}{\sqrt{2}} = \frac{R_m}{c}\frac{1.85407}{1.41421} \cong \frac{R_m}{c}1.31103 \qquad (7,2)$$

$$= \frac{R_m}{c}\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(1/4\right)\Gamma\left(1/2\right)}{\Gamma\left(3/4\right)}$$

Donde $K(\theta)$ es la integral elíptica completa de primera especie de Legendre.

Así que la relación entre el radio máximo R_m y el semi-período $T/2$ es:

$$T/2 = \frac{R_m}{c}1.3110 \qquad (8,2)$$

La (6,2) permite obtener la forma de evolución del universo, si representamos en las abscisas $t/(T/2)$ y en las ordenadas R/R_m, el universo parte expandiéndose a la velocidad de la luz, como es fácil ver. Si en la (6,2) hacemos $R = l_0$ y $t = t_0$ se obtiene $l_0/t_0 \cong c$. Luego sigue con una pendiente que se aparta poco de esa velocidad, alrededor de $R/R_m \approx 0.5$ la velocidad empieza a disminuir hasta anularse para $R = R_m$. No es extraño que si miramos al pasado, todas las galaxias que observamos no sólo se alejan (como corresponde a una esfera de cuatro dimensiones), sino que cuando están más lejanas lo hacen a mayor velocidad. Hay una aceleración. Si esto ocurre hemos llegado a un R/R_m próximo al máximo $R = R_m$. Nuestra ubicación probable está ubicado con un asterisco en la figura 1.

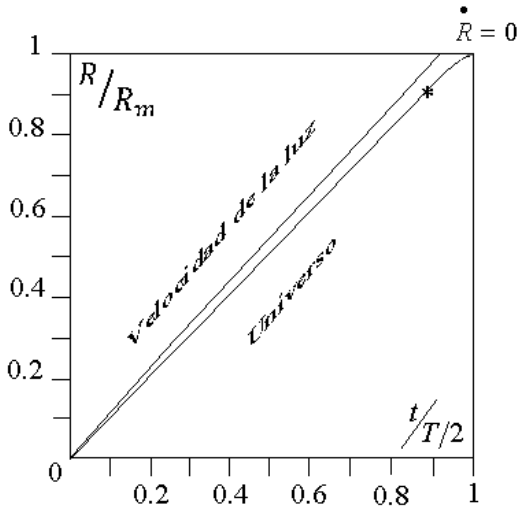

Fig. 1

Evolución del universo, nuestra ubicación probable está marcada por el asterisco

3. UNIVERSO COMO EXTENSIÓN DE UNA CELDA DE PLANCK TÉRMICA

Con contenido térmico la celda se caracteriza por las ecuaciones:

$$m_{01}c^2 - \frac{m_{01}^2 f}{l_{01}} + k\theta_{01} = 0 \ , \qquad \frac{l_{01}}{t_{01}} = c, \quad \upsilon_{01} = \frac{c}{t_{01}} \tag{1,3}$$

$$\frac{m_{01}^2}{l_{01}} f = 2m_{01}c^2 = 2k\theta_{01} = \frac{2ch}{l_{01}}$$

De las (1,3) se obtiene:

$$l_{01} = l_0 / \sqrt{2} \approx 2.86 \times 10^{-33} cm$$

$$m_{01} = m_0 \sqrt{2} \approx 7.72 \times 10^{-5} g \tag{2,3}$$

$$t_{01} = t_0 / \sqrt{2} \approx 9.54 \times 10^{-44} s$$

$$\theta_{01} = \theta_0 \sqrt{2} \approx 5.03 \times 10^{32} s$$

Para determinar la temperatura del universo suponemos que no hay pérdida en la cantidad de calor, o sea:

$$M\theta = m_{01}\theta_{01} = 2m_0\theta_0 \tag{3,3}$$

Si $k\theta_{01}$ corresponde al movimiento térmico en la dirección de R, debe ser proporcional a las partículas que se mueven en esa dirección. Esas partículas sólo pueden ser, según obtuvimos anteriormente, los gravitones (7,10). La masa total de ellos debe corresponder a lo que se denomina masa oscura, no detectable, sino que por sus efectos gravitatorios. Esta es $0{,}22M$ según las estimaciones fruto de las observaciones y nuestros trabajos teóricos (6,7).

La masa de un gravitón μ_0 es:

$$\mu_0 = \frac{h}{Rc} \qquad (4,3)$$

Esta masa coincide salvo un coeficiente poco diferente a uno con la obtenida por de Broglie (12). Así que el número de gravitones es:

$$N_1 = \frac{\alpha M}{\mu_0} = \frac{\alpha MRc}{h} \qquad (5,3)$$

Por lo tanto la energía térmica de los gravitones es:

$$N_1 k\theta = \frac{\alpha MRc}{h}\frac{m_{01}\theta_{01}k}{M} \qquad (6,3)$$

$$= \frac{\alpha ckm_{01}\theta_{01}}{h}R = \beta_1 R$$

Con: $\alpha = 0.22$:

$$\beta_1 = \frac{\alpha ckm_{01}\theta_{01}}{h} \approx 5.33\times 10^{48} cmgs^{-2} \qquad (7,3)$$

En el presente caso. La extensión de la (1,3) será entonces:

$$Mc^2 - \frac{M^2 f}{R} + N_1 k\theta = 0$$

O sea:

$$Mc^2 - \frac{M^2 f}{R} + \beta_1 R = 0 \qquad (8,3)$$

Reemplazando M por su igual según (2,2) se obtiene la ecuación diferencial de R en función de t.

$$c^2 - \frac{2\pi^2\rho_0 fR^2}{\sqrt{1-\dot{R}^2/c^2}} + \frac{\beta_1}{2\pi^2\rho_0 R^2}\sqrt{1-\dot{R}^2/c^2} = 0 \qquad (9,3)$$

El máximo Rm, de esta se obtiene con $\dot{R} = 0$

O sea:

$$c^2 - 2\pi^2 \rho_0 f R_{m_1}^2 + \frac{\beta_1}{2\pi^2 \rho_0 R_{m_1}^2} = 0 \qquad (10,3)$$

Que nos da:

$$R_{m_1} = \frac{c}{\sqrt{2\pi^2 \rho_0 f}} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta_1 f}{c^4}}} \qquad (11,3)$$

$$= R_m \gamma_1 = 1.153 R_m$$

Aquí:

$$\frac{\beta_1 f}{c^4} = 0.439, \gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta_1 f}{c^4}}} \approx 1.153 \qquad (12,3)$$

Resolviendo (9,3) se obtiene:

$$t = \frac{1}{c} \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_{m_1} \gamma_1} \right)^4}} = \frac{1}{c} \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{1 - (\frac{R}{R_{m_1}})^4}} \qquad (13,3)$$

$$= \frac{1}{c} R_{m_1} \int_0^{R/R_{m_1}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\gamma_1 R_m}{c} \int_0^{R/R_{m_1}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

El semiperíodo es:

$$T_1/2 = \frac{1.153}{c} R_m \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \gamma_1 \frac{R_m}{c} \approx 1.512 \frac{R_m}{c} \qquad (14,3)$$

Por lo tanto:

$$\frac{T_1/2}{T/2} = \gamma_1 \cong 1.153 \qquad (15,3)$$

Como se ve tanto el radio máximo como el semi período no se alteran mucho.

4. UNIVERSO COMO EXTENSIÓN DE UNA CELDA DE PLANCK MASIVA TÉRMICA Y CON RADIACIÓN

Si agregamos la energía de radiación $h\nu_{02}$ la celda queda:

$$m_{02}c^2 - \frac{m_{02}^2 f}{l_{02}} + k\theta_{02} + \upsilon_{02}h = 0 \ , \qquad \frac{l_{02}}{t_{02}} = c \ , \qquad \upsilon_{02} = \frac{c}{l_{02}} \tag{1,4}$$

$$\frac{m_{02}^2}{l_{02}} f = 3m_{02}c^2 = 3k\theta_{02} = 3\upsilon_{02}h$$

De las (1,4) se obtiene:

$$\begin{aligned} l_{02} &= l_0 / \sqrt{3} = 2.33 \times 10^{-33} cm \\ m_{02} &= m_0\sqrt{3} = 9.46 \times 10^{-5} g \\ t_{02} &= t_0 / \sqrt{3} = 7.80 \times 10^{-44} s \\ \theta_{02} &= \theta_0\sqrt{3} = 6.17 \times 10^{32} K \end{aligned} \tag{2,4}$$

Para introducir la radiación proporcional al tamaño del universo, podemos hacer la hipótesis que crece en la misma proporción que la temperatura.

Así que obtenemos:

$$Mc^2 - \frac{M^2 f}{R} + N_1 k\theta + N_2 \frac{hc}{R} = 0$$

Se divide por R porque la onda cuántica va por el interior de la celda, si fuera por la superficie se debe dividir por 2πR.

$$N_1 = N_2 = \frac{M\alpha}{\mu_0} = \frac{M\alpha Rc}{h} \tag{3,4}$$

$$\theta M = \theta_{02} m_{02} = 3\theta_0 m_0$$

Lo que da:

$$\begin{aligned} &Mc^2 - \frac{M^2 f}{R} + \beta_2 R + \alpha Mc^2 = 0 \\ &\beta_2 = \frac{\alpha ckm_{02}\theta_{02}}{h} = 8.02 \times 10^{48} cmgs^{-2} \end{aligned} \tag{4,4}$$

La ecuación del universo finalmente queda:

$$(1+\alpha)c^2 - \frac{Mf}{R} + \beta_2 \frac{R}{M} = 0 \tag{5,4}$$

Debiendo reemplazarse en γ_1, c por $c\sqrt{1+\alpha}$ y por lo tanto:

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta_2 f}{c^4(1+\alpha)^2}}} \cong 1.155 \qquad (6,4)$$

El valor de Rm_2 es:

$$R_{m_2} = \gamma_2 \sqrt{1+\alpha} R_m = 1.276 R_m \qquad (7,4)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (5,4) que se obtiene reemplazando M por (2,2) resulta:

$$t = \frac{1}{c}\int_0^R \frac{dR}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{R_m \gamma_2 \sqrt{1+\alpha}}\right)^4}} = \frac{1}{c}\int_0^R \frac{dR}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{R_{m_2}}\right)^4}} = \frac{R_{m_2}}{c}\int_0^{R/R_{m_2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{R_m}{c}\int_0^{R/Rm_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad (8,4)$$

El semiperíodo $T_2/2$ es con $R/Rm_2 = 1$:

$$T_2/2 = \gamma_2 \frac{R_m}{c}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{R_m}{c} \times 1.311 = \frac{R_m}{c} \qquad (9,4)$$

Por lo tanto:

$$\frac{T_2/2}{T/2} = \gamma_2 \qquad (10,4)$$

No hay mucha variación como en el caso anterior.

5. UNIVERSO COMO EXTENSIÓN A UNA CELDA DE PLANCK MASIVA, TÉRMICA CON RADIACIÓN Y ELECTRICIDAD

Si en la celda de Planck introducimos la electricidad se tendría (2).

$$m_{03}c^2 - \frac{m_{03}^2 f}{l_{03}} + k\theta_{03} + h\upsilon_{03} + \frac{e_{03}^2}{l_{03}} = 0$$

$$\frac{l_{03}}{t_{03}} = c, \upsilon_{03} = \frac{c}{l_{03}} \qquad (1,5)$$

$$\frac{m_{03}^2 f}{l_{03}} = 4m_{03}c^2 = 4k\theta_{03} = 4h\upsilon_{03} = 4\frac{e_{03}^2}{l_{03}}$$

De las (5,1) se obtiene:

$$l_{03} = l_0/2 = 2.02\times10^{-33} cm$$

$$m_{03} = 2m_0 = 1.09\times10^{-4} g \tag{2,5}$$

$$t_{03} = t_0/2 = 6.75\times10^{-44} s$$

$$\theta_{03} = 2\theta_0 = 7.20\times10^{32} K$$

$$e_{03} = h^{1/2} c^{1/2} = 1.41\times10^{-8} cm^{3/2} g^{1/2} s^{-1}$$

Como la carga del electrón es $4.80\times10^{-10} cm^{3/2} g^{1/2} s^{-1}$ se trataría de aproximadamente 30 partículas eléctricas, 15 negativas y 15 positivas. En este caso tomaremos también el número actual N_3 igual a los anteriores.

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{\alpha M}{\mu_0} = \alpha \frac{MRc}{h} \tag{3,5}$$

La ecuación del universo queda:

$$Mc^2 - \frac{M^2 f}{R} + \beta_3 R + \alpha Mc^2 + e_{03}^2 \frac{\alpha Mc}{h} = 0$$

$$Mc^2\left[1+\alpha\left(1+\frac{e_{03}^2}{ch}\right)\right] - \frac{M^2 f}{R} + \beta_3 R = 0 \tag{4,5}$$

En la última expresión

$$\frac{e_{03}^2}{ch} = 1 \ , \qquad 1+\alpha\left(1+\frac{e_{03}^2}{ch}\right) = 1+2\alpha$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha c k m_{03}\theta_{03}}{h} = 1.078\times10^{49} cmgs^{-2} \tag{5,5}$$

$$\frac{\beta_3 f}{c^4(1+2\alpha)^2} = 0.429\,, \qquad \gamma_3 = \sqrt{1/2+\sqrt{1/4 - \frac{\beta_3 f}{c^4(1+2\alpha)^2}}} = 1.151$$

Por lo tanto

$$R_{m_3} = R_m \gamma_3 \sqrt{1+2\alpha} = 1.381 R_m$$

$$t = \frac{1}{c}\int_0^R \frac{dR}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{Rm_3}\right)^4}} = \frac{R_{m_3}}{c}\int_0^{\frac{R}{R_{m_3}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$T_{3/2} = \frac{R_{m_3}}{c}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{R_m}{c}\gamma_3\sqrt{1+2\alpha}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1.811\frac{R_m}{c} \qquad (6,5)$$

$$\frac{T_{3/2}}{T/2} = \gamma_3\sqrt{1+2\alpha} \cong 1.381 \qquad (7,5)$$

6. INFLUENCIA DE LA VARIACIÓN DE α

En el origen cuando $M = m_0$ y $R = l_0$ el valor del gravitón es (4,3)

$$\mu_0 = \frac{h}{l_0 c} = c^{1/2} f^{-1/2} h^{1/2} = m_0 \qquad (1,6)$$

Así que α es 1, cuando nace el universo luego cuando está muy evolucionado $\alpha = 0.22$, como se acepta actualmente, siendo αM la cantidad de materia oscura. Suponiendo que α varía en forma lineal se tiene:

$$\alpha(R) = 1 - 0.78\frac{R}{R_m} \qquad (2,6)$$

El intervalo $0 \le R/R_m \le 1$ se puede dividir en cinco partes y darle a α el promedio con lo cual se tendrían los siguientes valores:

$$\begin{aligned} &0 \le R/R_m < 0.2\ ,\ \alpha_1 = 0.921 \\ &0.2 \le R/R_m < 0.4\ ,\ \alpha_2 = 0.765 \\ &0.4 \le R/R_m < 0.6\ ,\ \alpha_3 = 0.61 \\ &0.6 \le R/R_m < 0.8\ ,\ \alpha_4 = 0.454 \\ &0.8 \le R/R_m < 1,\ \alpha_5 = 0.298 \end{aligned} \qquad (3,6)$$

La ecuación (5,4) se transforma en:

$$Mc^2\left[1+2\alpha_i\right] - \frac{M^2 f}{R} + \beta_i R = 0 \qquad (4,6)$$

Y por lo tanto:

$$\left(1+2\alpha_i\right)c^2-\frac{2\pi^2\rho_0 fR^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{R}^2}{c^2}}}+\frac{\beta i}{2\pi^2\rho_0R^2}\sqrt{1-\dot{R}^2/c^2}=0 \qquad (5,6)$$

$$\beta_i=\frac{ckm_{03}\theta_{03}\alpha_i}{h}$$

Si hacemos $\dot{R}=0$ y por lo tanto $R=R_{m_i}$ obtenemos:

$$R^*_{m_i}=\gamma_i\sqrt{1+2\alpha_i}\,R_{m_i}$$

$$\gamma_i=\sqrt{1/2+\sqrt{1/4+\frac{\beta_i f}{c^4\left(1+2\alpha_i\right)^2}}} \qquad (6,6)$$

De la (5,6) obtenemos:

$$t=\gamma_i\sqrt{\left(1+2\alpha_i\right)}\,\frac{R_m}{c}\int_0^{R/Rm\gamma_i\sqrt{(1+2\alpha_i)}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{R_{m_i}}{c}\int_0^{R/R_{m_i}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad (7,6)$$

Por lo tanto:

$$T_i/2=\frac{R_m}{c}\gamma_i\sqrt{\left(1+2\alpha_i\right)}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{T}{2}\gamma_i\sqrt{\left(1+2\alpha_i\right)} \qquad (8,6)$$

Tomando los diferentes α_i tenemos:

α_i	$R^*_{m_i}/R_m=T^*_i/T$
0.922	1.955
0.766	1.852
0.610	1.742
0.454	1.627
0.298	1.496

El valor promedio de los $R^*_{m_i}/R_m = T^*_i/T$ es :

$$\frac{\overline{R^*_{m_i}}}{R_m}=\frac{\overline{T^*_i}}{T}=1.734$$

7. DISCUSIÓN GENERAL

Si colocamos en un cuadro los resultados obtenidos tenemos:

i	$Ti/T = R_{m_i}/R_m$
0	1
1	1.153
2	1.277
3	1.381
*	1.734

(1,7)

Así que la influencia de la energía térmica aumenta un poco el semiperíodo del universo y su radio de curvatura máximo. El agregado de la radiación y la electricidad y la cantidad de materia oscura αM, en nuestra teoría, no cambia básicamente el semiperíodo y el radio de curvatura máximo. Así que se puede afirmar que la evolución del universo depende básicamente del balance entre la energía cinética Mc^2 y la gravitacional $M^2 f/R$. La mecánica cuántica juega un papel básico sólo en su origen y en las transformaciones microscópicas que significan la creación de materia a expensas de un aumento de la gravitacional. Para dar una idea de las magnitudes involucradas, tenemos que para $10^{-30} \le \rho_0 \le 8\times 10^{-30}$ se obtiene $2,62\times 10^{28} \ge R_m \ge 1\times 10^{28}$ y $36.400\times 10^6 \ge T/2 \ge 12.900\times 10^6$, ρ_0 esta en g/cm^3, R_m en cm y $T/2$ en años.

Como se ve para $\alpha = 0.22$ la influencia de la energía térmica, térmica más radiante y térmica más radiante más eléctrica influye poco en el comportamiento cinético del Universo. Pero si variamos α, como se vió de 1 a 0.22, el radio de curvatura máximo R_m^* aumenta también relativamente poco, del orden de 1,5 o 2 a lo más. Por lo tanto es la variación de α, o sea el porcentaje de materia oscura, que influye en forma importante en el tamaño espacio temporal del universo. En un trabajo anterior (11) hemos tomado $\alpha = 0.22$.

8. APÉNDICE: EL GRAVITÓN Y LA MATERIA OSCURA

En el universo hay dos clases de materia, aquella que teóricamente se podría medir con una balanza y que se puede observar por medios ópticos y la que no puede ser observada pero se manifiesta cuando se estudia el movimiento de la materia en el universo. Esta última se manifiesta por su acción gravitatoria. A la primera llamamos M_0.

Se supone que la gravitación se transmite instantáneamente por partículas que llamaremos gravitones entre una partícula material y el resto de las partículas materiales. De acuerdo a nuestros anteriores trabajos [2-9] podemos suponer toda la materia concentrada en el centro de la esfera de cuatro dimensiones y el gravitón verificando una onda cuántica entre la partícula material y el centro de la esfera:

$$E = h\nu = \frac{h}{t} = \frac{hc}{R} \quad ; \quad \frac{R}{t} = c \tag{1.8}$$

Donde E es la energía del gravitón, que tiene masa μ_0, luego:

$$\mu_0 = \frac{h}{cR} \approx 2.21 \times 10^{-65} g \tag{2.8}$$

De Broglie obtuvo [10]:

$$\mu_0 = \frac{h\sqrt{6}}{2\pi cR} \approx 0.86 \times 10^{-65} g \tag{3.8}$$

Estudiando las partículas a spin 2 en su conexión con la teoría de la gravitación y la relatividad general. Aquí usamos como radio del universo R = 10^{28} cm. Si queremos dar a la teoría una forma más exacta obtengamos μ_0 como el promedio de todos los gravitones desde un punto cualquiera de la esfera al resto. Por lo tanto, si dS es el elemento de superficie situado en el punto P(x,y,z,u) y r es la distancia al punto P_0(0,0,0,R) se tiene:

$$
\begin{aligned}
&x = Rsen\phi sen\theta \cos\varphi \\
&y = Rsen\phi sen\theta sen\varphi \\
&z = Rsen\phi \cos\theta \\
&u = R\cos\phi \\
&x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R_1^2 \\
&0 \le \phi \le \pi; 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \theta \le \pi; 0 \le R \le \infty \\
&dS = R^3 sen^2\phi sen\theta d\phi d\theta d\varphi \\
&r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \left(R - R\cos\phi\right)^2 = 2R^2\left(1-\cos\phi\right) \\
&\mu_0 = \frac{1}{S}\int_S \mu(r) dS = \frac{h}{cS}\int_S \frac{dS}{r} \\
&\mu(r) = \frac{h}{cr}; S = 2\pi^2 R^3
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Así obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\mu_0 &= \frac{h}{cS}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R^3 sen^2\phi sen\theta d\phi d\varphi d\theta}{R\sqrt{2\left(1-\cos\phi\right)}} \\
&= \frac{h}{cR}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{sen^2\phi d\phi}{\sqrt{1-\cos\phi}} = \frac{h}{cR}\frac{\sqrt{2}}{\pi}2\int_0^{2}\sqrt{x}dx \\
&= \frac{h}{cR}\frac{8}{3\pi} \approx 1.88\times 10^{-65} g
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Prácticamente el doble del de De Broglie, lo cual nos dice que la teoría elemental aquí desarrollada es aceptable.

Dentro de esta teoría elemental se puede obtener la ley de atracción universal de Newton. Los gravitones μ(r) entre dos partículas transportan un impulso:

$$
\vec{I} = \mu(r) c \frac{\overline{r}}{r} = \frac{h}{r}\frac{\overline{r}}{r} \tag{6.8}
$$

En la dirección de la recta de unión de las dos masas. Este impulso se transporta en el tiempo r/c y se obtiene la fuerza entre las dos partículas:

$$
\overline{F} = \frac{\overline{I}N}{t} = \frac{hc}{r^2}N\frac{\overline{r}}{r} \tag{7.8}
$$

donde N es el número de gravitones que intercambian entre las dos partículas. Como se tiene:

$$
\overline{F} = f\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\overline{r}}{r} \tag{8.8}
$$

el número de gravitones intercambiados entre las dos partículas es:

$$
\begin{aligned}
N = f\ \frac{m_1 m_2}{hc} &= m_1 m_2\ \frac{Rc}{Mh} \\
&= \frac{m_1 m_2}{M\,\mu_0}
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

El número de gravitones que se intercambia entre dos masas es el porcentaje de una de ellas respecto a la masa total del universo M por el número de gravitones fundamentales que tiene la otra masa. Hay que hacer notar que μ_0 varía con R y que al comienzo del tiempo es m_0 [1,6].

Si M_0 es la materia observable por métodos no gravitacionales, el aumento de masa que se observa tiene que deberse a los gravitones que unen esa masa con la masa en el origen. Pero esto último origina un aumento de masa en el origen que aumenta la masa en la superficie de la esfera y así siguiendo. Así que la masa del universo es M_0 más la masa de gravitón M_1 más otra nueva masa M_2, etc. La energía de M_0 es E_0 que dividida por c^2 nos da M_1:

$$
M_1 = \frac{E_0}{c^2} = \frac{fM_0^2}{R_1 c^2} = \frac{M_0}{M} M_0 \tag{10.8}
$$

De la misma manera:

$$
M_2 = \frac{fM_1^2}{Rc^2} = \left(\frac{f}{Rc^2} \right)^3 M_0^4 = \left(\frac{M_0}{M} \right)^3 M_0 \tag{11.8}
$$

Luego, se tiene finalmente:

$$
\begin{aligned}
M &= M_0 + M_1 + M_2 + \ldots \\
\frac{M}{M_0} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M_0}{M} \right)^{2n-1}
\end{aligned}
\tag{12.8}
$$

Las (12.8) tiene la solución $M_0/M \approx 0.57$, si usamos el gravitón de De Broglie $M_0/M \approx 0.22$ [8].

La expresión de μ_0 se puede escribir:

$$
\mu_0 cR = h \tag{13.8}
$$

La cantidad de movimiento μ_0c multiplicada por R da h. Es el principio de incerteza, el gravitón puede estar en cualquier parte de R, donde se lo busque y significa que la gravitación se transmite instantáneamente y por el interior de la esfera. Así que no podrá ser detectada fuera de ella. Si se moviera fuera de la esfera podría ser detectado e incluso hacer una pantalla opaca a la gravitación lo que permitiría una máquina de movimiento continuo, que violaría el principio de conservación de la energía [8].

9. APÉNDICE: RELACIÓN ENTRE LAS OBSERVACIONES ACTUALES DEL UNIVERSO Y SUS CONSTANTES

Tomaremos como valores actuales frutos de la observación H ≈ $2.10\text{x}10^{-18}\text{s}^{-1}$ constante de Hubble, $R_1 \approx 10^{28}$cm radio de curvatura actual del universo, $\rho_1 \approx 10^{-29}\text{gcm}^{-3}$ su densidad actual. Por definición:

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{R}\phi}{R\,\phi} = \frac{\dot{s}}{s} \approx 2.10\times10^{-18}s^{-1} \tag{1.9}$$

$$R \approx 10^{28}cm$$

Lo que nos permite obtener el valor actual de $\dot{R}$:

$$\dot{R} \approx 2.10\times10^{10}cm\ s^{-1} = 0.7c \tag{2.9}$$

De las fórmulas (2.2), (3.2) y (6.5) en forma aproximada:

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \frac{c^2\sqrt{1-\dot{R}^2/c^2}}{2\pi^2 fR^2} \approx 4.88\times10^{-30}gcm^{-3}\\
R_{m_3} &= \frac{c\gamma_3\sqrt{1+2\alpha}}{\sqrt{2\pi^2 f\rho_0}} \approx 1.636\times10^{28}cm\\
T_3/2 &= \frac{R_{m_3}}{c}1.8110 \approx 31.300\times10^6\,años\\
t &= \frac{R_{m_3}}{c}\int_0^{R/R_{m_3}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{R_{m_3}}{c}\int_0^{0.611}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 16.800\times10^6\,años
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Desde que en el momento que introducimos una densidad ρ_0 cuando R = 0, el universo debe ser periódico. Si introdujéramos una constante cosmológica que significa una repulsión proporcional a la distancia que separa las masas, existe la posibilidad de que el universo se expanda sin límites [8]. En la actualidad se ha encontrado la posibilidad de que H aumente a grandes distancias, lo que podría significar una expansión del universo sin límites. Sin embargo, este fenómeno se puede explicar dentro de un universo periódico [9].

10. APÉNDICE: LAS ECUACIONES DEL UNIVERSO

En el caso de que sólo exista materia y energía gravitatoria:

$$Mc^2 - \frac{M^2 f}{R} = 0 \qquad (1.10)$$

Si existe una constante cosmológica [9]:

$$Mc^2 - \frac{M^2 f}{R} + \frac{\kappa M R^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{R}^2}{c^2}}} = 0 \qquad (2.10)$$

que se puede transformar en:

$$Mc^2 - \frac{M^2}{R}\left(\frac{\kappa}{2\pi^2 \rho_0} - f\right) = 0 \qquad (3.10)$$

Si tomamos en cuenta la energía térmica, la radiante y la eléctrica:

$$M\left(1 + 2\alpha\right)c^2 - \frac{M^2}{R}\left(\frac{\kappa}{2\pi^2 \rho_0 f} - 1\right) + \beta_3 R = 0 \qquad (4.10)$$

La relación Einstein – Mach es:

$$\frac{M}{R} = \frac{2\pi^2 \rho_0}{2\pi^2 \rho_0 f - \kappa}\left[\left(1 + 2\alpha\right)c^2 + \beta_3 \frac{R}{M}\right] \qquad (5.10)$$

Si $\kappa = 0$, $\alpha = 0$ y $\beta_3 = 0$ se tiene:

$$\frac{M}{R} = \frac{c^2}{f} \qquad (6.10)$$

Si $\alpha = 0$, $\beta_3 = 0$ y ρ_0 es igual a la densidad crítica, $\rho_0 = \rho_c = (\kappa/2\pi^2 f)$ el universo tiene una expansión infinita a la velocidad de la luz, R = ± ct. Se puede estimar κ a partir de los datos actuales de acuerdo a esto:

$$\kappa = 2\pi^2 \rho_0 f \approx 1.317 \times 10^{-36} s^{-2} \qquad (7.10)$$

En la literatura $\kappa \approx 10^{-35} s^{-2}$, es $(3H_0^2/8\pi f)$, con H_0 la constante de Hubble. En este caso el universo sería periódico.

11. APÉNDICE: LA "CONSTANTE" DE HUBBLE Y LA ACELERACIÓN DEL UNIVERSO EN EL MODELO

Este problema ya lo tratamos anteriormente [9], en consecuencia sólo lo resumiremos. La constante de Hubble se define como

$$H = \frac{\dot{s}}{s} \tag{1.11}$$

Tal como hicimos en la ecuación (1.9), pero el suponer que este valor es constante no está de acuerdo con este modelo de universo ni, al parecer, con las medidas experimentales que indican un cierto aumento de H cuando se aumenta s. Luego, suponer H constante es sólo una primera aproximación, veremos aquí en una forma directa qué sucede cuando s aumenta. En una sección z = 0, u = 0 del universo se tiene un círculo de radio R y tomando un sistema de coordenadas x y un círculo donde R forma un ángulo φ con el eje x. La trayectoria de un rayo de luz que parte del origen formando un ángulo nulo con x no puede superar la velocidad de la luz al desplazarse sobre la superficie de la esfera que va creciendo, luego debe verificar la ecuación:

$$\dot{R}^2 + R^2\,\dot{\varphi}^2 = c^2 \tag{2.11}$$

de la (6.2) se obtiene:

$$\dot{R} = c\sqrt{1 - \frac{R^4}{R_m^4}} \quad ; \quad dt = \frac{dR}{c\sqrt{1 - R^4/R_m^4}} \tag{3.11}$$

que reemplazada en la (2.11) da:

$$R\,\dot{\varphi} = c\,\frac{R^2}{R_m^2} \tag{4.11}$$

Teniendo en cuenta (4.11) y la segunda de las (3.11) se obtiene:

$$d\varphi = \frac{RdR}{R_m^2\sqrt{1 - R^4/R_m^4}} \tag{5.11}$$

Integrando la (5.11) resulta:

$$\varphi-\varphi_0=\frac{1}{R_m^2}\int_{R_0}^{R}\frac{RdR}{\sqrt{1-R^4/R_m^4}}=\int_{R_0/R_m}^{R/R_m}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}$$
$$=\left[\frac{1}{2}arcsen\frac{R^2}{R_m^2}\right]_{R_0/R_m}^{R/R_m} \quad (6.11)$$

En (6.11) R_0 es la posición a partir de donde sale el rayo de luz y R donde llega, se obtiene así:

$$\frac{R^2}{R_m^2}=\frac{R_0^2}{R_m^2}+sen2(\varphi-\varphi_0) \quad (7.11)$$

Supongamos que R_0 y φ_0 son nulos, eso inmediatamente después de que se formó el universo, entonces la ecuación del rayo de luz es:

$$\frac{R^2}{R_m^2}=sen2\varphi \quad (8.11$$

Y tiene la forma que se ve en la figura 2.

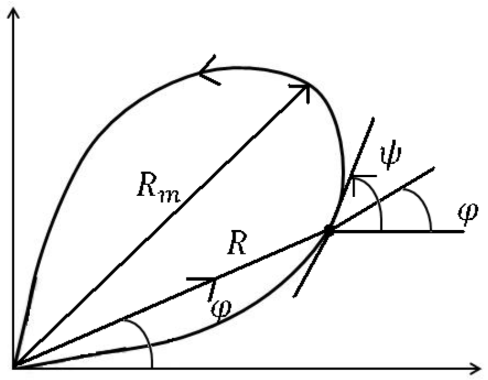

Figura 2: Trayectoria de un rayo de luz en el modelo de universo K – D.

En cada punto de su trayectoria el rayo de luz tiene una tangente que forma un ángulo ψ con el eje x y que se determina con las fórmulas:

$$x=R\cos\varphi$$
$$y=Rsen\varphi \quad (9.11)$$
$$tg\psi=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{\dot{R}sen\varphi+R\cos\varphi\dot{\varphi}}{\dot{R}\cos\varphi-Rsen\varphi\dot{\varphi}}$$

Si definimos un ángulo Ω como:

$$\Omega=\psi-\varphi \quad (10.11)$$

En el origen $\Omega = 0$, luego va creciendo hasta $dR/d\varphi = 0$, osea $R = R_m$ cuando $\psi = (3\pi/4)$, por lo tanto la tangente es perpendicular al radio vector y $\Omega = \pi/2$, a partir de allí $\Omega > \pi/2$ y cuando el universo involuciona llegando al origen de nuevo Ω aumenta hasta π.

Ahora se puede definir H en forma exacta:

$$H = \frac{\dot{s}}{s} = \frac{\dot{R}_m \cos(\psi_0 - \varphi_0) - \dot{R}\cos(\psi - \varphi)}{c(t_0 - t)} \qquad (11.11)$$

En la (11.11) el numerador es la diferencia de velocidades entre el observador en R_0 y la galaxia que emitió el rayo de luz en R, ese rayo de luz tardó $t_0 - t$, $t_0 > t$ y luego la distancia entre R y R_0 es $c(t_0 - t)$. Hacemos ahora:

$$\dot{R} = c\cos\Omega \qquad (12.11)$$

lo que nos da reemplazando en (2.11):

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{R} sen\Omega \qquad (13.11)$$

Introduciendo (12.11) y (13.11) en H se obtiene:

$$H = \frac{\cos^2\Omega_0 - \cos^2\Omega}{t_0 - t} \qquad (14.11)$$

Para saber cómo varía H al incrementar t, es decir cuando observamos galaxias más lejanas. Desarrollamos en serie al aumentar t en Δt:

$$H\left[t_0 - (t + \Delta t)\right] = H(t_0 - t) - \frac{dH}{dt}\Delta t \qquad (15.11)$$

Luego se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{+2\cos\Omega sen\Omega\dot{\Omega}}{t_0 - t} - \frac{\cos^2\Omega_0 - \cos^2\Omega}{(t_0 - t)^2} \\ &= \frac{+2\cos\Omega sen\Omega\dot{\Omega} \;\; - H(t_0 - t)}{t_0 - t} \end{aligned} \qquad (16.11)$$

De la (12.11) se tiene:

$$\dot{R} = c\cos\Omega \quad ; \quad \ddot{R} = -csen\Omega\dot{\Omega} \qquad (17.11)$$

Por lo tanto:

$$2\cos\Omega sen\Omega\dot{\Omega} = -\frac{2\dot{R}\ddot{R}}{c^2} \qquad (18.11)$$

Con ayuda de (6.2):

$$\dot{R} = c\sqrt{1-\frac{R^4}{R_m^4}} \quad ; \quad \ddot{R} = -\frac{2c^2R^3}{R_m^4}$$
$$\frac{2\dot{R}\ddot{R}}{c^2} = -4c\frac{R^3}{R_m^4}\sqrt{1-\frac{R^4}{R_m^4}} \qquad (19.11)$$

Finalmente:

$$H\left[t_0-\left(t+\Delta t\right)\right] = H\left(t_0-t\right)\left(1+\frac{\Delta t}{t_0-t}\right)-4c\frac{R^3}{R_m^4}\sqrt{1-\frac{R^4}{R_m^4}}\frac{\Delta t}{t_0-t} \qquad (20.11)$$

Derivando sucesivamente (14.11) se puede obtener la función H[t_0 – (t + Δt)] completa. Si Δtc = s es tal que Δs/s = Δtc / c(t_0 – t) = 0.1 sabemos cómo varía el primer término, el segundo depende de R/R_m. Usando valores R ≈ 10^{28}cm, R_m ≈ 1.616x10^{28}cm, se obtiene ΔH ≈ 0.09x10^{-18}, si Δs/s = 0.1. En todo caso, H aumenta cuando el universo está en una fase de crecimiento. H disminuirá cuando entre en una fase de involución. A medida que nos alejamos en el tiempo, galaxias más lejanas, éstas se mueven más rápido que el observador pero debido al cambio en R el efecto es contrario, H crece como parece confirmarse por las medidas. Observaciones precisas de ΔH podría determinar R/R_m.

Podemos tratar de estimar el parámetro R/R_m suponiendo las siguientes ecuaciones:

$$\Delta H = \frac{\Delta s}{s}\left[H-4c\frac{R^3}{R_m^4}\sqrt{1-\frac{R^4}{R_m^4}}\right]$$
$$H \approx \frac{c}{R}\sqrt{1-\frac{R^4}{R_m^4}} \qquad (21.11)$$

Donde la expresión anterior para H está de acuerdo con (1,9).

De las (21.11) obtenemos:

$$\frac{R}{R_m} = \left[\frac{1}{4}\left(1-\frac{\Delta H}{H}\frac{s}{\Delta s}\right)\right]^{1/4} \qquad (22.11)$$

Con la (22.11) se pueden estimar R_m si se tiene R, y recordando (3.2) se tiene:

$$\rho_0 = \frac{c^2}{2\pi^2 R_m^2 f} \tag{23.11}$$

El uso de las fórmulas anteriores para determinar R, R_m,ρ_0 y ρ depende de la exactitud en la determinación de R y ΔH.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Planck, M., The theory of heat radiation; traducido de la edición alemana de 1912 por M. Masius, Dover (1959) N. Y.
2. Kittl, P., Some observations on quantum mechanics history, on Planck's elemental cell, on a universe begining and ending, on mini black holes, and on a masive binary atom, Anales de la Sociedad Científica Argentina, 228 (1998) 89.
3. Kittl, P. y Díaz G., Sobre un modelo elemental de Universo periódico, con una duración de 22.400 millones de años. Ciencia Abierta (1999) http://tamarugo.cec.uchile.cl/cabierta/revista///universo1.htm
4. Kittl, P., Las dimensiones de Planck y el nacimiento y muerte del universo, Ciencia Abierta 6 (1999).
5. Kittl, P. y Díaz G., A simple modelo of the creation and development of a periodical Universe, Ciencia Abierta 8 (1999).
6. Kittl, P., Cosmología. Universo Global: Modelos y datos experimentales, Ciencia Abierta 10 (2000).
7. Kittl, P. y Díaz G., The K-D Universe Model, with null energy in the Restricted Relativity with Cosmological Constants, can explain the actual acceleration of the Universe, Ciencia Abierta 12 (2001).
8. Kittl, P. y Díaz G., Un modelo simplificado de un universo cíclico, Ciencia Abierta 22 (2003).
9. Kittl, P. y Díaz, G., On a modelo of the universe based on the especial relativity and on the Hubble constant, Ciencia Abierta 29 (2006).
10. de Broglie, L., Thèorie Gènèrale des Particules a Spin (Methode de Fusion), Gauthier-Villars, Paris (1943).
11. Kittl, P. y Díaz, G., Sobre el número cosmic de Eddington, e – ingeniería (2010) http://www.ingenieria.cl/revista/