

Título del Trabajo	Cinemática y dinámica del sólido rígido.
Nombre	Enrique Cantera del Río
Filiación	C/Padre Benito Menni-6-2-E 47008 Valladolid (España)
Correo electrónico	benarro@gmail.com
Resumen	Introducción a la física del sólido rígido para primeros cursos de carreras científico-técnicas.

CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Enrique Cantera del Río

Índice

I-SISTEMAS DE COORDENADAS EN FÍSICA CLÁSICA.

- 1-Introducción
- 2-Velocidad instantánea y regla de adición de velocidades.
- 3-Teorema de Euler y eje instantáneo de rotación.
- 4-Linealidad de la velocidad angular.
- 5-Transformaciones cinemáticas generales y forma general de la 2ª Ley de Newton.
- 6-Visualización y ejemplos.
- 7-Cinemática del sólido rígido.
- 8-Visualización y ejemplos.

II-DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO.

- 1-Introducción.
- 2-Teoremas básicos sobre el centro de masas.
- 3-Momento angular de un sólido rígido respecto a su centro de masas.
- 4-Visualización y ejemplos.

III-CONSIDERACIONES FINALES.

APÉNDICE MATEMÁTICO

Las palabras lugar y espacio no significan nada que difiera verdaderamente del cuerpo del que decimos que está en algún lugar, y, nos indican solamente su magnitud, su figura y cómo está situado entre los otros cuerpos. Pues es necesario para determinar esta situación dar constancia de algunos otros que consideramos como inmóviles; pero según cuales sean los que así consideremos, podemos decir que una misma cosa cambia de lugar o que no cambia.

René Descartes - Principios de filosofía

La Geometría es el arte de pensar bien, y dibujar mal.

Anónimo.

I - SISTEMAS DE COORDENADAS EN LA FÍSICA CLÁSICA.

1-Introducción

Nuestra sensación de movimiento depende del funcionamiento de nuestra visión. Esta evolucionó durante millones de años para enfocar un objetivo y seguir su movimiento; una facultad básica para la caza. Nuestra idea de movimiento procede básicamente de la acción muscular asociada al giro de nuestros ojos al permanecer enfocados hacia un objeto que se está moviendo. En una experiencia común como es un viaje en tren o en automóvil *percibimos* a través de las ventanas que los objetos exteriores cercanos se mueven más rápidamente que los más alejados. Esta sensación se debe a que los ojos deben girar más rápido para enfocar los objetos cercanos que los lejanos. Lo mismo es aplicable a otras situaciones. Vamos andando y miramos unas nubes en el cielo. Si las nubes están muy altas y enfocamos un punto de la nube, a medida que andamos nuestros ojos no variarán apreciablemente su ángulo para permanecer enfocados en dicho punto. En este caso tenemos la sensación de que las nubes “nos acompañan” a medida que andamos. Si las nubes son bajas es posible que los ojos si tengan que girar para permanecer enfocados en un punto de la nube, y la sensación anterior no aparece. Para trazar surcos lo más rectos posibles, un agricultor conduce su arado teniendo como referencia un punto muy alejado, de modo que durante el proceso mantiene sus ojos enfocados y no aprecie movimiento en ellos.

Sin embargo la Física, basada en la medida, utiliza el concepto de sistema de coordenadas para referir la posición de un objeto. De este modo, y contrariamente a nuestra sensación mirando por la ventana del tren, la velocidad de todos los objetos externos al tren y fijos al suelo es la misma. La mecánica clásica requiere una descripción precisa del movimiento. En concreto y dada la importancia central de los sistemas de coordenadas inerciales, es preciso saber reconocer y distinguir las aceleraciones asociadas a observadores que utilizan sistemas de coordenadas no inerciales.

Un sistema de coordenadas se puede ver como un conjunto de puntos que llamaremos *puntos propios*. La forma que utilizaremos para *numerar* estos puntos propios será el sistema de coordenadas Cartesiano tri-rectángulo, de forma que todo punto propio queda distinguido por un conjunto de tres coordenadas reales (x,y,z) . Siempre debe existir un punto propio *origen* con coordenadas $(0,0,0)$. La relación entre los sistemas de coordenadas y el sólido rígido es intrínseca, ya que comparten su propiedad fundamental: los puntos propios de un sistema de coordenadas y los puntos materiales de un sólido rígido mantienen sus distancias relativas constantes independientemente del estado de movimiento. Los sistemas de coordenadas tienen una característica adicional definitoria : los puntos propios de un sistema de coordenadas están en *reposo relativo unos respecto a otros*.

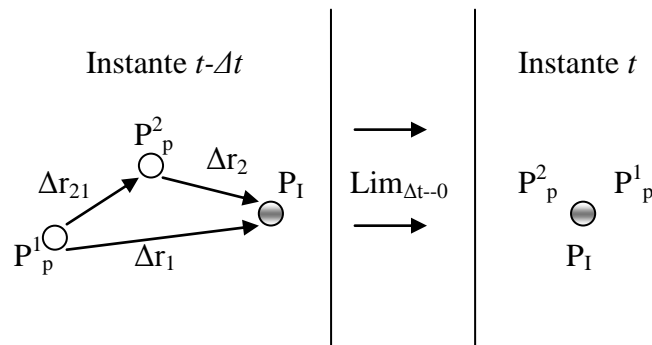
Un principio básico que se utilizará es que para cualquier sólido rígido animado por un movimiento arbitrario, siempre es posible encontrar un sistema de

coordenadas en el cual los puntos del sólido rígido no se mueven relativamente entre sí; es decir, en dicho sistema las coordenadas de los puntos del sólido no cambian con el tiempo. En este caso el sólido rígido una materialización física del sistema de coordenadas cartesiano. Llamaremos a este tipo de sistemas de coordenadas intrínsecos.

Sin embargo, inicialmente estamos interesados en la descripción del movimiento de *partículas independientes* puntuales, no de sólidos extensos. El movimiento de una partícula independiente en un sistema de coordenadas se describe mediante la asociación entre el tiempo y un punto propio del sistema : $(x(t),y(t),z(t))$. En el *mismo instante* t , en otro sistema de coordenadas distinto, la asociación señalada tendrá un valor diferente $(x'(t),y'(t),z'(t))$. Este hecho establece una asociación entre los *puntos propios* de dos sistemas de coordenadas de forma que debe existir alguna función matemática de la forma $f(x,y,z,t) = (x',y',z',t)$. Note el lector que mediante la variable tiempo podemos relacionar físicamente los puntos propios de dos sistemas, ya que una partícula independiente, en un instante determinado, solo puede estar en un punto propio en cada uno de los dos sistemas de coordenadas. Los dos puntos propios relacionados representan en realidad un único *punto físico*. Si los dos sistemas de coordenadas están en reposo relativo, entonces la función $f()$ no dependerá del tiempo, pero si los sistemas se mueven relativamente en general habrá que incluir el tiempo en la función que relaciona los puntos propios de dos sistemas.

2-Velocidad instantánea y regla de adición de velocidades.

La velocidad instantánea de la partícula independiente se define mediante un paso al límite *local* en el punto propio que dicha partícula ocupa en el sistema de coordenadas correspondiente e instante determinado. En el dibujo vemos la situación un instante antes de que el punto propio de cada sistema (P_p^1, P_p^2) y la partícula independiente (P_I) coincidan



Podemos representar la relación vectorial en el límite así.

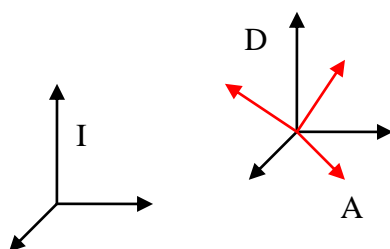
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta r_{21}}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta r_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta r_1}}{\Delta t}$$

$$\overline{v_{21}} + \overline{v_2} = \overline{v_1}$$

dado que en el límite coinciden los puntos propios y la partícula independiente, los valores Δr son tan pequeños como queramos; lo cual es una condición necesaria para la existencia de los límites señalados. Note el lector que los vectores utilizados deben estar en un mismo sistema de coordenadas; pero en la *interpretación física clásica* las velocidades con índice 1 y 2 *coinciden* con las velocidades de la partícula independiente *medidas en* dos sistemas de coordenadas diferentes 1 y 2. La causa de la velocidad con índice 21 es el movimiento relativo entre los sistemas de coordenadas. Esta velocidad dependerá en general del tiempo y el punto propio considerado.

Inicialmente consideramos las relaciones cinemáticas entre un sistema de coordenadas inercial (I) y otro no inercial (A) en movimiento arbitrario. Podemos descomponer el problema introduciendo un sistema de coordenadas intermedio (D) que tenga el mismo origen de coordenadas que el sistema (A) y que mantenga sus ejes coordenados cartesianos siempre paralelos a los de (I).

Los puntos propios del sistema de coordenadas D se desplazan todos con la misma velocidad y aceleración en cada instante respecto a los puntos propios del sistema de coordenadas I y la aplicación de la regla de adición de velocidades da el siguiente resultado



$$\overline{v_I} = \overline{v_D} + \overline{v_{DI}} \rightarrow \overline{a_I} = \overline{a_D} + \overline{a_{DI}}$$

donde v_{DI} es la velocidad relativa entre dos puntos propios correspondientes en los sistemas de coordenadas y las otras velocidades son las correspondientes al movimiento de una partícula material independiente observadas desde los dos sistemas de coordenadas I, D . Note el lector que v_{DI} no tiene por que ser constante en el tiempo y puede cambiar en módulo y dirección, pero la orientación de los ejes coordenados del sistema D se mantienen siempre paralelos a los de I ; de lo contrario el desplazamiento relativo de los puntos de D no sería el mismo vector para todos ellos en un instante determinado. En el caso de *desplazamiento* entre estos sistemas coordenados tenemos $v_{DI}(t)$, pero en el caso general con *desplazamiento* y *giro* relativo será $v_{DI}(x,y,z,t)$.

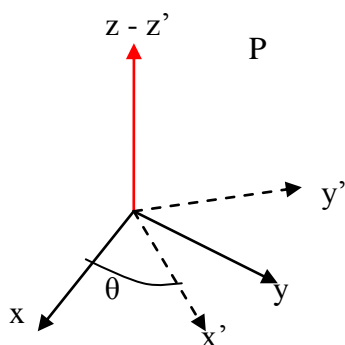
En el dibujo vemos al sistema de coordenadas cartesianas A en una posición arbitraria, pero compartiendo un origen común con D . Hemos reducido el problema general de encontrar las relaciones cinemáticas al caso de sistemas que comparten un origen común.

3-Teorema de Euler y eje instantáneo de rotación.

Considere el lector una esfera rígida que puede moverse con la única ligadura de mantener su centro fijo respecto al observador. Euler planteó y demostró el siguiente teorema (ver Apéndice Matemático)

Rotando una esfera de forma arbitraria alrededor de su centro inmóvil, siempre es posible encontrar un diámetro E cuya posición tras la rotación es igual que la que tenía antes de la rotación.

En base a esto, considere ahora el lector que el origen del sistema de coordenadas A es el centro de la esfera y los ejes coordenados de A están rígidamente unidos al material de la esfera. El movimiento arbitrario aludido pasa a ser un movimiento relativo entre el sistema de coordenadas A y el D . Si consideramos un cambio de posición instantáneo, tan pequeño como se quiera, tenemos que existe en el sistema de coordenadas A un conjunto de puntos incluidos en una recta (E) que pasa por su origen que no han experimentado ningún cambio de posición juzgado por un observador en D . Los puntos de la esfera, que son los del sistema de coordenadas A , tienen la propiedad de mantener su distancia relativa durante el movimiento. Por tanto, en el instante dt correspondiente el único movimiento posible de la esfera ha sido un giro respecto de un eje de rotación fijo definido por la recta (E). Este es el *eje instantáneo de rotación* y dada la arbitrariedad del movimiento, este eje puede variar de un instante a otro.



El teorema de Euler encamina el problema de encontrar las relaciones cinemáticas entre los sistemas de coordenadas D y A al estudio del giro de un sistema de coordenadas respecto de un eje instantáneo fijo. Sin pérdida de generalidad podemos imaginar los sistemas de coordenadas $D(x,y,z)$ y $A(x',y',z')$ con la configuración del dibujo; de modo que comparten un eje $z-z'$ común *que coincide con el eje instantáneo de rotación en un instante dt .*

En este contexto el movimiento del sistema de coordenadas A corresponde a un giro caracterizado por la modificación del ángulo θ . El problema de encontrar los puntos propios correspondientes entre estos dos sistemas de coordenadas se puede plantear utilizando el método de matrices

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overline{\overline{M}}(\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}; \quad \overline{\overline{M}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Derivando respecto del tiempo, y teniendo en cuenta el álgebra del producto matricial podemos ver que

$$\begin{aligned} \overline{v}_D &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}}(\theta) \right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}}(\theta) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}; \\ \overline{a}_D &= \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{d^2}{dt^2} \overline{\overline{M}}(\theta) \right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 2 \left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}}(\theta) \right) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}}(\theta) \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Las derivadas de la matriz son

$$\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}}(\theta) = \frac{d\theta}{dt} \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{d\theta}{dt} \overline{m}'(\theta)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \overline{\overline{M}}(\theta) = \frac{d^2\theta}{dt^2} \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \begin{pmatrix} -\cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \overline{m}'(\theta) + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \overline{m}''(\theta)$$

Sin pérdida de generalidad¹ podemos analizar los términos matriciales en el instante en que $\theta = 0$ y los dos sistemas de coordenadas coinciden, obteniendo

$$\begin{aligned} \overline{\overline{M}}(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \overline{m}'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{m}''(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \overline{m}''(0) &= \overline{m}'(0)\overline{m}'(0) \end{aligned}$$

La última expresión indica que la matriz $\overline{m}''(0)$ es igual al producto matricial de $\overline{m}'(0)$ por si misma. Para el instante referido $\overline{M}(0)$ es la matriz identidad y por tanto los ejes coordenados coinciden : $x=x',y=y',z=z'$; de modo que las relaciones cinemáticas se pueden expresar por

$$\begin{aligned} \overline{v}_D &= \left(\frac{d\theta}{dt} \overline{m}'(0) \right) \overline{r} + \overline{v}_A \\ \overline{a}_D &= \frac{d^2\theta}{dt^2} \overline{m}'(0) \overline{r} + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \overline{m}'(0)\overline{m}'(0) \overline{r} + 2 \left(\frac{d\theta}{dt} \overline{m}'(0) \right) \overline{v}_A + \overline{a}_A \end{aligned}$$

donde r es el vector (x,y,z) igual al (x',y',z') en el instante considerado.

¹ En el apéndice matemático se da un planteamiento matemático mas riguroso.

Si introducimos el producto vectorial de los vectores velocidad y aceleración angular de modo que verifiquen

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \bar{m}'(0)\right) = \bar{w} \times$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \bar{m}'(0)\right) = \bar{\alpha} \times$$

encontramos las expresiones habituales en la bibliografía

$$\bar{v}_D = \bar{w} \times \bar{r} + \bar{v}_A$$

$$\bar{a}_D = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) + 2\bar{w} \times \bar{v}_A + \bar{a}_A$$

De las expresiones anteriores podemos eliminar v_A en la aceleración y obtener

$$\bar{v}_A = (-\bar{w}) \times \bar{r} + \bar{v}_D$$

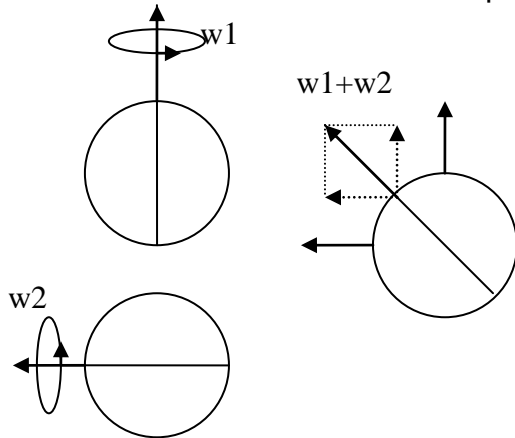
$$\bar{a}_A = (-\bar{\alpha}) \times \bar{r} + (-\bar{w}) \times ((-\bar{w}) \times \bar{r}) + 2(-\bar{w}) \times \bar{v}_D + \bar{a}_D$$

que formalmente es la misma ley para la velocidad y aceleración sustituyendo los subíndices A por D , w por $-w$ y α por $-\alpha$. Esto quiere decir que, para un observador en el sistema de coordenadas A , el sistema de coordenadas D está girando relativamente con una velocidad angular $-w$ y aceleración angular $-\alpha$. El ejemplo inmediato de esto es la propia tierra. Debido al giro diurno de la tierra vemos al sol y a todo el firmamento girar en dirección este-oeste ($-w$) alrededor de un eje norte-sur, cuando desde el sol (sistema inercial) el giro de la tierra respecto de su propio eje es de oeste a este (w).

El análisis hecho supone implícitamente que el eje instantáneo de rotación es fijo, no cambia de orientación. Evidentemente esto no es el caso mas general, pero aún podemos mantener este análisis si suponemos que el sistema de coordenadas D y el A mantienen un eje Z común en la dirección del eje instantáneo de rotación aunque este cambie. Esto supone que el sistema D y el I ya no mantienen paralelos sus ejes de coordenadas y las relaciones cinemáticas introducidas al principio ya no serían aplicables. Para eludir esto, podemos mantener D e I paralelos e introducimos un nuevo sistema de coordenadas intermedio, G , que comparte origen de coordenadas con D y A , y cuyo eje Z coincide siempre con el eje Z de A y con el eje instantáneo de rotación. Para los sistemas G y A sería aplicable el análisis de aceleraciones y velocidades hecho aquí y faltaría un análisis adicional entre los sistemas G y D . Solo mencionaré que el movimiento relativo entre G y D se denomina *precesión* y veremos mas adelante ejemplos donde se da este movimiento.

4-Linealidad de la velocidad angular.

Tomemos la esfera del teorema de Euler en reposo. Podemos aplicar sobre el polo norte de la esfera una acción que haga girar la esfera sobre el eje norte-sur con velocidad angular w_1 .



Sobre la misma esfera en reposo también podemos aplicar otra acción en un punto ecuatorial que la haga girar con velocidad angular w_2 . Si aplicamos simultáneamente estas acciones a la esfera en reposo obtendremos una velocidad angular que será la *suma vectorial* de las velocidades angulares independientes. Además, en nuestro caso el centro de la esfera se

mantiene en reposo, por lo que el eje instantáneo de rotación debe pasar por dicho centro. Esto determina totalmente el eje de rotación asociado a la composición de velocidades angulares.

Esta ley de composición permite también la existencia de sistemas de coordenadas (observadores) en los que todas o alguna componente del giro queden anuladas. Imagine el lector dos “observadores satélites” asociados a la esfera en reposo: uno justo sobre el polo norte y otro justo sobre el ecuador. Serán estos observadores los que apliquen a la esfera las acciones w_1 y w_2 , pero diferimos la aplicación de las acciones anteriores empezando por la acción w_1 . Además el observador en el ecuador consigue por algún medio seguir el movimiento de giro de la esfera sobre el ecuador, como si fuese un satélite. En este caso, para el observador polar la esfera estaría en giro, pero para el ecuatorial la esfera no estaría girando; estaría en reposo. Posteriormente el observador ecuatorial aplica la acción w_2 sobre la esfera, que él percibe en reposo, y automáticamente el observador polar realiza el movimiento correspondiente a w_2 . Para un observador exterior el movimiento completo será la composición lineal de w_1 y w_2 , pero para los observadores descritos el eje de giro de la esfera se mantiene siempre en el punto más cercano a la esfera en que aplicaron las acciones. El observador ecuatorial no percibe el giro asociado a w_1 y el polar no ve el giro asociado a w_2 .

En el ejemplo se ha presentado una composición de giros con ejes de rotación que comparten un punto común correspondiente al centro de la esfera, pero la regla de linealidad es general para giros con ejes de rotación que no se crucen, incluso paralelos.

Vemos de esta forma que el eje instantáneo de rotación es relativo al observador y los movimientos circulares pueden compensarse eligiendo adecuadamente el sistema de coordenadas.

5-Transformaciones cinemáticas generales y forma general de la 2ª Ley de Newton.

Incluyendo la velocidad y aceleración de desplazamiento respecto del sistema de coordenadas inercia I tenemos

$$\begin{aligned} \bar{v}_I &= \bar{v}_{DI}(t) + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{v}_A \\ \bar{a}_I &= \bar{a}_{DI}(t) + \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_A + \bar{a}_A \end{aligned}$$

Note el lector que las magnitudes con subíndice *DI* solo dependen del tiempo. Si asignamos a la partícula a la que se refiere la aceleración de la 2ª expresión una masa *m*, multiplicando por la masa tenemos

$$m\bar{a}_I = m\bar{a}_{DI}(t) + m\bar{\alpha} \times \bar{r} + m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2m\bar{\omega} \times \bar{v}_A + m\bar{a}_A$$

la 2ª Ley de Newton nos dice que el término a la izquierda de la igualdad anterior ,correspondiente a un sistema de coordenadas inercial, equivale a la resultante de todas las fuerzas aplicadas a la partícula ($\Sigma \bar{F}_i$). Por tanto

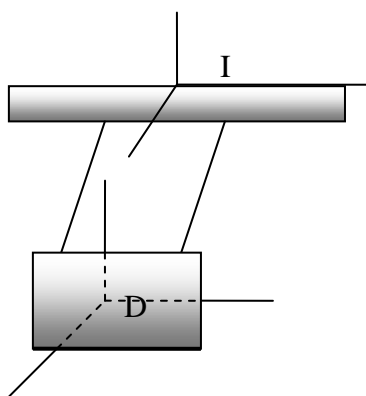
$$m\bar{a}_A = \left(\sum_i \bar{F}_i \right) - m\bar{a}_{DI}(t) - m\bar{\alpha} \times \bar{r} - m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) - 2m\bar{\omega} \times \bar{v}_A$$

Esta es la 2ª Ley de Newton para un observador en un sistema de referencia arbitrario A. Sin embargo recuerde el lector que la expresión anterior se refiere a un instante en el que los sistemas de coordenadas A y D coinciden.

6-Visualización y ejemplos.

1-Desplazamiento entre sistemas de coordenadas.

El bloque de la figura está colgado del techo por dos cuerdas de igual longitud



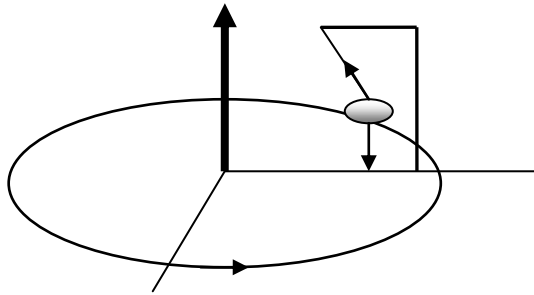
de modo que la superficie inferior del bloque (marcada con una línea mas gruesa) se mantiene paralela a si misma en cualquier instante del movimiento. Lo mismo ocurre para las superficies laterales, frontal y posterior. Las líneas coordenadas de un sistema de coordenadas cartesiano (D) arraigado en el bloque (sistema de coordenadas intrínseco del sólido rígido) serán vistas desplazándose *sin cambiar de dirección* en todo el movimiento respecto a un sistema de coordenadas inercial (I) asociado al techo, por ejemplo. Imaginemos varias partículas materiales

independientes referidos con el superíndice *i*. Estas partículas ocuparán en un instante *t* distintos puntos en el sistema de coordenadas D. El efecto del desplazamiento entre sistemas supone que la transformación de velocidades entre dichos sistemas es esta

$$\overline{v}_I(\overline{r}_I^i, t) = \overline{v}_{DI}(t) + \overline{v}_D(\overline{r}_D^i, t)$$

es decir, que la velocidad v_{DI} no depende de los puntos propios r_I^i, r_D^i concretos en un instante t determinado y es la misma para todos ellos en dicho mismo instante.

2-Aceleración de Centrífuga.



El dibujo muestra un péndulo que reposa sobre un disco que está girando. La masa del extremo del péndulo está en reposo para un observador que gira con el disco.

En este caso podemos suponer que nuestros sistemas de referencia I, A y D comparten el mismo origen de coordenadas en el centro del disco.

Dado que el origen de coordenadas es siempre el mismo para I y D, y sus ejes son paralelos, en realidad I y D representan el mismo sistema de coordenadas en este caso, de modo que en las expresiones correspondientes de velocidad y aceleración podemos hacer $D=I$. Los ejes X,Y del sistema de coordenadas A giran con el disco y el eje Z, en la vertical, es común a I y a A. En la imagen, los dos sistemas de coordenadas coinciden instantáneamente.

La condición de reposo de la masa del péndulo en el sistema de coordenadas A supone que desde el sistema de coordenadas inercial $I=D$ tenemos

$$\overline{a}_D = \overline{w} \times (\overline{w} \times \overline{r})$$

que corresponde a una aceleración dirigida hacia el centro del disco y que justifica para el observador I el movimiento circular (centrípeto) de dicha masa. Para el observador inercial la 2ª Ley de Newton será

$$\overline{F}_I = m\overline{w} \times (\overline{w} \times \overline{r}) = \overline{P} + \overline{T}$$

es decir, la fuerza total debe ser proporcionada por el peso (P) y la tensión de la cuerda (T). Para el observador no inercial que utiliza el sistema de coordenadas A la masa del péndulo no se mueve y una aplicación directa de la 2ª Ley de Newton resultaría en una fuerza nula y por tanto P y T deben sumar 0. Dos consecuencias incompatibles del mismo fenómeno no es lo que se espera de una ley física. Evidentemente la ecuación planteada desde el sistema inercial es la correcta y se puede contrastar experimentalmente la existencia de un ángulo entre P y T. Este hecho puede ser interpretado por el observador en A como una peculiaridad de su sistema de coordenadas. Todos los objetos libres en el sistema de coordenadas A tienen tendencia a alejarse centro del disco (centrífuga) de modo que para mantenerles en reposo se les debe aplicar una fuerza que compense su tendencia centrífuga. Por tanto si la masa del péndulo está en reposo es por que la resultante de las fuerzas P y T

compensa la tendencia centrífuga. Por tanto mientras P y T compensen el efecto centrífugo no habrá aceleración para el observador A

$$\vec{F}_A = m\vec{a}_A = \vec{P} + \vec{T} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

para el caso en que no hay aceleración la ecuación anterior da el resultado correcto. En caso de que A detecte aceleración, si el péndulo empieza a oscilar por ejemplo, la ecuación será correcta pero incompleta a falta del término de la aceleración de Coriolis:

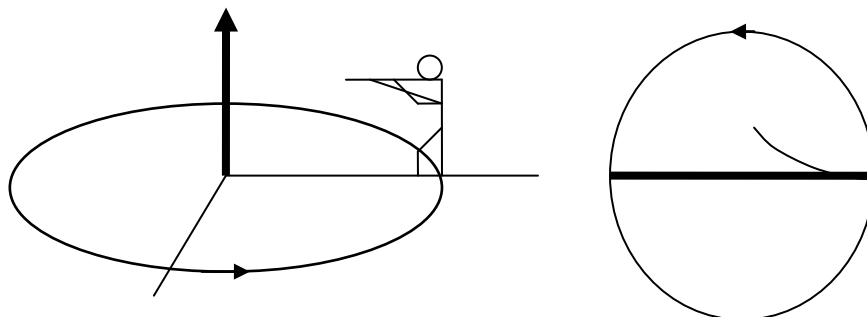
$$\vec{F}_A = m\vec{a}_A = \vec{P} + \vec{T} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_A$$

En un caso en que las fuerzas reales P y T sumen cero tenemos

$$\vec{a}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_A = 0 = \vec{a}_I$$

es decir, la aceleración de la masa respecto de un sistema inercial es 0, lo cual se ajusta a la 2ª Ley de Newton con resultante nula de las fuerzas aplicadas.

3-Aceleración de Coriolis.



Un tirador sobre la periferia de un disco que gira dispara a un blanco en el eje de giro, tal como muestra el dibujo. En este caso podemos suponer que nuestros sistemas de referencia I, A y D comparten el mismo origen de coordenadas en el centro del disco. Dado que el origen de coordenadas es siempre el mismo para I y D, y sus ejes son paralelos, en realidad I y D representan el mismo sistema de coordenadas en este caso, de modo que en las expresiones correspondientes de velocidad y aceleración podemos hacer D=I. Los ejes x,y del sistema de coordenadas A giran con el disco y el eje Z, en la vertical, es común a I y a A. En la imagen, los dos sistemas de coordenadas coinciden instantáneamente.

En el instante t=0 la bala sale disparada y el observador inercial medirá una velocidad

$$\vec{v}_I = \vec{\omega} \times \vec{r}(0) + \vec{v}_A(0)$$

Si suponemos que la bala no está afectada posteriormente por mas fuerzas, entonces la velocidad de la bala debe mantenerse en el sistema de coordenadas inercial I. Por tanto, para el siguiente instante de tiempo T,

correspondiente al periodo de giro, en que los sistemas de coordenadas I y A vuelvan a coincidir instantáneamente tenemos

$$\bar{w} \times \bar{r}(0) + \bar{v}_A(0) = \bar{w} \times \bar{r}(T) + \bar{v}_A(T) \rightarrow \bar{v}_A(T) = \bar{v}_A(0) + \bar{w} \times (\bar{r}(0) - \bar{r}(T))$$

por tanto, juzgado por el observador en A (el tirador) aparece una desviación transversal en la velocidad inicial de la bala hacia el blanco. Este incremento de velocidad está provocado por la *aceleración de Coriolis*

$$-2\bar{w} \times \bar{v}_A$$

y provoca, juzgado por el observador A, una curvatura en la trayectoria de la bala que la aleja del diámetro correspondiente, tal como aparece en la imagen del disco vista desde arriba.

Es posible analizar también un movimiento diferencial. Para ello debemos considerar un sistema de coordenadas I' en reposo respecto de I, de modo que en el instante t I coincide con A y en el instante t+dt I' coincide con A. Para t=0 tendremos

$$\bar{v}'_A(dt) = \bar{v}_A(0) + \bar{w} \times (\bar{r}(0) - \bar{r}'(dt))$$

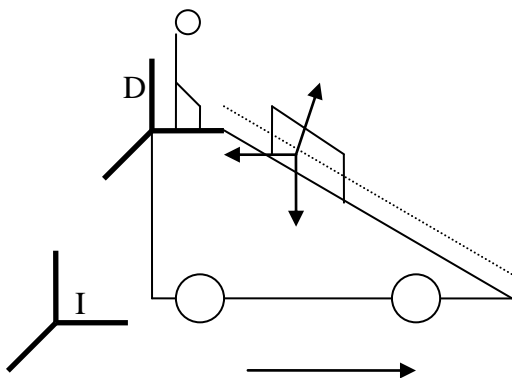
Hay que modificar las expresiones de v'_A y r'(dt). El vector r' corresponderá a otro r(dt) en el sistema de coordenadas I de modo que la relación entre ellos es un giro elemental de valor -dθ. De modo similar ocurre con v'

$$\bar{M}(-d\theta)\bar{v}'_A(dt) = \bar{v}_A(0) + \bar{w} \times (\bar{r}(0) - \bar{M}(-d\theta)\bar{r}(dt))$$

$$\bar{M}(-d\theta) = \begin{pmatrix} 1 & d\theta & 0 \\ -d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde en la matriz de giro M se ha hecho la aproximación correspondiente para ángulos pequeños.

4-Aceleración de desplazamiento inercial (a_{DI})



El aparato del dibujo es un plano inclinado que se mueve con una aceleración constante a_{DI} hacia la derecha respecto de nuestro sistema de coordenadas inercial. Respecto a un observador solidario al plano inclinado que utiliza el sistema de coordenadas D, el bloque cae en contacto con dicho plano y por tanto siguiendo una línea recta. En este caso el sistema de coordenadas A visto en la antes coincide con el D. Según la

expresión general de la 2ª Ley de Newton, el observador D puede plantear la siguiente ecuación

$$m\bar{a}_D = \left(\sum_i \bar{F}_i \right) - m\bar{a}_{DI}$$

el lector puede ver la representación de las fuerzas reales que actual sobre el bloque: gravedad y fuerza de contacto normal al plano y de la componente inercial asociada a la aceleración del plano inclinado respecto de I cambiada de signo. El observador D puede continuar el análisis geométrico con este sistema de vectores basándose en la trayectoria que el bloque sigue en D, de modo que la aceleración neta del bloque que cae es en la dirección paralela a la pendiente del plano y en la dirección perpendicular la resultante de la suma de vectores debe anularse.

7-Cinemática del sólido rígido.

En lo anterior hemos relacionado el movimiento relativo de una partícula material en distintos sistemas de referencia. Vamos ahora a considerar un conjunto de partículas materiales con la característica de que para cualquier par de partículas, la distancia relativa entre ellas no se modifica durante el movimiento de dicho conjunto. En estas condiciones buscamos los *campos* de velocidades y aceleraciones asociados al sólido rígido.

Recuperando los sistemas *D* y *A*, suponemos que *A* es un *sistema de coordenadas intrínseco de un sólido rígido*, es decir, los ejes coordenados de *A* están unidos rígidamente a dicho sólido rígido. En esta situación, evidentemente la velocidad y aceleración de los puntos de dicho sólido respecto de *A* es nula ya que las coordenadas de un punto del sólido no varían con el tiempo en el sistema de coordenadas intrínseco al sólido, y por tanto

$$\begin{aligned} \bar{v}_D &= \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \bar{a}_D &= \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \end{aligned}$$

de modo que quedan eliminadas las referencias al sistema de coordenadas intrínseco *A* y tenemos una relación directa entre los puntos del sólido rígido y el sistema de coordenadas *D*. Este sistema *D*, tal como fue introducido, se caracteriza por ser paralelo al sistema de coordenadas *I* y por que su eje *Z* coincide con el eje de rotación instantáneo del sólido rígido. Seguimos sin considerar el movimiento de precesión y por tanto el eje instantáneo de rotación es una recta que no cambia de dirección con el tiempo.

Primer invariante cinemático del sólido rígido

Si tomamos la expresión de la velocidad para dos puntos distintos (1,2) del sólido rígido y restamos, dada la linealidad del producto vectorial tenemos

$$\bar{v}(\bar{r}_1, t) - \bar{v}(\bar{r}_2, t) = \bar{\omega} \times (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

Esta expresión es válida para cualquier sólido rígido y en cualquier sistema de coordenadas. Para ver el carácter invariante basta sustituir la expresión de la transformación de velocidades entre sistemas de coordenadas de la sección 3:

$$\bar{v}'(\bar{r}'_1, t) - \bar{v}'(\bar{r}'_2, t) + \bar{w}_0 \times (\bar{r}'_1 - \bar{r}'_2) = \bar{w} \times (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

y dado que la diferencia de vectores de posición (r) corresponde a un mismo vector con origen la partícula 2 y punta en la partícula 1 tenemos

$$\begin{aligned} \bar{v}'(\bar{r}'_1, t) - \bar{v}'(\bar{r}'_2, t) &= \bar{w}' \times (\bar{r}'_1 - \bar{r}'_2) \\ \bar{w}' &= \bar{w}_0 + \bar{w} \end{aligned}$$

que con la composición de velocidades angulares correspondiente, es la misma ley. Si nuestro sistema de coordenadas I es inercial y transformamos el invariante a otro sistema inercial I', dado que los sistemas inerciales no giran entre sí será $\omega_0 = 0$ y por tanto $\omega = \omega'$. En otras palabras, la velocidad angular del sólido es invariante entre sistemas de coordenadas inerciales, y en general, entre sistemas de coordenadas que no giren entre sí.

Segundo invariante cinemático del sólido rígido

Multiplicando escalarmente por la velocidad angular el primer invariante cinemático tenemos, utilizando las propiedades del producto mixto

$$\bar{w} \bullet (\bar{v}(\bar{r}_1, t) - \bar{v}(\bar{r}_2, t)) = \bar{w} \bullet (\bar{w} \times (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)) = 0$$

$$\bar{w} \bullet \bar{v}(\bar{r}_1, t) = \bar{w} \bullet \bar{v}(\bar{r}_2, t) = cte(t)$$

es decir, el producto escalar de la velocidad angular por la velocidad de una partícula del sólido rígido es, en un instante determinado, igual para todas las partículas del sólido. Evidentemente este resultado también es aplicable en cualquier sistema de coordenadas.

Eje instantáneo de rotación

El segundo invariante cinemático es un producto escalar que se puede expresar como el producto de los módulos de la velocidad angular y la velocidad lineal por el coseno del ángulo que forman estos vectores. Por tanto podemos ver que los puntos del sólido de menor velocidad deben tener una velocidad en la misma dirección que la velocidad angular, esto es, en la misma dirección que el eje instantáneo de rotación. Si r_o y v_o a representan la posición y velocidad de un punto determinado del sólido en un instante t tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{w} \times \bar{v}(\bar{r}, t) = \bar{w} \times \bar{v}(\bar{r}_o, t) + \bar{w} \times (\bar{w} \times (\bar{r} - \bar{r}_o)) \rightarrow \\ &\bar{w} \times \bar{v}(\bar{r}_o, t) + \bar{w}(\bar{w} \bullet (\bar{r} - \bar{r}_o)) - w^2(\bar{r} - \bar{r}_o) \rightarrow \\ \bar{r} &= \bar{r}_o + \frac{1}{w^2} \bar{w} \times \bar{v}(\bar{r}_o, t) + \lambda \bar{w}; \quad \lambda = \frac{\bar{w} \bullet (\bar{r} - \bar{r}_o)}{w^2} \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación de una recta que representa el eje instantáneo de rotación. Dependiendo del sistema de coordenadas y del movimiento del sólido, es posible que la recta del eje de rotación no pase por ningún punto del sólido. La ecuación del eje de rotación es válida en cualquier sistema de coordenadas. En particular, si en un sistema de coordenadas la velocidad del punto de referencia r_o es $v_o = 0$, entonces dicho punto cumple la ecuación del eje instantáneo de rotación; está en el eje instantáneo de rotación. De esta forma vemos que la localización y dirección del eje instantáneo de rotación solo pueden precisarse en el contexto del sistema de coordenadas que utilicemos.

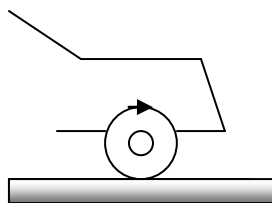
Descomposición canónica del movimiento del sólido rígido

Tenemos un sólido rígido moviéndose en el contexto de un sistema de coordenadas inercial I1. El resultado anterior determina matemáticamente el eje instantáneo de rotación. La velocidad instantánea de los puntos del eje instantáneo de rotación es la misma para todos ellos en módulo y dirección. Por tanto podemos asociar a este eje instantáneo de rotación un sistema de coordenadas inercial I2 de modo que en I2 los puntos del dicho eje estén, instantáneamente, en reposo. Si buscamos la velocidad de un punto determinado del sólido, aplicando la ley de composición de velocidades tenemos

$$\bar{v}_{I1} = \bar{v}_{I1-I2} + \bar{v}_{I2} \equiv \bar{v}_{I1-I2}(t) + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

donde la velocidad v_{I1-I2} corresponde al desplazamiento entre sistemas de coordenadas inerciales y v_{I2} es la velocidad de una partícula que gira instantáneamente respecto a un eje en reposo. Por tanto el movimiento general de un sólido rígido resulta equivalente a una rotación pura alrededor del eje instantáneo de rotación más una traslación.

8-Visualización y ejemplos.



Un coche se desplaza a velocidad constante sobre el arcén. Percibido por un observador en el arcén el punto de contacto instantáneo entre la rueda y suelo está, instantáneamente, en reposo. Por tanto para dicho observador el eje instantáneo de rotación pasa por el punto de contacto con el suelo y por tanto se desplaza a medida que la rueda avanza. Los sucesivos ejes de rotación son paralelos y en la dirección perpendicular al dibujo. Algo parecido pasa cuando andamos: durante el tiempo que la planta del pie está en el suelo la velocidad del pie es nula respecto del suelo y giramos respecto de este punto de apoyo. La articulación del tobillo es la que soporta este giro. Sin embargo para un observador dentro del coche, son los puntos del eje de la rueda los que están en reposo y por tanto el eje instantáneo de rotación es el eje de la rueda.

II – DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO.

1-Introducción.

Clásicamente sabemos que podemos dividir la materia rompiendo las fuerzas internas que la mantienen unida, como el caso de un martillo que desmenuza una piedra, un hacha que tala un árbol. Como el martillo que desmenuza la piedra nos muestra, podemos llegar a descomponer la piedra hasta granos lo suficientemente pequeños para llamarlos partículas. El lector no debe confundir el concepto clásico de partícula por el de átomo. Una partícula clásica es un objeto lo bastante pequeño como para que cumpla las leyes mecánicas más elementales: las tres leyes de Newton; pero no tan pequeño como para que se ponga de manifiesto el comportamiento cuántico.

Por tanto, desde el punto de vista clásico sabemos que la materia se comporte de partículas o fragmentos más pequeños. En el caso del sólido rígido debemos suponer también que estas partículas se mantienen unidas por medio de fuerzas internas, de modo que se mantengan las distancias relativas entre ellas independientemente del movimiento del sólido.

El centro de masas de un sistema de partículas es un concepto muy útil en el estudio de la dinámica de un sistema de partículas y en especial, como veremos, para el caso del sólido rígido. El centro de masas de un sistema de partículas se define por la expresión

$$\bar{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{M}; \quad M = \sum_i m_i$$

donde el índice i numera cada partícula del sistema, que tiene asociada una masa y una posición determinada. La masa M es la masa total del sistema. Podemos suponer que las fuerzas que unen las distintas partículas son de naturaleza *química* y por tanto resulta aplicable la ley de conservación de la masa de *Lavoisier*. “En una reacción química ordinaria la masa permanece constante, es decir, la masa consumida de los reactivos es igual a la masa obtenida de los productos”. Por tanto clásicamente podemos considerar la masa como una magnitud siempre conservada y por tanto la masa total de sistema M es igual a la suma de las masas de todas las partículas.

En el desarrollo que viene a continuación se utilizarán las propiedades del producto mixto y el doble producto vectorial:

para cualesquiera vectores $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$

$$\begin{aligned} \bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) &= (\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} = (\bar{C} \times \bar{A}) \cdot \bar{B} && \text{producto mixto} \\ \bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) &= (\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C} && \text{doble producto vectorial} \end{aligned}$$

2-Teoremas básicos sobre el centro de masas.

Fuerzas sobre un sistema de partículas y centro de masas

Sobre una partícula, numerada por i , se aplican las fuerzas externas al sistema y las fuerzas internas causadas por otras partículas del sistema numeradas por j . La suma de todas estas fuerzas debe cumplir la 2ª Ley de Newton

$$\vec{F}_i^{Total} = \vec{F}_i^{Externa} + \sum_j \vec{F}_{ij}^{Interna} = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

Sumando la expresión anterior en todo el índice i tenemos

$$\sum_i \vec{F}_i^{Total} = \sum_i \vec{F}_i^{Externa} + \sum_{ij} \vec{F}_{ij}^{Interna} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right)$$

El índice combinado ij es el producto cartesiano del índice i por si mismo. Si ordenamos el sumatorio en grupos $\{ij\}$ de modo que cada grupo se compone de los pares (i,j) y (j,i) , consideramos aplicable la 3ª Ley de Newton $F_{ij} = -F_{ji}$ y suponemos que la fuerza de una partícula sobre si misma es cero: $F_{ii} = 0$; entonces todos los grupos $\{ij\}$ suman cero y por tanto el sumatorio correspondiente se anula. Aplicando la definición del centro de masas resulta

$$\sum_i \vec{F}_i^{Externa} = M \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = M \vec{a}_{CM}$$

La resultante de las fuerzas externas equivale a la masa del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masas.

Impulso mecánico de un sistema de partículas referido al centro de masas. Sistema de coordenadas centro de masas.

Recuperando el desarrollo sobre la velocidad relativa, podemos asignar como sistema A a un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de masas. Mantenemos el sistema I como inercial y el sistema D en desplazamiento relativo a I y compartiendo origen de coordenadas con el centro de masas de modo que tenemos

$$\vec{v}_I = \vec{v}_{DI}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{CM}$$

cambiando de notación, utilizando los superíndices para indicar el sistema de coordenadas y los subíndices para identificar una partícula i podemos poner

$$\vec{v}_i^{-I} = \vec{v}_{cm}^{-I}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{-DI} + \vec{v}_i^{-CM}$$

donde el primer término del segundo miembro corresponde a la velocidad del punto centro de masas. Si multiplicamos la expresión anterior por la masa de la partícula i y dividimos por la masa total tenemos

$$\frac{d\bar{r}_{cm}^{-I}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \bar{v}_i^{-I}}{M} = \frac{\sum_i m_i}{M} \bar{v}_{cm}^{-I}(t) + \bar{\omega} \times \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i^{-DI}}{M} + \frac{\sum_i m_i \bar{v}_i^{-CM}}{M}$$

dado que la masa total corresponde a la suma de masas de las partículas la velocidad del centro de masas respecto al sistema I cancela a los dos lados de la igualdad. Además el factor de la velocidad angular corresponde a la posición del centro de masas en un sistema de coordenadas DI con origen el centro de masas, por lo que este valor tiene que ser (0,0,0) y el término correspondiente se anula. Como conclusión tenemos

$$\sum_i m_i \bar{v}_i^{-CM} = \sum_i \bar{p}_i^{-CM} = 0$$

es decir, referido a un sistema de coordenadas cuyo origen es el centro de masas el impulso mecánico neto de un conjunto de partículas es nulo en cualquier instante de tiempo. Este resultado es general y no depende de si el sistema de coordenadas asociado al punto CM gira o no respecto del sistema de coordenadas inercial de referencia. Mas adelante utilizaremos por conveniencia un sistema de coordenadas con origen en el centro de masas que no gira respecto del sistema de coordenadas inercial de referencia.

Energía mecánica de un sistema de partículas y centro de masas

La energía intercambiada por la partícula i-esima corresponde al trabajo de la fuerza neta que actúa sobre dicha partícula, que a su vez debe ser igual a la variación de energía cinética de dicha partícula según la 2ª Ley de Newton

$$dW_i = \bar{F}_i^{Total} \cdot d\bar{r}_i = \left(\bar{F}_i^{Externa} + \sum_j \bar{F}_{ij}^{Interna} \right) \cdot d\bar{r}_i = m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot d\bar{r}_i = d\left(\frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^{-2} \right)$$

sumando todas las contribuciones

$$dW^{Total} = \sum_i dW_i = \sum_i \bar{F}_i^{Externa} \cdot d\bar{r}_i + \sum_{ij} \bar{F}_{ij}^{Interna} \cdot d\bar{r}_i = d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^{-2} \right)$$

Nos fijamos en el término del trabajo debido a fuerzas internas, sumando en grupos {ij} y aplicando la 3ª Ley de Newton

$$\sum_{ij} \bar{F}_{ij}^{Interna} \cdot d\bar{r}_i = \sum_{\{ij\}} \bar{F}_{ij}^{Interna} \cdot d\bar{r}_i + \bar{F}_{ji}^{Interna} \cdot d\bar{r}_j = \sum_{\{ij\}} \bar{F}_{ij}^{Interna} \cdot (d\bar{r}_i - d\bar{r}_j) \rightarrow$$

Para el caso del sólido rígido podemos aplicar el invariante cinemático vectorial y continuar la expresión anterior de este modo

$$\rightarrow \sum_{\{ij\}} \bar{F}_{ij}^{Interna} \cdot dt(\bar{v}_i - \bar{v}_j) = \sum_{\{ij\}} \bar{F}_{ij}^{Interna} \cdot dt(\bar{\omega} \times (\bar{r}_i - \bar{r}_j)) = \bar{\omega} dt \cdot \left(\sum_{\{ij\}} (\bar{r}_i - \bar{r}_j) \times \bar{F}_{ij}^{Interna} \right)$$

Si consideramos que la fuerza entre las partículas i, j es paralela a la línea recta que las une, entonces la expresión anterior asociada al trabajo de las fuerzas internas se anula completamente. Hay que decir que esta hipótesis sobre la dirección de las fuerzas internas no es aplicable en general en caso de *comportamiento elástico* del sistema o si este presenta cierta *viscosidad* o *rozamiento interno*. En concreto el concepto de *esfuerzo* o *tensión cortante*, en el contexto de la elasticidad, supone que la fuerza entre elementos de materia no está en la línea que les une. Cuando un sólido elástico es sometido a tensión es posible que acumule cierta cantidad de *energía interna* por esta vía de modo que a mayor tensión las fueras de acción-reacción internas se van separando mas de las líneas que unen dos partículas. El caso del sólido rígido supone este efecto nulo o despreciable, por lo que no contaremos con él. El trabajo sobre el sistema queda así:

$$dW^{Total} = \sum_i \vec{F}_i^{Externa} \cdot d\vec{r}_i = d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) \rightarrow$$

$$\Delta W^{Total} = \sum_i \int \vec{F}_i^{Externa} \cdot d\vec{r}_i = \Delta\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

donde la segunda expresión es la forma integral de la primera. El término de trabajo asociado a las fuerzas externas incluye, por supuesto, fuerzas conservativas y no conservativas.

Nos fijaremos ahora en el término asociado a la energía cinética en la expresión anterior. Suponemos que nuestro sistema de coordenadas, que llamaremos sistema de coordenadas *Laboratorio*, es inercial. Podemos imaginar otro sistema de coordenadas con origen en el punto centro de masas de modo que este punto esté *siempre* en reposo relativo: lo llamaremos *sistema de coordenadas del centro de masas*. Según el efecto de las fuerzas externas al sistema, el centro de masas se moverá de forma acelerada o sin aceleración, con lo cual el sistema de coordenadas del centro de masas puede ser o no ser inercial. Además *exigimos* que los ejes del sistema de coordenadas del centro de masas se mantienen siempre paralelos a los de nuestro sistema de coordenadas, o mas generalmente no giran relativamente. En estas circunstancias la velocidad de cualquier partícula cumple

$$\vec{v}_i^{-LAB} = \vec{v}_{cm}^{-LAB}(t) + \vec{v}_i^{-CM}$$

donde el superíndice *LAB* indica nuestro sistema de coordenadas, el superíndice *CM* indica el sistema de coordenadas del centro de masas y los subíndices i y cm indican la partícula, numerada por i , y el punto del centro de masas respectivamente. La energía cinética E_{c-i} para la partícula i es

$$E_{c-i}^{LAB}(t) = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm}^{-LAB} + \vec{v}_i^{-CM})^2$$

Desarrollando el cuadrado y sumando en el índice i

$$\sum_i E_{c-i}^{LAB}(t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{v}_{cm}^{-LAB})^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{v}_i^{-CM})^2 + \sum_i m_i (\bar{v}_{cm}^{-LAB} \bullet \bar{v}_i^{-CM})^2$$

La condición de ejes paralelos entre el sistema LAB y el sistema CM hace que \bar{v}_{cm}^{-LAB} solo dependa del tiempo y no de la coordenada de la partícula, es decir, es \bar{v}_{cm}^{-LAB} es igual para todas las partículas i en un instante t determinado; lo cual permite hacerlo factor común

$$\begin{aligned} \sum_i E_{c-i}^{LAB}(t) &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) (\bar{v}_{cm}^{-LAB})^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{v}_i^{-CM})^2 + \bar{v}_{cm}^{-LAB} \bullet \left(\sum_i m_i \bar{v}_i^{-CM} \right) \\ E_{c-total}^{LAB}(t) &= \frac{1}{2} M (\bar{v}_{cm}^{-LAB})^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{v}_i^{-CM})^2 \end{aligned}$$

vemos que el término asociado al impulso mecánico de las partículas respecto del centro de masas es nulo, ya que se puede reducir a la velocidad del punto centro de masas respecto del sistema de coordenadas centro de masas. En resumen, la energía cinética total del sistema de partículas en un instante t es la suma de la energía cinética del centro de masas y de la energía cinética del sistema de partículas respecto al sistema de coordenadas del centro de masas.

Por tanto la ecuación completa correspondiente a la conservación de la energía en un sólido rígido es, en términos integrales:

$$\boxed{\sum_i \int \bar{F}_i^{Externa} \bullet d\bar{r}_i = \Delta \left(\frac{1}{2} M (\bar{v}_{cm}^{-LAB})^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{v}_i^{-CM})^2 \right)}$$

es decir, el trabajo de las fuerzas externas medido desde el sistema de coordenadas del laboratorio es igual a la variación de la energía cinética total del sistema.

Momento angular de un sistema de partículas y centro de masas

El momento angular de una partícula del sistema numerada por i puede escribirse, utilizando el sistema de coordenadas centro de masa como

$$\bar{L}_i^{-LAB} = \bar{r}_i^{-LAB} \times m_i \bar{v}_i^{-LAB} = m_i (\bar{r}_{cm}^{-LAB} + \bar{r}_i^{-CM}) \times (m_i \bar{v}_{cm}^{-LAB} + m_i \bar{v}_i^{-CM})$$

Extendiendo el producto, sumando y factorizando convenientemente, como en el caso de la energía, para todas las partículas tenemos

$$\sum_i \bar{L}_i^{-LAB} = \left(\sum_i m_i \right) \bar{r}_{cm}^{-LAB} \times \bar{v}_{cm}^{-LAB} + \bar{r}_{cm}^{-LAB} \times \left(\sum_i m_i \bar{v}_i^{-CM} \right) + \left(\sum_i m_i \bar{r}_i^{-CM} \right) \times \bar{v}_{cm}^{-LAB} + \sum_i \bar{r}_i^{-CM} \times m_i \bar{v}_i^{-CM}$$

vemos que los dos sumatorios centrales a la derecha de la igualdad pueden reconducirse a la posición y velocidad del centro de masas referidos al propio sistema de coordenadas centro de masa, lo cual anula dichos términos resultando

$$\overline{L}_{total}^{LAB}(t) = \overline{r}_{cm}^{LAB} \times M \overline{v}_{cm}^{LAB} + \sum_i \overline{r}_i^{CM} \times m_i \overline{v}_i^{CM}$$

es decir : el momento angular total del sistema calculado respecto de un punto fijo del laboratorio, se puede descomponer en la suma del momento angular del centro de masas respecto de dicho punto fijo en el laboratorio y el momento angular del sistema de partículas respecto al centro de masas.

Momento de fuerzas en un sistema de partículas y centro de masas

El momento de la fuerza aplicada a una partícula *i* del sistema es

$$\overline{M}_i^{LAB}(t) = \overline{r}_i^{LAB} \times \overline{F}_i^{LAB} = (\overline{r}_{cm}^{LAB} + \overline{r}_i^{CM}) \times (\overline{F}_{i-ext}^{LAB} + \sum_j \overline{F}_{ij}^{LAB})$$

Se ha introducido la posición del centro de masas y la distinción entre fuerzas externas e internas aplicadas a la partícula *i*. Note el lector que *r_i* se refiere al punto de aplicación de una fuerza, que para el caso de una partícula corresponde con la posición de dicha partícula. Note también que en este caso en realidad solo se utiliza la definición del punto centro de masas, no se utiliza el movimiento relativo entre el sistema de coordenadas centro de masa y el sistema laboratorio; por tanto la notación utilizada *r^{CM}_i* puede inducir a confusión en este caso ya que antes la hemos utilizado para medidas respecto del sistema centro de masas. Sin embargo la notación quedará justificada posteriormente. Extendiendo el producto y sumando para todas las partículas tenemos

$$\sum_i \overline{M}_i^{LAB}(t) = \overline{r}_{cm}^{LAB} \times (\sum_i \overline{F}_i^{LAB}) + \overline{r}_{cm}^{LAB} \times (\sum_{ij} \overline{F}_{ij}^{LAB}) + (\sum_i \overline{r}_i^{CM} \times \overline{F}_{i-ext}^{LAB}) + (\sum_{ij} \overline{r}_i^{CM} \times \overline{F}_{ij}^{LAB})$$

El segundo sumatorio a la derecha de la igualdad es nulo según la 3ª ley de Newton, ya que los sumandos cancelan simétricamente, por ejemplo *F₁₂*=-*F₂₁* ; por tanto el término correspondiente se anula. El último sumatorio a la derecha del signo es una suma sobre el índice compuesto *ij* sobre todos los pares ordenados (i,j). Podemos igualmente hacer la suma sobre grupos de números; así el grupo {1,2} corresponde a los pares (1,2) y (2,1).

$$\sum_{\{ij\}} \overline{r}_i^{CM} \times \overline{F}_{ij}^{LAB} + \overline{r}_j^{CM} \times \overline{F}_{ji}^{LAB} = \sum_{\{ij\}} (\overline{r}_i^{CM} - \overline{r}_j^{CM}) \times \overline{F}_{ij}^{LAB}$$

donde hemos aplicado la 3ª Ley de Newton como se ha presentado antes. Evidentemente el grupo {1,2} es igual que el grupo {2,1} y no debemos sumar dos veces lo mismo.

Si consideramos que la fuerza entre las partículas *i,j* es paralela a la línea recta que las une, entonces la expresión anterior se anula completamente resultando

$$\overline{M}_{total}^{LAB}(t) = \overline{r}_{cm}^{LAB} \times \overline{F}_{ext}^{LAB} + \sum_i \overline{r}_i^{CM} \times \overline{F}_{i-ext}^{LAB}$$

De forma similar al caso de la energía, esta hipótesis sobre la dirección de las fuerzas internas no es aplicable en general, solo para el caso de sólido rígido que no es capaz de acumular energía elástica o de disipar energía por rozamiento interno. Sin embargo note el lector que ahora se trata de momentos de fuerza internos, no de energía. El concepto correspondiente en elasticidad es el de *momento flector*.

El lector puede comprobar rápidamente que, para nuestro caso de sólido rígido, el momento total de fuerzas corresponde a la derivada del momento angular total del sistema y se verifica

$$\overline{M}_{total}^{LAB}(t) = \frac{d}{dt} \overline{L}_{total}^{LAB}(t) = \overline{r}_{cm}^{-LAB} \times M \overline{a}_{cm}^{-LAB} + \frac{d}{dt} \sum_i \overline{r}_i^{-CM} \times m_i \overline{v}_i^{-CM}$$

y comparando con la expresión anterior tenemos

$$\boxed{\overline{M}_{externo}^{CM}(t) = \frac{d}{dt} \sum_i \overline{r}_i^{-CM} \times m_i \overline{v}_i^{-CM} = \frac{d}{dt} \overline{L}_{total}^{CM}(t)}$$

En un sólido rígido, la resultante del momento de las fuerzas externas, calculado respecto al punto centro de masa (en el sistema de coordenadas centro de masa), es igual a la derivada en el tiempo del momento angular total del sistema calculado también respecto al centro de masa (en el sistema de coordenadas centro de masa). Note el lector que la coherencia exige evaluar momentos angulares y de fuerza siempre respecto de un mismo punto de referencia en el mismo sistema de coordenadas. En el caso de la última expresión el punto de referencia es el centro de masas.

3-Momento angular de un sólido rígido respecto a su centro de masas.

El centro de masas de un sólido rígido puede considerarse como un punto del sólido rígido.

La propiedad definitoria del sistema de partículas que forman un sólido rígido es que mantienen constantes sus distancias relativas independientemente del estado de movimiento del sistema. Podemos ver que el centro de masas de un sólido rígido cumple esta condición; si numeramos con k una partícula arbitraria del sólido rígido tenemos

$$\overline{r}_{CM} - \overline{r}_k = \frac{\sum_i m_i \overline{r}_i}{\sum_i m_i} - \overline{r}_k = \frac{\sum_i m_i (\overline{r}_i - \overline{r}_k)}{M} \rightarrow$$

$$M^2 (\overline{r}_{CM} - \overline{r}_k)^2 = \left(\sum_i m_i (\overline{r}_i - \overline{r}_k) \right)^2$$

la última expresión corresponde a la distancia al cuadrado entre una partícula k arbitraria del sólido rígido y su centro de masas multiplicado por el cuadrado de

la masa del sólido, que es constante. Si derivamos respecto al tiempo esta expresión

$$M^2 \frac{d}{dt} (\bar{r}_{CM} - \bar{r}_k)^2 = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i (\bar{r}_i - \bar{r}_k) \right)^2 = 2 \left(\sum_i m_i (\bar{r}_i - \bar{r}_k) \right) \cdot \left(\sum_i m_i (\bar{v}_i - \bar{v}_k) \right)$$

aplicando el invariante cinemático vectorial podemos continuar la expresión así

$$M^2 \frac{d}{dt} (\bar{r}_{CM} - \bar{r}_k)^2 = 2 \left(\sum_i m_i (\bar{r}_i - \bar{r}_k) \right) \cdot \left(\sum_i m_i \bar{\omega} \times (\bar{r}_i - \bar{r}_k) \right) = 2 \sum_{ij} m_i m_j (\bar{r}_i - \bar{r}_k) \cdot (\bar{\omega} \times (\bar{r}_j - \bar{r}_k))$$

Sumando en grupos $\{ij\}$

$$\sum_{ij} m_i m_j (\bar{r}_i - \bar{r}_k) \cdot (\bar{\omega} \times (\bar{r}_j - \bar{r}_k)) = \sum_{\{ij\}} m_i m_j (\bar{r}_i - \bar{r}_k) \cdot (\bar{\omega} \times (\bar{r}_j - \bar{r}_k)) + m_j m_i (\bar{r}_j - \bar{r}_k) \cdot (\bar{\omega} \times (\bar{r}_i - \bar{r}_k))$$

aplicando las propiedades del producto mixto de vectores tenemos

$$\sum_{\{ij\}} m_i m_j (\bar{r}_i - \bar{r}_k) \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{r}_j - \bar{r}_k) + (\bar{r}_j - \bar{r}_k) \times \bar{\omega}] = 0$$

expresión que se anula debido a las propiedades del producto vectorial.

En conclusión la distancia entre el centro de masa de un sólido rígido y cualquiera de las partículas de dicho sólido se mantiene constante. Dependiendo de la distribución de materia en el sólido rígido el centro de masas puede coincidir con una partícula del sólido o puede que no, sin embargo el centro de masas siempre estará localizado, respecto de un sistema de coordenadas intrínseco del sólido, en las mismas coordenadas. Por tanto el punto centro de masas de un sólido rígido puede considerarse cinemáticamente como un punto más del sólido rígido y evidentemente es un punto fijo, con velocidad nula, en el sistema de coordenadas del centro de masas. Por tanto respecto del sistema de coordenadas centro de masas el movimiento de un sólido rígido equivale a un giro respecto de un eje instantáneo de rotación que pasa siempre por el punto centro de masas. El movimiento total del sólido se puede describir como la composición de un desplazamiento del sistema de coordenadas centro de masas y un giro respecto del sistema de coordenadas centro de masas.

El tensor de inercia.

Dado que el centro de masas se puede considerar como un punto del sólido rígido se le puede aplicar la cinemática correspondiente. En particular, dado que el centro de masas está en reposo para un observador desde el sistema de coordenadas centro de masas, entonces para dicho observador el eje instantáneo de rotación del sólido siempre pasa por el punto centro de masas. Por tanto podemos expresar el momento angular respecto del sistema centro de masas así

$$\bar{L}_{total}^{CM} = \sum_i \bar{L}_i^{CM} = \sum_i \bar{r}_i^{CM} \times m_i (\bar{w} \times \bar{r}_i^{CM}) = \sum_i m_i (\bar{w} (\bar{r}_i^{CM})^2 - \bar{r}_i^{CM} (\bar{w} \bullet \bar{r}_i^{CM}))$$

dado que la velocidad de cada partícula es un giro puro respecto al eje de rotación instantáneo en reposo. Se han aplicado también las propiedades del doble producto vectorial.

En este punto estamos en la misma situación en que, históricamente, se empezó a concebir el concepto matemático de *tensor*. Tomando un sumando del sumatorio anterior, y expresando los vectores por sus componentes cartesianas tenemos

$$L_i^\alpha = m_i \left[w^\alpha r_i^2 - x_i^\alpha \sum_\beta w^\beta x_i^\beta \right] = m_i \left[\sum_\beta (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_i^\alpha x_i^\beta) w_\beta \right]$$

donde los super-índices α, β hacen referencias a las componentes cartesianas de la posición de la partícula numerada con “i” (con el significado $x_i = x_i^1, y_i = x_i^2, z_i = x_i^3$) en el sistema CM y la expresión $\delta_{\alpha\beta}$ o *delta de Kronecker* tiene el valor 1 si $\alpha = \beta$ y 0 si $\alpha \neq \beta$. ¿Qué hay de nuevo en esto? La novedad es que el valor de las componentes L_i^α se ha expresado en la misma forma matemática en que una matriz actúa sobre un vector, tal como vimos en la parte cinemática. Si denominamos *I* a esta “matriz” 3x3 tenemos

$$\bar{L}_i = \bar{I}_i \bar{w} ; I_i^{\alpha\beta} = m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_i^\alpha x_i^\beta)$$

Sin embargo *I* tiene un *significado físico muy distinto* al de las matrices que se han venido utilizando ya que no representa una transformación entre dos sistemas de coordenadas. Los vectores relacionados por *I*: *L* y *w*, son físicamente diferentes, se miden con distintas unidades, y los dos están definidos en el mismo sistema de coordenadas. Históricamente se denominó a este tipo de magnitudes *tensores* por que esta estructura matemática también aparece en el análisis de tensiones internas en sólidos elásticos. La teoría matemática actual concibe las matrices, vectores y escalares como tipos especiales de tensores.

Dado que se pueden aplicar las propiedades lineales de las matrices, aplicando la propiedad distributiva y en notación vectorial

$$\bar{L}_{total}^{CM} = \sum_i \bar{I}_i^{CM} \bar{w} = \left(\sum_i \bar{I}_i^{CM} \right) \bar{w} = \bar{I}_{total}^{CM} \bar{w}$$

$$I_{total}^{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_i^\alpha x_i^\beta)$$

Vemos claramente que los componentes del tensor de inercia *I* dependen exclusivamente de la distribución geométrica de la masa tal como se percibe desde el sistema de coordenadas centro de masa. Dado que el sólido rígido gira respecto del centro de masas, esta distribución en general varía con el tiempo, con lo que debemos considerar que el tensor de inercia varía con el tiempo

$$\boxed{\bar{L}_{total}^{CM}(t) = I_{total}^{CM}(t) \bar{w}(t)}$$

El tensor de inercia también aparece en la energía cinética del sólido rígido respecto de su centro de masas. Para la i -ésima partícula la energía respecto del centro de masas será, utilizando las propiedades del producto mixto:

$$E_i^{CM} = \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_i^{CM})^2 = \frac{1}{2} m_i (\bar{w} \times \bar{r}_i) \bullet (\bar{w} \times \bar{r}_i) = \frac{1}{2} m_i \bar{w} \bullet [\bar{r}_i \times (\bar{w} \times \bar{r}_i)] \rightarrow$$

$$E_i^{CM} = \frac{1}{2} \bar{w} \bullet \left(I_i^{CM} \bar{w} \right)$$

y aplicando las propiedades asociativas del producto escalar y de las matrices

$$E_{total}^{CM} = \sum_i E_i^{CM} = \sum_i \frac{1}{2} \bar{w} \bullet \left(I_i^{CM} \bar{w} \right) = \frac{1}{2} \bar{w} \bullet \left(\sum_i I_i^{CM} \bar{w} \right) = \frac{1}{2} \bar{w} \bullet \left[\left(\sum_i I_i^{CM} \right) \bar{w} \right] \rightarrow$$

$$E_{total}^{CM} = \frac{1}{2} \bar{w} \bullet \left[I_{total}^{CM} \bar{w} \right] \Rightarrow E_{total}^{CM}(t) = \frac{1}{2} \bar{w}(t) \bullet \bar{L}_{total}^{CM}(t)$$

La relación tensorial entre L y w supone que las direcciones de estos vectores no serán en general paralelas. De la definición del tensor de inercia vemos que es simétrico respecto de los índices α, β : $I^{\alpha\beta} = I^{\beta\alpha}$ en cualquier sistema de coordenadas, y en particular, en cualquier sistema de coordenadas con origen en el centro de masas. Esta simetría asegura la posibilidad de diagonalización del tensor de inercia. Esto significa que se puede encontrar un sistema de coordenadas cartesiano principal con origen en el centro de masas en el que las componentes $I^{\alpha\beta}$ con $\alpha \neq \beta$ son nulas, de forma que en dicho sistema la relación tensorial es

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I^{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{xx} w_x \\ I^{yy} w_y \\ I^{zz} w_z \end{pmatrix}$$

En general los ejes de este sistema de coordenadas principal son solidarios al sólido rígido, es decir, se trata de un sistema de coordenadas intrínseco del sólido. Evidentemente en un sistema de coordenadas intrínseco el sólido no gira, pero note el lector que las componentes del tensor de inercia son completamente independientes del giro del sólido rígido y solo dependen de la distribución espacial de materia en el sistema de coordenadas considerado. Aunque dependiendo de la simetría del sólido puede haber degeneración en los ejes. Hay casos en que podemos elegir dos ejes que no giren con el sólido y que unido al eje que si lo hace formen un sistema de coordenadas en el que I se mantenga en forma diagonal. El caso mas extremo de degeneración es una esfera homogénea, en la que cualquier sistema de tres ejes perpendiculares entre sí con origen en el centro de la esfera es un sistema de coordenadas principal.

Ecuaciones de Euler del sólido rígido

Combinando resultados anteriores tenemos

$$\overline{M}_{externo}^{CM}(t) = \frac{d}{dt} \overline{L}_{total}^{CM}(t) = \frac{d}{dt} \overline{I}_{total}^{=CM}(t) \overline{w}(t)$$

Veremos que la dependencia con el tiempo de esta ecuación puede simplificarse. La ecuación anterior es válida respecto del sistema de coordenadas centro de masa, sistema que por definición no gira respecto del sistema de coordenadas inercial de referencia. Sin embargo, podemos referir la ecuación anterior a un sistema de coordenadas intrínseco del sólido con origen en el centro de masa considerando el valor del vector L en este sistema intrínseco. Siempre podemos imaginar un instante t_0 en que los ejes del sistema intrínseco coinciden hasta la identidad con los ejes de nuestro sistema centro de masas. En este instante t_0 vamos a obtener que el valor del vector L en el sistema de coordenadas del centro de masas corresponde a la expresión

$$\overline{L}_{total}^{CM}(t_0) = \overline{I}_{total}^{=Intrins} \overline{w}^{CM}(t_0)$$

Donde hemos subrayado la velocidad angular como vector medido respecto al centro de masas. Esto es cierto no solo para una coincidencia respecto al sistema centro de masas, sino para coincidencias respecto al grupo formado por todos los sistemas de coordenadas con origen el centro de masas, orientados arbitrariamente y en reposo relativo permanente respecto al centro de masas. El vector velocidad angular w va a ser el mismo en todos los sistemas de coordenadas incluidos en este grupo, ya que se trata de sistemas que no giran relativamente entre si. Por tanto, para este grupo de sistemas de coordenadas se verifica la siguiente ecuación en cualquier instante

$$\overline{L}_{total}^{-G}(t) = \overline{I}_{total}^{=Intrins} \overline{w}^{-G}(t)$$

donde el índice G hace referencia al sistema de coordenadas del grupo que, en el instante arbitrario t coincide con el sistema intrínseco. Esto significa que las componentes de L y w en la expresión anterior son las proyecciones vistas desde G de dichos vectores sobre los ejes del sistema intrínseco. El lector no debe confundir estas proyecciones con el valor de L y w respecto del sistema de coordenadas intrínseco, ya que estos valores serían nulos pues en dicho sistema el sólido permanece en reposo permanentemente.

Podemos expresar este resultado respecto al sistema de coordenadas centro de masa aplicando la matriz de transformación T correspondiente

$$\overline{L}_{total}^{CM}(t) = T(t) \overline{L}_{total}^{-G}(t) = T(t) \left[\overline{I}_{total}^{=Intri} \overline{w}^{-G}(t) \right]$$

con lo que podemos derivar respecto del tiempo y obtener, aplicando resultados del apéndice matemático y resultados anteriores

$$\begin{aligned} \overline{M}_{externo}^{CM}(t) &= \frac{d}{dt} \overline{L}_{total}^{CM}(t) = \frac{d}{dt} \left[T(t) \left[\overline{I}_{total}^{Intri-G} \overline{w}(t) \right] \right] = \left[\frac{d}{dt} T(t) \right] T^{-1}(t) T(t) \left[\overline{I}_{total}^{Intri-G} \overline{w}(t) \right] + T(t) \left[\overline{I}_{total}^{Intri} \frac{d}{dt} \overline{w}^{-G}(t) \right] \Rightarrow \\ \overline{M}_{externo}^{CM}(t) &= \overline{w}^{-CM}(t) \times T(t) \left[\overline{I}_{total}^{Intri-G} \overline{w}(t) \right] + T(t) \left[\overline{I}_{total}^{Intri} \frac{d}{dt} \overline{w}^{-G}(t) \right] \end{aligned}$$

Si aplicamos a la expresión anterior la transformación inversa $T^{-1}(t)$ y utilizando las propiedades del producto vectorial tenemos

$$\begin{aligned} T^{-1}(t) \overline{M}_{externo}^{CM}(t) &= T^{-1}(t) \left[\overline{w}^{-CM}(t) \times T(t) \left[\overline{I}_{total}^{Intri-G} \overline{w}(t) \right] \right] + T^{-1}(t) T(t) \left[\overline{I}_{total}^{Intri} \frac{d}{dt} \overline{w}^{-G}(t) \right] = \\ T^{-1}(t) \overline{w}^{-CM}(t) \times T^{-1}(t) T(t) \left[\overline{I}_{total}^{Intri-G} \overline{w}(t) \right] &+ T^{-1}(t) T(t) \left[\overline{I}_{total}^{Intri} \frac{d}{dt} \overline{w}^{-G}(t) \right] \end{aligned}$$

resultando
$$\overline{M}_{externo}^{-G}(t) = \overline{w}^{-G}(t) \times \left[\overline{I}_{total}^{Intri-G} \overline{w}(t) \right] + \left[\overline{I}_{total}^{Intri} \frac{d}{dt} \overline{w}^{-G}(t) \right]$$

donde las componentes de todos los vectores: $M_{externo}$, w ; se evalúan proyectando estos vectores, que percibimos desde el sistema de coordenadas centro de masas, sobre el sistema intrínseco en cada instante de tiempo. Note el lector que ahora el tensor de inercia I ya no depende del tiempo, sino que se evalúa una vez en el sistema intrínseco elegido. Evidentemente resulta ventajoso utilizar como sistema intrínseco uno en que el tensor de inercia I sea diagonal. En este las componentes forman el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \overline{I}_{total}^{Intri} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} & M_x(t) &= w_y(t)w_z(t)(I_{zz} - I_{yy}) + I_{xx} \frac{dw_x(t)}{dt} \\ & & M_y(t) &= w_z(t)w_x(t)(I_{xx} - I_{zz}) + I_{yy} \frac{dw_y(t)}{dt} \\ & & M_z(t) &= w_x(t)w_y(t)(I_{yy} - I_{xx}) + I_{zz} \frac{dw_z(t)}{dt} \end{aligned}$$

En el caso de ser $M_{externo} = 0$ las ecuaciones representan el movimiento libre de un sólido rígido. Aunque las componentes vectoriales de las ecuaciones de Euler son, en rigor, proyecciones en el sistema intrínseco de medidas vectoriales en el sistema centro de masa, el caso del movimiento rígido de la tierra es un caso especial. Desde un sistema de coordenadas intrínseco ligado a la tierra se puede medir indirectamente la velocidad angular de las ecuaciones de Euler por medio del giro nocturno aparente del firmamento, es decir, mediante medidas astronómicas. Generalizando, la velocidad angular desde el sistema intrínseco se puede medir indirectamente por el giro relativo del sistema de coordenadas centro de masas y el momento de las fuerzas externas referido al punto centro de masas puede ser medido directamente en el sistema intrínseco.

4-Visualización y ejemplos.

Precesión libre del eje instantáneo de rotación.

En el caso en que no existan fuerzas externas aplicadas al sólido rígido, se sigue que el centro de masas se mueve a velocidad constante o está en reposo respecto de nuestro sistema de coordenadas inercial Laboratorio. Por economizar en imaginación elegimos este último caso, de esta forma podemos considerar que el sistema de coordenadas Laboratorio equivale al sistema de coordenadas centro de masa.

Debido a la ausencia de momentos de fuerzas, el momento angular del sólido debe permanecer constante, ya que se verifica

$$\overline{M}_{total}^{LAB}(t) = \frac{d}{dt} \overline{L}_{total}^{LAB}(t) = 0 \Rightarrow \overline{L}_{total}^{LAB} = cte$$

Por otro lado no existe transferencia de energía con el exterior y por tanto la energía cinética de rotación debe ser constante

$$E_{total}^{LAB} = \frac{1}{2} \overline{w}(t) \bullet \overline{L}_{total}^{LAB} = cte$$

de esta expresión no deducimos que w sea constante, sino que dado que E y L son constantes, lo que se mantiene constante es la componente de la velocidad angular proyectada sobre la dirección, constante, del momento angular L . Ahora debemos hacer dos distinciones:

1-El sólido gira respecto de uno de los ejes principales:

Si tomamos en las ecuaciones de Euler para un instante t con $M(t)_{externo}=0$, $\omega_y(t)=0$, $\omega_z(t)=0$ y $\omega_x(t)$ no nulo; se predice que $d\omega_y/dt = d\omega_z/dt = 0$. Por tanto ω_y y ω_z seguirán siendo nulos en el instante $t+dt$ y así sucesivamente. Pero hay que considerar que estos resultados de la ecuación de Euler son componentes proyectadas al sistema de coordenadas intrínseco del sólido centrado en el centro de masas y orientado de modo que el tensor de inercia sea diagonal. En este sistema de coordenadas los valores proyectados de L y ω solamente tienen componente $\langle x \rangle$, en cualquier momento. Visto desde el sistema de coordenadas centro de masas, L debe permanecer constante, lo que exige que el eje $\langle x \rangle$ del sistema de coordenadas intrínseco no cambie de dirección para un observador en el sistema de coordenadas centro de masas; y por tanto en este caso no hay precesión del eje instantáneo de rotación siendo ω constante.

2-El sólido gira respecto de un eje que no es principal:

En este caso podemos elegir el sistema de coordenadas centro de masa de forma que coincida en un instante t arbitrario con el sistema de coordenadas propio del sólido rígido. En este instante t el tensor de inercia I se hace diagonal. En caso de no haber fuerzas externas el vector L será constante y la energía cinética de rotación E también constante. Por tanto podemos escribir lo siguiente para este instante

$$L^2 = (I^{xx} w_x)^2 + (I^{yy} w_y)^2 + (I^{zz} w_z)^2 \quad ; \quad E = \frac{1}{2} (I^{xx} w_x^2 + I^{yy} w_y^2 + I^{zz} w_z^2)$$

estas relaciones no determinan unívocamente las componentes de la velocidad angular. Además, un instante después de t , el tensor de inercia tomará otra forma no diagonal y para mantener constantes L y E en todos los casos posibles debemos aceptar la posibilidad de que la velocidad angular w cambie con el tiempo.

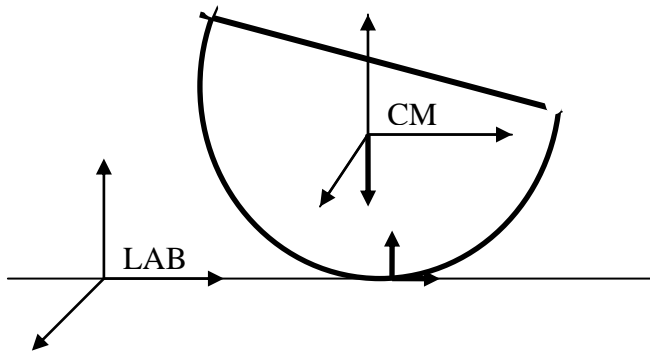
En resumen, tenemos que en ausencia de fuerzas externas un sólido que gira respecto de un eje no principal sufre una deriva o precesión en su velocidad angular y eje instantáneo de rotación de modo que se puedan mantener constantes la energía y el momento angular. Este movimiento de precesión se puede apreciar en el lanzamiento de balones en el rugby. Debido a su forma alargada, giran en general respecto de algún eje que no es el de simetría, lo que se percibe en el movimiento de la punta del balón. Durante el vuelo del balón, el valor constante de la gravedad hace que el momento de fuerzas respecto del centro de masas del balón sea nulo. Este movimiento de precesión también se da en el caso del giro de la tierra [2], pero no se trata del movimiento conocido como precesión de los equinoccios, cuyo origen está asociado a momentos de fuerza externos del sol y la luna. Si consideramos la tierra aproximadamente como un elipsoide de revolución con achatamiento en los polos[3], entonces el sistema de coordenadas intrínseco formado por el plano ecuatorial y el eje norte-sur forman un sistema de coordenadas que diagonaliza el tensor de inercia. Si el eje norte-sur es el $\langle z \rangle$, tenemos $I^{xx} = I^{yy}$. De las ecuaciones de Euler tenemos que w_z es constante y w_x, w_y deben satisfacer sendas ecuaciones diferenciales armónicas:

$$0 = w_y \Omega_E + \frac{dw_x}{dt}; \quad 0 = -w_x \Omega_E + \frac{dw_y}{dt}; \quad \Omega_E = \left(1 - \frac{I_{zz}}{I_{xx}}\right) w_z; \quad w_z = cte; \quad I_{xx} = I_{yy}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(w_x^2 + w_y^2) = 0; \quad \frac{d^2 w_x}{dt^2} + \Omega_E^2 w_x = 0; \quad \frac{d^2 w_y}{dt^2} + \Omega_E^2 w_y = 0$$

que conducen a una frecuencia de oscilación armónica Ω_E para las componentes w_x, w_y de la velocidad angular proyectadas sobre el sistema de coordenadas intrínseco. En estas condiciones el sistema de coordenadas intrínseco no puede permanecer en reposo respecto al sistema de coordenadas del centro de masas, de lo contrario podríamos identificarlos en un mismo sistema de coordenadas y L ya no sería constante al haber dos componentes variables de la velocidad angular y un tensor de inercia que no varía con el tiempo. Por tanto el sistema de coordenadas intrínseco debe oscilar respecto del sistema de coordenadas centro de masas con un periodo Ω_E . Este movimiento de la tierra se denomina *bamboleo de Chandler* y supone una ligera variación con el tiempo de las coordenadas a las que apunta un telescopio terrestre para ver cualquier estrella, estas modificaciones son periódicas cada 433 días aproximadamente. Note el lector que hemos considerado una *primera aproximación* en la que no existen momentos de fuerza externos sobre la tierra. Aunque el movimiento de la tierra como un sólido rígido parece ser la razón principal del bamboleo de Chadler, esto no explica completamente los datos experimentales. Se investiga sobre alteraciones del tensor de inercia debido a las partes fluidas de la tierra : aumento del nivel del mar y cambios locales la presión del fondo marino, corrientes oceánicas y atmosféricas, terremotos y capas internas de la tierra.

Oscilador mecánico



La figura representa un semi-cilindro que se balancea en contacto con el suelo afectado por la gravedad. Vemos representados los sistemas de coordenadas del laboratorio y del centro de masa, siempre con ejes paralelos. Con flechas mas gruesas se representan la fuerza de contacto con el suelo, con una componente de rozamiento y la fuerza de gravedad actuando sobre el centro de masas. Si suponemos que no hay deslizamiento en el

punto de contacto del sólido con el suelo, entonces la velocidad del punto correspondiente del sólido en contacto con tierra es cero. Por tanto el eje instantáneo de rotación, juzgado desde el sistema de coordenadas del laboratorio pasa por dicho punto de contacto y por tanto el eje instantáneo de rotación se mueve con el tiempo para el observador laboratorio. Desde el sistema de coordenadas centro de masa el eje instantáneo pasa por el punto centro de masas y resulta evidente que la dirección del eje es en la perpendicular al papel. Dado que no hay giro entre LAB y CM la dirección del eje instantáneo de rotación en LAB será la misma: en la perpendicular al papel. De la definición de momento angular, el lector puede comprobar que el momento angular medido respecto al origen de CM es un vector también perpendicular al papel. Por tanto el sistema está girando alrededor de un eje principal en el sistema CM y por tanto se verifica la relación escalar

$$L_z = I^{zz} \omega_z$$

donde el eje z es el perpendicular al papel asociado al sistema de coordenadas CM. El movimiento de oscilación es tal que la inclinación del sólido alcanzara un máximo y después invierte su movimiento. Esto supone que la velocidad angular cambia en signo y en valor absoluto y por tanto por continuidad existe un instante en que la velocidad angular se anula; correspondiendo con la máxima inclinación. Dado que la componente del momento de inercia se mantiene constante al girar respecto de un eje principal, entonces el momento angular debe modificarse. Esto supone que el sistema debe estar sometido a un momento de fuerza neto no nulo y se verifica

$$\overline{M}_{externo}^{CM}(t) = \frac{d}{dt} \overline{L}_{total}^{CM}(t)$$

donde el momento externo hay que calcularlo respecto del centro de masas. El lector puede partir de la definición de momento de fuerzas y concluir que, en este caso y dado que la fuerza de gravedad es igual para todos los elementos de masa, entonces el momento de fuerzas de la gravedad respecto al centro de masa es nulo. Por tanto solamente queda el momento de fuerzas respecto del

centro de masa que genera la fuerza de contacto con tierra. Es evidente que la velocidad angular tendrá un valor máximo en cada ciclo de oscilación y en este máximo será

$$M_{\text{externo}}^{CM}(t) = I^{zz} \frac{d}{dt} \omega(t) = 0$$

lo que supone que, respecto al centro de masas el momento de fuerzas debe anularse en el instante de máximo. Dado que la fuerza de contacto no se anula en general, esto solo es posible si el radio vector desde el punto centro de masas y la fuerza de contacto son paralelos en el instante de máximo.

La energía mecánica se conservará, ya que la gravedad es una fuerza conservativa y la fuerza de contacto no consume energía mecánica, bien sea por conversión a otras formas de energía potencial o disipación en forma de calor o modificación de energía cinética del planeta tierra. Por tanto en nuestro caso la cantidad (h_{cm} es la altura del centro de masas)

$$E = Mgh_{cm} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I^{zz} \omega^2$$

se conserva a lo largo del tiempo. Respecto del sistema LAB la velocidad del centro de masas será, en módulo

$$v_{cm} = \omega R$$

siendo R la distancia del centro de masas al eje instantáneo de rotación, es decir, el punto de contacto con el suelo del semicilindro. Por tanto cuando la velocidad angular se anule toda la energía será potencial gravitatoria. Por otro lado es evidente en la expresión de la energía que en el instante de mínimo en la altura del centro de masas (h_{cm}) se da un máximo en la velocidad angular y por tanto la anulación del momento de fuerzas respecto al centro de masas, como se ha dicho antes.

El cálculo de I^{zz} corresponde a la expresión ($x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$)

$$I_{\text{total}}^{zz} = \sum_i m_i (\delta_{33} r_i^2 - x_i^3 x_i^3) \equiv \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

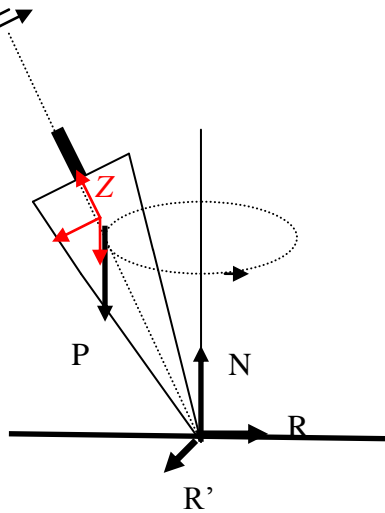
o en términos integrales

$$I_{\text{total}}^{zz} = \int dm (x^2 + y^2)$$

que aplicado a un eje que pase por el centro de masas puede resultar en un cálculo pesado. Aplicando el *teorema de Steiner*, que el lector puede consultar en el apéndice matemático, es posible reconducir el cálculo a un caso más sencillo. Este teorema relaciona los momentos de inercia de un sólido respecto de dos ejes paralelos, uno de ellos pasando por el centro de masas. En este caso el cálculo se simplifica para un eje de rotación paralelo que pase por el centro del tramo recto, según el dibujo, del semicilindro. Para una referencia sobre el cálculo de momentos de inercia el lector puede consultar [2].

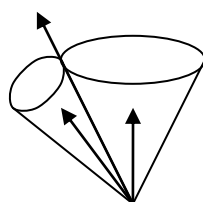
Precesión debida al momento de las fuerzas

El movimiento de una peonza se suele tomar como ejemplo de este tipo de movimiento, debido sin duda a ser una experiencia accesible para la mayoría de las personas. Una vez que hacemos girar la peonza esta va pasando, de una posición inicialmente casi vertical a ir declinando poco a poco hacia abajo manteniendo el punto de contacto con el suelo. Esta declinación es gradual y va acompañada de un giro del eje de la peonza sobre una línea vertical que pasa por el punto de contacto con el suelo, giro también denominado *precesión*. También se puede notar un ligero movimiento de oscilación o *nutación* del eje indicado en el dibujo por las dos flechas sobre el eje de la peonza. En una primera aproximación podemos prescindir



de la nutación. La precesión hace que el centro de masas siga una trayectoria circular como aparece en el dibujo. Para que esto suceda, las fuerzas externas, peso y contacto con el suelo, deben cancelar en la vertical y en la horizontal debe actuar una componente asociada al rozamiento que justifique la aceleración centrípeta necesaria. La peonza es un objeto simétrico de forma que podemos suponer que el centro de masas se sitúa en algún punto del eje de simetría de la peonza, tal como aparece en el dibujo. Sin embargo el eje de simetría de la peonza no es en este caso el eje instantáneo de rotación. Sabemos que el eje instantáneo de rotación pasa por el punto de contacto con el suelo en el que la punta de la peonza está en reposo en el sistema de coordenadas del laboratorio, pero no puede pasar por el centro de masas ya que el centro de masas no está en reposo como hemos dicho.

Sin embargo podemos considerar un sistema de coordenadas S que se mueva de tal forma que la precesión quede compensada (anulada). Está en color rojo en el dibujo. El eje Z del sistema que coincide con el eje de simetría de la peonza es solidario (arraigado) a ella. Sin embargo los otros dos ejes no son igualmente solidarios (arraigados) a la peonza; pero todos los ejes de S giran, exclusivamente, según la *velocidad angular de precesión* Ω . En este sistema de coordenadas están en reposo tanto el punto de contacto con el suelo como el centro de masas y por tanto el eje instantáneo de rotación equivale al eje Z. Para ver el movimiento del eje instantáneo de rotación respecto del observador del laboratorio podemos combinar los dos movimientos: el giro observado desde S y la precesión de S vista desde el laboratorio. De esta forma el



movimiento del eje instantáneo de rotación aparece asociado a la rodadura entre dos conos, como aparece en el dibujo (Diagrama de Poncelet). El cono de la derecha está asociado al movimiento de precesión del eje Z y el de la izquierda al giro de la peonza respecto del sistema S. El vértice de los conos es el punto de contacto de la peonza con el suelo, que en ambos sistemas de coordenadas (S y

LAB) es un punto de reposo de la peonza. El cono de la izquierda rueda sin deslizar sobre el cono de la derecha, debido a esto, los puntos correspondientes de la peonza (cono izquierdo) están en reposo instantáneo respecto del sistema LAB y por tanto están en el eje instantáneo de rotación respecto de LAB. Por tanto en LAB el eje instantáneo de rotación no corresponde con el eje de la peonza. El cono izquierdo no representa la peonza completa, sino que su ángulo de abertura está limitado por los puntos de la peonza en reposo relativo a LAB.

En cuanto a la parte dinámica, podemos aplicar el resultado de que el momento de las fuerzas externas respecto del centro de masas equivale a la velocidad de cambio de momento angular respecto del centro de masas. El Sistema de coordenadas centro de masas no es el sistema de coordenadas S anterior, pero dada la simetría de la peonza el sistema S es un sistema de ejes propio que diagonaliza el tensor de inercia. Podemos suponer un instante en que el sistema de coordenadas centro de masas coincide con S. Si el giro de precesión es mucho mas lento que el de giro de la peonza respecto de su eje de simetría, podemos aplicar lo antes señalado, en este instante, así

$$\bar{P} + \bar{N} = 0; \quad \bar{r}_0^{CM} \times \bar{N} = \frac{d\bar{L}}{dt}; \quad \bar{L} = I^{zz} \bar{w}$$

La primera ecuación es el balance de fuerzas verticales externas sobre el centro de masas y se justifica si el centro de masas se mueve sobre un plano horizontal. La segunda ecuación es el momento de fuerzas respecto del sistema centro de masas de acuerdo a la aproximación anterior; en este punto suponemos que el momento de la fuerza R respecto del centro de masas es despreciable. La tercera ecuación indica que si despreciamos la precesión, lo cual es coherente con tomar $R=0$ como veremos, el eje de rotación instantáneo de la peonza es su eje de simetría y por tanto se trata de un eje propio en el que las direcciones de L y w son las mismas. En estas condiciones los vectores L y r_0^{CM} son aproximadamente paralelos y, multiplicando escalarmente por el vector L la segunda ecuación, obtenemos que el módulo de L es constante. Por tanto la velocidad de cambio de L corresponde al *giro de un vector de módulo constante* en el sistema de coordenadas centro de masas respecto de un punto fijo, algo que se expresa por medio del producto vectorial como vimos en la cinemática:

$$\bar{r}_0^{CM} \times m\bar{g} = \lambda \bar{L} \times m\bar{g} = -\frac{d\bar{L}}{dt} = -\bar{\Omega} \times \bar{L} \Rightarrow \bar{\Omega} = \lambda m\bar{g} = \pm \frac{r_0^{CM} m}{L} \bar{g}$$

donde Ω es la velocidad angular asociada al movimiento de *precesión*, es decir, la velocidad angular con que el eje instantáneo de rotación se va desplazando, de generatriz en generatriz, por el lateral del cono de la derecha en el diagrama de Poncelet. Vemos claramente que el incremento instantáneo ΔL es perpendicular al propio vector L . El signo que precede a la última expresión depende de si el sentido de los vectores r_0^{CM} y L es el mismo o es opuesto. Note el lector que hemos partido de una situación estática despreciando la precesión y el resultado obtenido es un valor para la precesión. Esta precesión provoca la rodadura entre conos en el diagrama de Poncelet y por tanto la

precesión de la propia peonza. Este resultado es una primera aproximación cuasiestática que puede realimentar un proceso para una segunda aproximación; ya que el valor Ω da una medida para $R = m \Omega^2 d_1$; en una aproximación basada en la percepción física del CM moviéndose uniformemente en una trayectoria circular de radio d_1 : siendo $d_1 = r \text{sen}(\varphi)$ la distancia entre el CM y la recta vertical que pasa por el punto fijo en tierra de la peonza. Con este nuevo componente, la ecuación anterior de momentos de fuerza respecto al centro de masas se plantea, en forma escalar, de esta forma

$$mrg \text{sen}(\varphi) + mr^2\Omega^2 \text{sen}(\varphi)\cos(\varphi) = \Omega L \text{sen}(\varphi); \quad r = r_0^{CM}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\Omega L - mrg}{mr^2\Omega^2}$$

Para interpretar esta expresión podemos hacer lo siguiente

$$\Omega_0 = \frac{mrg}{L} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{L(\Omega - \Omega_0)}{mr^2\Omega^2} = \frac{L\Delta\Omega}{mr^2\Omega^2}$$

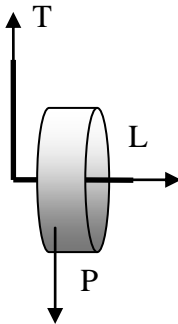
Es decir, la aproximación introducida requiere incluir también una amplitud $\Delta\Omega$ para el valor de la precesión. Esto significa que la precesión cambia con el tiempo y por tanto se debe introducir también una componente de fuerza tangencial R' al movimiento del centro de masas, cuyo valor aproximado será $R' = mrd\Omega/dt$. El lector puede comprobar que la dirección de la fuerza R' generará un momento de fuerza respecto del centro de masas que supone un incremento $\Delta L'$ del momento angular de la peonza que lo hace oscilar en la dirección del cabeceo de nutación. Este $\Delta L'$ es también aproximadamente perpendicular a L ; de modo que, para valores de L suficientemente elevados, podemos seguir suponiendo que el módulo de L es aproximadamente constante. Debido a la amplitud $\Delta\Omega$ la precesión oscilará entre dos valores extremos. Partiendo de un valor medio de la precesión, según el diagrama de Poncelet un aumento de la velocidad de precesión supone que el cono asociado a la peonza debe rodar más rápidamente (ω aumenta). Esto supone un aumento de L ($=l\omega$); y de la relación $rN \approx L \Omega$, al aumentar también Ω , tenemos como resultado un nuevo aumento de N . Por otra parte existe también un aumento de la energía cinética, tanto del centro de masas como de rotación respecto al centro de masas y por tanto para que la energía total sea constante, la energía potencial debe disminuir; es decir, la altura del centro de masas disminuye; pero dado que N va en aumento llegará un momento en que el centro de masas deje de caer y remonte en altura. En este momento L empieza a disminuir y según el diagrama de Poncelet Ω también empezarán a disminuir de valor, con lo que R' cambia de sentido al igual que el momento de fuerza correspondiente de nutación. También N también empieza a disminuir ($rN \approx L \Omega$) y la disminución progresiva puede hacer que N deje de compensar el peso de la peonza: $N < mg$, lo que limita la altura alcanzada por el centro de masas y que este empiece a bajar reproduciéndose un nuevo ciclo que mantiene el movimiento de nutación.

El lector puede comprobar que, en el contexto de la aproximación que manejamos, la variación de energía potencial del centro de masas no puede ser absorbida totalmente por una variación de la energía cinética del mismo

centro de masas, y por tanto la energía cinética de rotación debe verse afectada para cumplir con la conservación de la energía

$$E^{CM} = E_{cinética}^{CM} + E_{potencial}^{CM} \approx mgr \cos(\varphi) + \frac{1}{2} mr^2 \Omega^2 \sin^2(\varphi);$$

$$\left| \frac{dE_{cinética}^{CM}}{dE_{potencial}^{CM}} \right| \approx \frac{r}{g} \Omega^2 \cos(\varphi) \approx \frac{L \Delta \Omega}{rmg} \approx \frac{\Delta \Omega}{\Omega} \ll 1$$



se ha despreciado en el cálculo los términos asociados a $d\Omega/dt$ y la energía cinética de nutación del centro de masas; resultando que la mayor parte de la modificación de la energía potencial del centro de masas se compensa con la modificación de la energía cinética de *rotación* respecto al

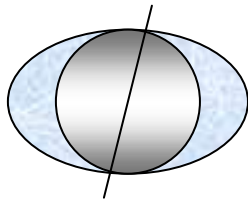
centro de masas. El dibujo adjunto presenta un ejemplo similar de precesión: una rueda gira soportada solo por una cuerda atada a un extremo de su eje de giro. El momento de giro L hace que la rueda decline hacia el suelo lentamente y haciendo un giro de precesión respecto al eje definido por la cuerda a medida que actúa el momento de fuerzas asociado al peso (P).

La presentación hecha sobre el movimiento de la peonza es una aproximación ligada a nuestra percepción física. Un tratamiento matemáticamente mas riguroso se deriva de la utilización de los *ángulos de Euler* y las ecuaciones de *Euler-Lagrange*. El uso de estas ecuaciones, basadas en el *principio de D'Alembert*, es recomendable debido a la dificultad de evaluación de las fuerzas de ligadura en el contacto entre la peonza y el suelo. En el apéndice matemático se hace una estimación de la amplitud del ángulo de nutación para el movimiento de la peonza y un planteamiento del Lagrangiano de la peonza.

El caso de la bailarina

Un ejemplo muy común sobre conservación del momento angular es el de una bailarina que está girando con sus brazos en cruz y posteriormente los acerca a su cuerpo. Si suponemos que las fuerzas externas están equilibradas y el momento de dichas fuerzas respecto del centro de masa es nulo, entonces el momento angular respecto del centro de masa debe conservarse. Dado que el momento de inercia respecto del eje de giro (I^z), que suponemos es un eje principal, disminuye al acercarse la masa al eje de rotación, entonces la velocidad angular de la bailarina aumenta. Esto hace que la energía cinética de rotación aumente. El cambio en la distribución de la masa supone en general un cambio en la posición (altura) del centro de masa y por tanto un cambio en la energía potencial. Si este cambio no compensa el aumento de energía cinética, entonces, ya que no actúan fuentes de energía externas, la energía no compensada debe proceder de fuentes internas: del metabolismo fisiológico de la bailarina a través de su esfuerzo por acercar los brazos al tronco.

El caso de la tierra y la luna



La imagen representa, de forma muy exagerada, el efecto de marea generado por la luna sobre el agua de los océanos de la tierra. También se representa el eje de rotación de la tierra inclinado respecto de la eclíptica. El movimiento relativo entre la

tierra y la luna es tal que el giro de la masa continental de la tierra (24 horas por ciclo) es muy superior al de la luna en su órbita (28 días por ciclo); juzgado por un observador en el centro de masas del sistema. A medida que la tierra gira, el pico de marea se mantiene alineado con la luna e, inevitablemente, alcanza las costas continentales. En este "impacto" la masa de agua de marea frena a la masa continental de modo que disminuye la velocidad de rotación de la tierra; de modo que disminuyen tanto el momento angular como la energía cinética de rotación de la tierra. Por otra parte, al desaparecer el pico de marea en la zona continental, la acción gravitatoria de la tierra sobre la luna es menos intensa, lo que aumenta la energía potencial gravitatoria del sistema tierra-luna. Consideremos al sistema tierra-luna como aislado y veamos el comportamiento de las leyes de conservación. Si disminuye el momento angular de rotación de la tierra, debe haber otro objeto en el sistema que aumente su momento angular y compense el momento angular total. Para una órbita circular de la luna respecto de la tierra tenemos [3]

$$E = -\frac{m}{2} \left(\frac{GMm}{L} \right)^2 = -G \frac{Mm}{2r}$$

y vemos inmediatamente que un aumento del momento angular de la luna (L) supone también un aumento de la energía (E) mecánica de la luna. Por tanto si la tierra pierde momento angular y energía mecánica, es posible que las mareas lunares/solares provoquen una disminución de la velocidad angular de la tierra y un aumento de la distancia tierra-luna/sol. Aunque se trata de un efecto relativamente pequeño es acumulativo, y a lo largo de millones de años ha tenido un efecto susceptible de ser medido. Se estima que hace unos 3.800 millones de años la duración del día terrestre era entre 18 y 20 horas; frente a las 24 actuales. Mediciones muy precisas indican un aumento de 38 milímetros/año en la distancia tierra-luna.

La precesión de Larmor

En electromagnetismo se puede demostrar que la acción de un campo magnético B sobre una partícula con momento magnético μ tiene asociado un momento de fuerzas M de valor

$$\overline{M} = \overline{\mu} \times \overline{B}$$

se supone una relación entre el momento magnético de la partícula (electrón, núcleo atómico, átomo....) y el *momento angular intrínseco* L de dicha partícula, de modo que tenemos

$$\bar{M} = \gamma \bar{L} \times \bar{B} \quad ; \quad \bar{\mu} = \gamma \bar{L}$$

donde *gamma* es una constante numérica que depende de la partícula. Podemos poner la ecuación anterior de forma similar al caso de la peonza

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{L} \times \gamma \bar{B} = \bar{\Omega} \times \bar{L} \quad ; \quad \bar{\Omega} = -\gamma \bar{B}$$

lo cual describe una precesión del momento angular intrínseco de la partícula respecto de la dirección local del campo magnético, o precesión de Larmor. Un análisis mas detallado incluye el efecto relativista de la *precesión de Thomas*.

Equilibrio mecánico en un sólido rígido y principio de los trabajos virtuales[5].

Según el principio de los trabajos virtuales, un sistema mecánico en equilibrio se caracteriza por que cualquier modificación *virtual* $\delta \bar{r}_i$ de la posición de sus elementos compatible con las restricciones geométricas es tal que el trabajo virtual neto de las fuerzas del sistema f_i es nulo:

$$\sum_i \bar{f}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

donde *i* numera cada una de las partes en que se puede dividir el sistema. En el caso de un sólido rígido, una modificación de la posición compatible con las restricciones geométricas debe cumplir con el primer invariante cinemático, de modo que

$$\delta \bar{r}_i = (\bar{v}_0 + \bar{w} \times (\bar{r}_i - \bar{r}_0)) dt$$

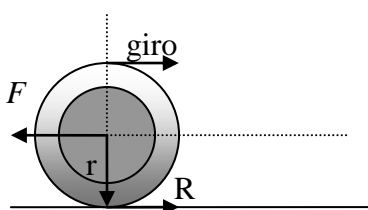
donde v_0 y w son valores asociados a un *movimiento virtual*, y por tanto son valores arbitrarios e independientes entre sí. Sustituyendo esto en la ecuación del trabajo virtual tenemos

$$\sum_i \bar{f}_i \cdot (\bar{v}_0 + \bar{w} \times (\bar{r}_i - \bar{r}_0)) dt = \left[\bar{v}_0 \cdot \sum_i \bar{f}_i + \bar{w} \cdot \sum_i (\bar{r}_i - \bar{r}_0) \times \bar{f}_i \right] dt = 0$$

Dado que podemos tomar cualesquiera valores para v_0 y w , concluimos que el equilibrio mecánico supone equilibrio de fuerzas y de momentos

$$\sum_i \bar{f}_i = 0; \quad \sum_i (\bar{r}_i - \bar{r}_0) \times \bar{f}_i = 0$$

Rozamiento de Rodadura.



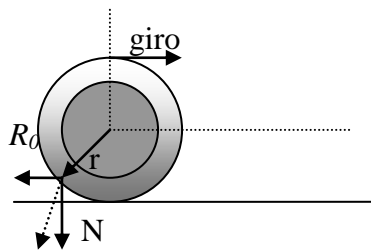
Si damos un impulso inicial a una rueda y la dejamos libre, al final acaba dejando de girar y en reposo. Visto desde el centro de masas de la rueda, está actuando un momento de fuerzas que frena el giro de dicha rueda. Si despreciamos la influencia del aire, lo cual está justificado a bajas velocidades, este momento puede asociarse al rozamiento entre la rueda y el suelo. El dibujo muestra la rueda y los ejes del

rozamiento entre la rueda y el suelo. El dibujo muestra la rueda y los ejes del

sistema de coordenadas centro de masa en línea de puntos. El momento de la fuerza de rozamiento R es el producto vectorial $r \times R$ y tiene sentido opuesto al giro de la rueda. Por tanto la rueda tiende a girar mas despacio. El sistema centro de masas de la rueda es no inercial y disminuye su velocidad progresivamente. Recordando el ejemplo 4 de la sección 6 del trabajo sobre cinemática, tenemos que debe haber una *fuerza inercial extra* F en dirección contraria a R , de modo que el balance de estas fuerzas sea una disminución progresiva de la velocidad del centro de masas de la rueda.

Tal como se ha hecho, la exposición anterior se puede considerar una *reducción al absurdo*. Si no consideramos la existencia de aire, la única causa posible para la fuerza F es el contacto entre la rueda y el suelo. Pero la fuerza asociada a este contacto es precisamente R . En consecuencia la fuerza de contacto entre la rueda y el suelo no puede ser, geoméricamente, tal como se ha dibujado la fuerza R ; si queremos explicar que la rueda al final acabe parándose. Si la rueda girase uniformemente, entonces podría ser $R=0$ y se mantendrían los principios de conservación de la cantidad de movimiento, del momento angular y de la energía para la rueda.

Considerar que R va en sentido contrario tampoco facilita las cosas, al contrario, ya que predice un aumento de la velocidad de giro de la rueda y un



freno del centro de masas y por tanto conduce a deslizamiento entre la rueda y el suelo. El dibujo adjunto muestra una configuración geométrica adecuada para explicar el movimiento de la rueda en este caso. Esta configuración permite un freno del centro de masas combinado con una reducción del giro de la rueda. Sin embargo el punto de aplicación de la fuerza, descompuesta en el dibujo en sus componentes

geométricas R_0 y N es poco intuitivo y debemos aclarar cual es el origen físico de esta fuerza. Tomemos como referencia una rueda de goma de un automóvil, debido a su elasticidad, hace contacto con la calzada no en un punto sino en una superficie rectangular determinable. Los puntos del neumático están afectados por las componentes de rozamiento R y normal N asociadas al contacto con el suelo. La componente R depende de la situación dinámica específica de la rueda. Sin embargo en los *bordes* de este rectángulo hay que considerar *fuerzas específicas del fenómeno físico de la rodadura*; de ahí la notación R_0 . Para percibir mejor esto, imagine el lector que la superficie de la rueda y la del suelo tuviese algo similar a las capas del *velcro*. La parte de la rueda que sube desde el suelo sufrirá una fuerza que tiende a frenar el movimiento de la rueda. Esta fuerza es la representada en la imagen anterior; aunque de forma exagerada, ya que está asociada al extremo de la zona de contacto entre la rueda real (no circular) y el suelo. Esta es una imagen del origen del *rozamiento por rodadura*. También permite entender la medida del coeficiente de rozamiento de rodadura. Si colocamos nuestra rueda en reposo en un plano inclinable, existirá un margen en que la inclinación del plano no provocará el giro de la rueda. El equilibrio mecánico exige equilibrio de momentos y fuerzas. Si calculamos los momentos de fuerza para todas las partículas de la rueda respecto del centro del rectángulo de contacto entre la rueda y el plano inclinado tenemos:

$$\sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{g} + \sum_i \bar{r}_i \times (\bar{N}_i + \bar{R}_i) = 0$$

donde el primer sumatorio es el momento de fuerzas asociado a la gravedad y el segundo sumatorio es el momento de fuerzas asociado a las fuerzas de contacto entre la rueda y el plano. Con las condiciones de simetría adecuadas, es evidente que el momento asociado a la gravedad tiene una dirección bien determinada que tiende a girar la rueda sobre su perímetro circular haciéndola caer por el plano. Los momentos asociados a las fuerzas R , paralelas al plano, siempre son perpendiculares al momento neto asociado a la gravedad, y por tanto los términos $r_i \times R_i$ deben cancelar entre ellos en el segundo sumatorio. Los momentos asociados a las fuerzas N , perpendiculares al plano, tienen geoméricamente posibilidad de compensar el momento asociado a la gravedad. Con esto, expresando el momento angular asociado a la gravedad en términos del centro de masa y aplicando el *teorema del valor medio* la expresión anterior queda así:

$$r_{cm} Mg \operatorname{sen}(\alpha) + \mu \sum_i N_i = rMg \operatorname{sen}(\alpha) + \mu N = 0$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento de rodadura y depende del tipo de materiales en contacto y del radio de la rueda. El equilibrio de fuerzas nos proporciona dos nuevas relaciones

$$N + Mg \cos(\alpha) = 0; N = \sum_i N_i; R + Mg \operatorname{sen}(\alpha) = 0; R = \sum_i R_i$$

La medida del coeficiente de rodadura requiere que la rueda tenga un pequeño margen de elasticidad. Para que una rueda real, afectada por rozamiento de rodadura, se mueva a velocidad constante es necesario que este sometida a una fuerza exterior F_{ext} que compense la rodadura (R_0); si consideramos despreciable la resistencia del aire. Si suponemos la fuerza exterior aplicada en el punto centro de masas de la rueda, entonces debemos aceptar la existencia de un *momento de fuerzas* asociado al rozamiento (R), en el centro de la zona de contacto entre la rueda y el suelo, que cancele con el momento de fuerzas asociado al rozamiento de rodadura (R_0). El momento de fuerza de rodadura tiende a disminuir el giro de la rueda y por tanto, para que el momento de fuerzas de rozamiento cancele con el de rodadura la dirección de la fuerza R será opuesta a la que aparece en el primer dibujo de esta sección. De este modo el *momento angular* de la rueda respecto del centro de masas, y por tanto el giro de la rueda, se mantiene constante en el tiempo. En el caso de que la rueda formase parte de una bicicleta, la F_{ext} será transmitida por el cuadro hasta el eje de dicha rueda. La acción del freno de la bicicleta sobre la rueda supondrá una disminución de energía cinética de rotación por frotamiento y consecuentemente la aparición de un momento de fuerzas de frenado respecto del centro de masas de la rueda que tiende a disminuir la velocidad de giro de la rueda. En este caso la fuerza R en el centro de contacto entre la rueda y el suelo apuntará en dirección opuesta a la que aparece en el primer dibujo de esta sección para que el centro de masas de la bicicleta entera frene de forma efectiva, superando el efecto de frenado del rozamiento por rodadura (R_0).

Conservación local del momento angular.

Si uno toma un bol lleno de agua con pequeños objetos flotando, como trozos de papel, y gira como si fuese una peonza, observará que el agua también empieza a girar respecto al centro del bol y en dirección contraria a la del experimentador. Podemos ver una tendencia a la compensación local de las variaciones de momento angular; análogo a la acción-reacción de la 3ª Ley de Newton. El lector interesado en reproducir la experiencia tenga cuidado de no marearse.

Precesión y Nutación en la rotación de la tierra

El movimiento de giro diurno de 24 horas la tierra sigue las mismas leyes que la peonza. Pero en este caso no existe un punto de apoyo fijo para la tierra y la gravedad que actúa es principalmente la del sol. Para la peonza vimos que el momento de la fuerza de gravedad respecto del centro de masas se anula debido a que la intensidad gravitatoria (g) es una constante. Sin embargo, a escala de toda la tierra, la intensidad gravitatoria del sol es superior en las partes de la tierra más cercanas al sol que las más alejadas. Esto hace que el momento externo gravitatorio solar, medido respecto del centro de masas de la tierra, no se anule. De la misma forma que en la peonza este momento externo produce una precesión y nutación en el momento angular de la tierra; medido respecto del centro de masas de la tierra. El movimiento de precesión se detectó en la antigüedad tras siglos de observaciones astronómicas del fenómeno de los equinoccios. El equinoccio corresponde a la fecha que se puede determinar de una forma precisa en la que la duración del día y de la noche son iguales y corresponden a los cambios de estación invierno-primavera y verano-otoño. En la antigüedad se constató que durante estas fechas, el sol estaba en la constelación de Aries en un caso y en la de Libra en el otro. Esas serían las constelaciones zodiacales[3'] de fondo que tendría el sol visto desde la tierra. Pero con el paso de los siglos se evidenció que las constelaciones de fondo del sol cambiaban durante los equinoccios y lo que antiguamente era Aries ahora es Piscis y Libra es Virgo. Esta precesión del eje de giro terrestre se realiza respecto al *polo eclíptico*, es decir, respecto a un eje ideal perpendicular al plano de la órbita terrestre alrededor del sol y solidario al centro de masas de la tierra. Actualmente se considera que el desplazamiento angular correspondiente en el círculo de las constelaciones zodiacales es de 50,290966 segundos de arco por año, lo que supone un giro de precesión completo cada 25.776 años. Debido a esto también el eje de la tierra cambia de dirección y la estrella del Norte del firmamento nocturno ha ido cambiando de "titular" con el paso del tiempo. La estrella que ahora conocemos como *Polar*, que ahora indica el norte en la constelación de la Osa Menor, hace 4.800 años

era *Thuban*, en la constelación del Dragón.

El movimiento de nutación de la tierra tiene un periodo mucho mas corto que el de precesión : 18.6 años y se evidencia en la localización de los paralelos terrestres correspondientes a los trópicos y los círculos polares. Debido a la



nutación la localización de estos paralelos varía periódicamente cada 18.6 años. La imagen adjunta, cortesía de wikipedia, muestra la posición del trópico de cáncer en años sucesivos en una zona de México. Por supuesto este movimiento también afecta a la dirección del eje de rotación de la tierra, pero el efecto es relativamente pequeño.

III – CONSIDERACIONES FINALES.

La marca distintiva de la física clásica es la aproximación cuasiestática. Toda acción sobre un sistema de partículas está sometida a algún tipo de propagación ondulatoria de energía e impulso a velocidad finita por el sistema. En el caso del sólido rígido estos estados intermedios no aparecen y solamente se consideran estados cinemáticos con velocidad angular y eje de rotación instantáneo definidos. La aplicación del cálculo diferencial supone considerar que la propagación ondulatoria es tan rápida como queramos (velocidad infinita) de modo que podemos considerar que el cambio de estado del sistema corresponde a una cinemática como la que hemos visto.

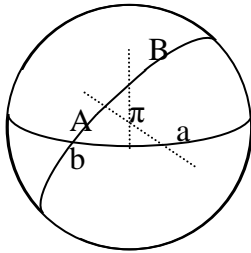
Hemos adoptado varias hipótesis en la cinemática. Primero considerar que el tiempo es un parámetro absoluto, es decir existe una medida común del tiempo para observadores en distintos sistemas de coordenadas. Que dos sistemas de coordenadas en movimiento relativo pueden coincidir en un instante dado, de modo que la matriz de transformación en ese instante es la identidad. Que la masa de un cuerpo es la suma de las masas de sus partículas.

La velocidad instantánea de propagación, el tiempo absoluto, la coincidencia de coordenadas entre sistemas en movimiento relativo y la conservación de la masa son incompatibles o de validez no general en la teoría especial de la relatividad. Por tanto el lenguaje que debemos utilizar es que suponemos una velocidad de propagación muy elevada, un tiempo aproximadamente común entre observadores, una coincidencia entre coordenadas muy aproximada y en general velocidades muy por debajo de la velocidad de la luz. En relación a la masa en relatividad, si el enlace entre dos moléculas tiene asociada una energía E , entonces el sistema de las dos moléculas ha perdido una masa estimada en E/c^2 . Esta es una cantidad tremendamente pequeña en la práctica, por lo que en tiempos de Lavoisier los datos experimentales se interpretaron como justificantes de la conservación de la masa en las reacciones químicas. Para un sólido rígido que gira respecto de un eje fijo, la velocidad instantánea de un punto cualquiera respecto de dicho eje será $\bar{v} = \omega \times \bar{r}$ lo cual supone superar la velocidad de la luz para puntos suficientemente alejados. Según la relatividad esto no es posible. En este punto es importante algo que se dijo al principio de la cinemática: la velocidad instantánea debe calcularse o medirse localmente; de modo que para el caso de la velocidad de la luz el valor del radio r será muy elevado y en ese lugar remoto debería seguir existiendo nuestro sistema de coordenadas y nuestro sólido rígido girando, lo cual es físicamente imposible ya que ningún objeto físico con masa puede alcanzar ni superar la velocidad de la luz. Según la Relatividad General los sistemas de coordenadas clásicos (incluidos los de la relatividad especial), solamente pueden aspirar a una *validez local*: en entornos relativamente próximos a un

origen o referencia; y entre dos de estos sistemas locales hay que considerar la *curvatura del espacio-tiempo*. Sin embargo “relativamente próximo” en este caso tiene un sentido bastante amplio; el sistema solar se puede considerar un entorno “relativamente próximo” al sol al nivel de precisión que requiere la física clásica.

APÉNDICE MATEMÁTICO.

El teorema de la rotación de Euler



Consideremos una esfera que puede moverse con la única restricción de mantener fijo su centro geométrico. Registrando las posiciones iniciales y finales en nuestro sistema de coordenadas vamos construyendo la imagen del dibujo. Nos fijamos inicialmente en el círculo máximo ecuatorial, cuyos puntos etiquetamos con letras minúsculas. Después de un movimiento arbitrario y debido a la rigidez de la esfera, los puntos del círculo ecuatorial inicial se habrán movido a otro círculo máximo final que puede ser en principio cualquiera de los posibles. Los puntos de este nuevo círculo máximo los etiquetamos en mayúsculas. Vemos que estos dos círculos máximos intersectan en un punto que hemos etiquetado con las letras A, b:

1-Si consideramos este punto como perteneciente al círculo máximo final lo llamamos A (mayúscula) . Este punto final debe corresponder al movimiento de un punto procedente del círculo ecuatorial inicial, que llamaremos a (minúscula) y que elegimos libremente en este círculo ecuatorial inicial.

2-Si consideramos este punto como perteneciente al círculo ecuatorial inicial lo llamamos b (minúscula). Este punto debe corresponder al movimiento de otro punto en el círculo máximo final, que llamaremos B (mayúscula). Este punto ya no puede ser elegido libremente ya que debido a la rigidez de la esfera la longitud del arco $[a,b]$ debe ser la misma que la longitud del arco $[A,B]$ y cada punto del arco $[a,b]$ acaba ocupando una posición en el arco $[A,B]$ al final del movimiento.

Partiendo de los puntos medios de los arcos de círculo máximo $[a,b]$ y $[A,B]$ trazamos, sobre la superficie esférica, dos círculos máximos que pasen por dichos puntos medios y sean perpendiculares a los arcos correspondientes. Estos círculos máximos, en el dibujo en trazo de puntos, intersectan en un punto de la superficie de la esfera etiquetado como π . Debido a su construcción, resulta que la distancia entre π y los puntos a,b es la misma que entre π y los puntos A,B . Lo mismo se puede decir cada punto del arco $[a,b]$ y su punto correspondiente del arco $[A,B]$. Por tanto el punto π verifica la propiedad fundamental del movimiento de un sólido rígido : las distancias relativas entre sus puntos se mantienen constantes; pero con la salvedad de que consideramos el mismo punto π antes y después del movimiento. Es decir , el punto π no se ha movido.

De esta forma vemos que un movimiento arbitrario de la esfera en estas condiciones mantiene dos puntos fijos: el centro de la esfera y el punto π . Evidentemente este punto π concreto no tiene por que estar permanentemente en reposo y la arbitrariedad del movimiento indica que π puede estar en cualquier parte de la superficie de la esfera. Pero para un movimiento cualquiera que mantenga en reposo el centro de la esfera debe existir un punto sobre la superficie de la esfera que también se mantenga en reposo en dicho

movimiento. Por tanto el movimiento de una esfera que mantiene fijo su centro es equivalente a un giro respecto de un eje de rotación que pasa por el centro de dicha esfera.

El tensor velocidad angular.

Podemos revisar de una forma mas general la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}} \right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

en el texto la matriz M corresponde a un caso particular en que el eje de rotación instantáneo coincide con el eje z. La expresión anterior indica que la posición del eje instantáneo de rotación puede ser cualquiera. Continuamos con la siguiente transformación

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}} \right) \left(\overline{\overline{M}}^{-1} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

de esta forma introducimos la matriz inversa asociada al giro correspondiente. Las componentes de la matriz M de giro son los cosenos de los ángulos formados entre los vectores base unitarios y ortogonales de los sistemas de coordenados relacionados: D(b_i) y A(b_i); o de forma equivalente el producto escalar correspondiente. Evidentemente la matriz inversa M⁻¹ es también una matriz de giro y las componentes de esta matriz también se calculan de la misma forma, por medio del producto escalar de los vectores base de A y D. Esto introduce una simetría que hace que M y M⁻¹ sean matrices traspuestas:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{M}} &\equiv m_{ij} = \bar{b}_i \bullet \bar{b}'_j \\ \overline{\overline{M}}^{-1} &\equiv m^{-1}_{ij} = \bar{b}'_i \bullet \bar{b}_j = m_{ji} \Rightarrow \overline{\overline{M}}^{-1} = \overline{\overline{M}}^T \\ \overline{\overline{M}} \overline{\overline{M}}^T &\equiv \overline{\overline{I}} \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}} \right) \overline{\overline{M}}^T + \overline{\overline{M}} \left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}}^T \right) = \overline{\overline{0}} \\ \left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}} \right) \overline{\overline{M}}^T &= -\overline{\overline{M}} \left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}} \right)^T = -\left(\left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}} \right) \overline{\overline{M}}^T \right)^T \end{aligned}$$

donde hemos aplicado las propiedades de transposición de un producto de matrices y que las operaciones de transposición y derivada en el tiempo pueden cambiar de orden en cualquier caso. El resultado es que la matriz correspondiente es antisimétrica, y podemos tomar la forma

$$\left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}} \right) \left(\overline{\overline{M}}^{-1} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix} \equiv \overline{\overline{w}} \times$$

vemos que la expresión inicial queda, utilizando el producto vectorial, así

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{w} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}; \quad \bar{w} = (w_x, w_y, w_z)$$

de modo que la velocidad angular de un sólido rígido corresponde matemáticamente con un tensor antisimétrico y que por medio de la operación producto vectorial podemos manejar, de forma mas intuitiva, como un vector.

Un cálculo sencillo para nuestro caso de giro respecto del eje z recupera el resultado ya obtenido

$$\left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}} \right) \left(\overline{\overline{M}}^{-1} \right) = \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta) & -\text{cos}(\theta) & 0 \\ \text{cos}(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos imaginar un giro completo como la composición de tres giros elementales sobre los ejes coordenados. Por ejemplo, primero giramos el sistema un ángulo φ_z respecto del eje z. Como consecuencia los ejes [y, x] habrán cambiado de posición. Tomamos el nuevo eje y' girando $\varphi_{y'}$ respecto a dicho eje. Finalmente hacemos lo mismo girando $\varphi_{x''}$ respecto al nuevo eje x''. El giro completo corresponde con la siguiente matriz

$$M = M(\varphi_{x''})M(\varphi_{y'})M(\varphi_z)$$

$$M(\varphi_z) = \begin{pmatrix} \text{cos}(\varphi_z) & -\text{sen}(\varphi_z) & 0 \\ \text{sen}(\varphi_z) & \text{cos}(\varphi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M(\varphi_{y'}) = \begin{pmatrix} \text{cos}(\varphi_{y'}) & 0 & \text{sen}(\varphi_{y'}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\varphi_{y'}) & 0 & \text{cos}(\varphi_{y'}) \end{pmatrix}; \quad M(\varphi_{x''}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}(\varphi_{x''}) & -\text{sen}(\varphi_{x''}) \\ 0 & \text{sen}(\varphi_{x''}) & \text{cos}(\varphi_{x''}) \end{pmatrix}$$

podemos calcular el tensor velocidad angular como

$$\left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}} \right) \left(\overline{\overline{M}}^{-1} \right) = \left[\left(\frac{d}{dt} M(\varphi_{x''}) \right) M(\varphi_{y'}) M(\varphi_z) + M(\varphi_{x''}) \left(\frac{d}{dt} M(\varphi_{y'}) \right) M(\varphi_z) + M(\varphi_{x''}) M(\varphi_{y'}) \left(\frac{d}{dt} M(\varphi_z) \right) \right] \left[M^T(\varphi_z) M^T(\varphi_{y'}) M^T(\varphi_{x''}) \right] + M(\varphi_{x''}) \left[\left(\frac{d}{dt} M(\varphi_{y'}) \right) M^T(\varphi_{y'}) \right] M^T(\varphi_{x''}) + M(\varphi_{x''}) M(\varphi_{y'}) \left[\left(\frac{d}{dt} M(\varphi_z) \right) M^T(\varphi_z) \right] M^T(\varphi_{y'}) M^T(\varphi_{x''})$$

El primer sumando del resultado final corresponde al tensor velocidad angular asociado al giro respecto del eje x'', en el sistema de coordenadas final. El segundo sumando es la transformación al sistema de coordenadas final del tensor velocidad angular asociado al giro en el eje y'. El tercer sumando es la transformación del tensor velocidad angular asociado al giro respecto del eje z al sistema de coordenadas final. La linealidad de la expresión permite expresar el resultado así

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\overline{\overline{M}}^T \equiv \overline{w}_{total} \times \equiv (\overline{w}_x \times + \overline{w}_y \times + \overline{w}_z \times) \equiv (\overline{w}_x + \overline{w}_y + \overline{w}_z) \times$$

que está de acuerdo con la idea de linealidad de la velocidad angular.

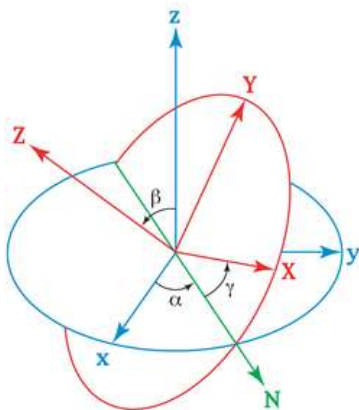
Finalmente, el tensor velocidad angular puede aparecer en cualquier contexto en que un vector C se proyecte geoméricamente sobre las coordenadas de otro sistema que está en giro relativo según la matriz $M(t)$ formando el vector C'

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \overline{w} \times \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_{x'} \\ C_{y'} \\ C_{z'} \end{pmatrix}; \quad \overline{w} \times \equiv \left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\overline{\overline{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}$$

el término asociado a la velocidad angular está relacionado con el cambio de orientación del sistema de coordenadas en el tiempo; una idea similar se incluye en el concepto matemático de *derivada covariante*.

El lector puede ver un análisis del problema de las matrices de giro en la referencia [4]

Los ángulos de Euler



La imagen adjunta representa la disposición de dos sistemas de coordenadas ortogonales : un sistema fijo (x,y,z) en azul y un sistema rotante (X,Y,Z) en rojo. Salvo la ligadura de compartir el origen de coordenadas, la posición relativa de los ejes de los dos sistemas de coordenadas es arbitraria. Los ángulos de Euler, representados en la imagen como (α, β, γ) , son valores que se pueden asociar a giros mediante los que se puede describir el cambio de orientación relativo entre los ejes de los dos sistemas de coordenadas. Dicho de otra forma, asociado los valores (α, β, γ) a los correspondientes

ejes de rotación es posible hacer coincidir, hasta la identidad, los dos sistemas de coordenadas relacionados. El proceso seguido es el siguiente:

1-Eje de rotación el eje Z mayúscula. Se gira el sistema (X,Y,Z) en un valor $-\gamma$ hasta que el eje X coincida con la línea N, denominada también línea de nodos. Como resultado habrán cambiado los ejes (X,Y) (no el Z) por lo que podemos nombrar el nuevo sistema de coordenadas como (X',Y',Z) después del giro. Según la imagen, la línea N es la intersección de los planos asociados a los ejes (x,y) y (X,Y).

2-Eje de rotación X' mayúscula = N. El lector puede ver que los ejes Z mayúscula y z minúscula son perpendiculares a N, ya que N está en la intersección de los planos (x,y) y (X',Y'). Por tanto si giramos un valor $-\beta$ tomando como eje de rotación N haremos coincidir los ejes Z mayúscula y z minúscula. El sistema de coordenadas resultante modifica los ejes Z ,Y', por lo

que podemos nombrarle como $(X', Y'', Z' = z)$. Note el lector que en este paso los ejes X', Y'' acaban estando en el plano (x, y) .

3-Eje de rotación $Z' = z$. Este eje es perpendicular al plano (x, y) , de modo que girando un valor $-\alpha$ respecto de este eje hacemos coincidir los ejes X' mayúscula y x minúscula. Dado que el giro se produce en el plano (x, y) , necesariamente resulta que el eje Y'' llega a coincidir con el eje y ; y finalmente los ejes de los dos sistemas de coordenadas coinciden.

Evidentemente podemos llevar a cabo el proceso en orden inverso y desplazar el sistema de coordenadas (X, Y, Z) a cualquier configuración arbitraria respecto de (x, y, z) y que mantenga el origen de coordenadas.

La matriz de transformación que necesitamos transforma vectores del sistema rotante al sistema fijo : $M(\text{rotante}) \rightarrow \text{fijo}$. En términos de matrices la transformación M en función de los ángulos de Euler es la siguiente

$$M = M(-\alpha)M(-\beta)M(-\gamma)$$

$$M(-\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\text{sen}(\gamma) & 0 \\ \text{sen}(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(-\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) \\ 0 & -\text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}; M(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

a partir de aquí el lector puede calcular la velocidad angular relativa en términos de los ángulos de Euler utilizando la fórmula

$$\left(\frac{d}{dt} \overline{\overline{M}}\right) \overline{\overline{M}}^T = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta' \cos(\gamma) + \alpha' \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma) \\ -\beta' \text{sen}(\gamma) + \alpha' \text{sen}(\beta) \cos(\gamma) \\ \gamma' + \alpha' \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

las variables primadas son las correspondientes derivadas temporales y el vector velocidad angular está en el sistema de coordenadas fijo. Aunque los ángulos de Euler indican una descomposición del movimiento en varios giros, el teorema de la rotación nos dice que esta descomposición es equivalente a un giro respecto de un único eje instantáneo de rotación. Podemos asociar los giros descritos al principio con componentes de la velocidad angular que, proyectadas sobre el sistema (x, y, z) y sumados vectorialmente proporcionan un resultado coherente con el anterior para las componentes netas de la velocidad angular.

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

El cálculo de los componentes del tensor de inercia puede ser mas sencillo en unos sistemas de coordenados que en otros. Puede ser mas sencillo este cálculo en un sistema de coordenadas cuyo origen no sea el centro de masas del sólido rígido. Sin embargo la teoría desarrollada requiere que las componentes del tensor de inercia se refieran al sistema de coordenadas

centro de masas. Por tanto será útil encontrar una relación entre las componentes del tensor de inercia en dos sistemas de coordenadas diferentes.

El teorema de Steiner relaciona las componentes del tensor de inercia correspondientes al sistema de coordenadas centro de masas con las mismas componentes en otro sistema de coordenadas que esté desplazado según un vector r_0 ; de modo que los ejes de ambos sistemas de coordenadas sean paralelos. Tenemos por tanto, para cada componente del tensor de inercia en el sistema de coordenadas *distinto* al del centro de masas

$$I^{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} [\bar{r}_i + \bar{r}_0]^2 - [x_i^\alpha + x_0^\alpha][x_i^\beta + x_0^\beta])$$

donde r_i, x_i , son medidas referidas al centro de masas de la i -ésima partícula del sólido rígido y r_0, x_0 son los valores correspondientes del desplazamiento. Desarrollando la expresión tenemos

$$I^{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 + \delta_{\alpha\beta} r_0^2 - x_i^\alpha x_i^\beta - x_0^\alpha x_0^\beta) + \sum_i m_i (2\delta_{\alpha\beta} \bar{r}_i \cdot \bar{r}_0 - x_i^\alpha x_0^\beta - x_0^\alpha x_i^\beta)$$

debido a que el desplazamiento r_0 es un vector que no depende de la posición, es decir: o es constante o depende solo del tiempo, podemos factorizar en el segundo sumatorio los valores asociados al desplazamiento. Con esto obtenemos valores relacionados con la posición del centro de masas respecto del sistema de coordenadas centro de masas. Esto supone que el segundo sumatorio se anula y tenemos el siguiente resultado

$$I^{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_i^\alpha x_i^\beta) + M (\delta_{\alpha\beta} r_0^2 - x_0^\alpha x_0^\beta) \Rightarrow$$

$$I^{\alpha\beta} = I_{CM}^{\alpha\beta} + M (\delta_{\alpha\beta} r_0^2 - x_0^\alpha x_0^\beta)$$

Expresión que relaciona las componentes del tensor de inercia en el centro de masas (CM) con las mismas componentes en otro sistema de coordenadas de ejes paralelos al sistema CM y desplazado en vector r_0 .

El teorema de Steiner se refiere a un desplazamiento entre sistemas de coordenadas. En el caso de un giro entre sistemas de coordenadas que mantienen un punto origen común, aplicando lo visto para el caso de la velocidad angular la transformación la relación entre las componentes del tensor de inercia I en el sistema de coordenadas girado (sc-2) y el sistema coordenadas inicial (sc-1) verifican

$$I^{sc-2} = M I^{sc-1} M^T$$

donde M es la matriz que transforma los vectores del sistema de coordenadas 1 al sistema de coordenadas 2.

Estimación de la amplitud de la nutación para el movimiento de la peonza

Siguiendo la línea de la conservación de la energía, tenemos que la relación entre modificaciones de energía cinética de rotación respecto al CM y energía potencial del centro de masas debe ser prácticamente igual a 1; donde el acento representa la derivada en el tiempo.

$$\frac{dE_c}{dE_p} = \frac{L\omega'}{mgr \sin(\varphi)\varphi'} \approx 1$$

Si multiplicamos numerador y denominador por un valor T_n proporcional al periodo de nutación tendremos la siguiente estimación de amplitudes

$$\frac{\Delta E_c}{\Delta E_p} = \frac{L\omega'T_n}{mgr \sin(\varphi)\varphi'T_n} = \frac{L\Delta\omega}{mgr \sin(\varphi)\Delta\varphi} \approx 1$$

Por otro lado, de la condición de rodadura del diagrama de Poncelet tenemos que se debe cumplir una relación del tipo $\omega d_1 = \Omega d_2$, relación que podemos encontrar de la siguiente forma

$$L\Omega = mgr \Rightarrow L\omega\Omega = mgr\omega \Rightarrow \omega = \frac{2E_c}{mgr}\Omega \Rightarrow \Delta\omega = \frac{2E_c}{mgr}\Delta\Omega$$

donde suponemos aproximadamente válida la última relación entre amplitudes. Además hemos obtenido este resultado para la amplitud de precesión

$$\cos(\varphi) = \frac{L\Delta\Omega}{mr^2\Omega^2}$$

con estos resultados podemos eliminar las amplitudes $\Delta\omega$ y $\Delta\Omega$ en la relación para $\Delta E_c/\Delta E_p$ y obtener un resultado para la amplitud de nutación $\Delta\varphi$

$$\tan(\varphi)\Delta\varphi = \frac{2E_c}{mg^2}\Omega^2$$

Energía mecánica y Lagrangiana de la peonza.

Recordemos la ley de conservación de la energía mecánica de un sólido rígido respecto del sistema inercial del laboratorio es

$$\boxed{\sum_i \int \vec{F}_i^{Externa} \cdot d\vec{r}_i = \Delta \left(\frac{1}{2} M (\vec{v}_{cm}^{LAB})^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i^{CM})^2 \right)}$$

El trabajo total de las fuerzas externas es igual a la variación de energía cinética del sólido rígido. La energía cinética tiene dos componentes : la energía cinética del centro de masas y la energía cinética respecto al centro de masas. Para el caso de la peonza podemos calcular este último término retomando el grupo de sistemas de coordenadas G en reposo relativo con el

sistema centro de masas y en reposo instantáneo como el sistema intrínseco de la peonza. Este grupo ya se utilizó en la deducción de las ecuaciones de Euler. La energía cinética de rotación respecto al centro de masas será

$$E_{rotacion}^{CM} = \frac{1}{2} \bar{w}^{-CM}(t) \bullet \bar{L}_{total}^{CM}(t) = \frac{1}{2} \left[T(t) \bar{w}^{-G}(t) \right] \bullet \left[T(t) \bar{L}_{total}^{-G}(t) \right] = \frac{1}{2} \bar{w}^{-G}(t) \bullet \bar{L}_{total}^{-G}(t)$$

donde se han utilizado las propiedades del producto escalar respecto a transformaciones ortogonales $T(t)$ (giros). Dado que en el grupo de sistemas G el tensor de inercia es diagonal y considerando la simetría tenemos

$$E_{rotacion}^{CM} = \frac{1}{2} \left(I_{xx}^G [w_{Gx}^2 + w_{Gy}^2] + I_{zz}^G w_{Gz}^2 \right); I_{xx}^G = I_{yy}^G$$

Como hemos visto en la sección anterior podemos expresar la velocidad angular mediante los ángulos de Euler (α, β, γ) entre el sistema de coordenadas S y el sistema de coordenadas centro de masas. Sin embargo necesitamos ahora representar la velocidad angular en el sistema de coordenadas en giro, no en el sistema de coordenadas fijo. Esto supone que debemos utilizar la matriz inversa a la matriz $M(\text{rotante}) \rightarrow \text{fijo}$; es decir $M^T(\text{fijo}) \rightarrow \text{rotante}$; ya que al ser M una matriz de giro su inversa es igual a su traspuesta. Por tanto debemos utilizar la matriz

$$M^T = [M(-\alpha)M(-\beta)M(-\gamma)]^T = M^T(-\gamma)M^T(-\beta)M^T(-\alpha) = M(\gamma)M(\beta)M(\alpha)$$

el lector puede ver rápidamente que podemos llegar a la velocidad angular en el sistema en giro(G) partiendo de los resultados anteriores para el sistema fijo y haciendo el cambio $\alpha_{fijo} \rightarrow -\gamma_{giro}$; $\beta_{fijo} \rightarrow -\beta_{giro}$; $\gamma_{fijo} \rightarrow -\alpha_{giro}$ resultando para la velocidad angular en el sistema en giro

$$\begin{pmatrix} w_{Gx} \\ w_{Gy} \\ w_{Gz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\beta' \cos(\alpha) - \gamma' \text{sen}(\beta) \text{sen}(\alpha) \\ -\beta' \text{sen}(\alpha) + \gamma' \text{sen}(\beta) \cos(\alpha) \\ -\alpha' - \gamma' \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

el signo negativo adicional se debe a que el resultado directo del cálculo indicado es la velocidad angular relativa del sistema fijo referido al sistema móvil. Pero nos interesa el vector opuesto, asociado al giro del sistema móvil referido al sistema fijo; esto es algo que ya vimos en la parte cinemática en relación al movimiento aparente de las estrellas vistas desde la tierra. Finalmente la energía de rotación queda

$$E_{rotacion}^{CM} = \frac{1}{2} \left(I^{xx} [(\beta' \cos(\alpha) + \gamma' \text{sen}(\beta) \text{sen}(\alpha))^2 + (\beta' \text{sen}(\alpha) - \gamma' \text{sen}(\beta) \cos(\alpha))^2] + I^{zz} (\alpha' + \gamma' \cos(\beta))^2 \right)$$

$$\Rightarrow E_{rotacion}^{CM} = \frac{1}{2} \left(I^{xx} [(\beta')^2 + (\gamma' \text{sen}(\beta))^2] + I^{zz} [\alpha' + \gamma' \cos(\beta)]^2 \right)$$

El término correspondiente a la energía cinética del centro de masas puede despreciarse frente al resto en este caso, ya que hemos visto en la discusión

previa que la dinámica de la peonza se basa principalmente en el intercambio entre energía de rotación y energía potencial, sin apenas participación de la energía cinética de traslación del centro de masas.

En la parte de fuerzas externas tenemos que el trabajo realizado por las fuerzas de contacto del suelo con el extremo de la peonza son nulas al carecer de desplazamiento. Por tanto solamente queda el trabajo asociado a la gravedad, que como sabemos puede ponerse como la variación de energía potencial del centro de masas. De esta forma podemos aproximar el principio de conservación de la energía E por

$$E \approx \frac{1}{2} \left(I^{xx} [(\beta')^2 + (\gamma' \operatorname{sen}(\beta))^2] + I^{zz} [\alpha' + \gamma' \cos(\beta)]^2 \right) + Mgr \cos(\beta)$$

donde la altura del centro de masas respecto al suelo se ha calculado a partir de la distancia del punto de contacto de la peonza al centro de masas (r) y el ángulo entre el eje z del sistema correspondiente de G y el eje z del sistema centro de masas; este último lo suponemos vertical, es decir, paralelo al campo gravitatorio.

Dado que la dinámica de la peonza se basa principalmente en el intercambio entre energía de rotación y energía potencial, sin apenas participación de la energía cinética de traslación del centro de masas; podemos aproximar la función *Lagrangiana* L (no confundir con momento angular), que se define como la diferencia entre energía cinética y potencial, de este modo para la peonza

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \approx \frac{1}{2} \left(I^{xx} [(\beta')^2 + (\gamma' \operatorname{sen}(\beta))^2] + I^{zz} [\alpha' + \gamma' \cos(\beta)]^2 \right) - Mgr \cos(\beta)$$

El resultado de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange[5] a la expresión anterior proporciona una descripción precisa del movimiento de la peonza como puede verse en textos clásicos como la Mecánica de Goldstein.

Bibliografía

[1] Teorema de Euler

http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_rotaci3n_de_Euler

[2] Física de M.Alonso y E.J.Finn –Volumen 1: Mecánica. 1968

[3] *Análisis elemental del movimiento bajo fuerza central de tipo Newtoniano.*

[3'] *Sobre la forma de la tierra.* En esta misma web, por este mismo autor.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix

[5] *Introducción a la Mecánica Analítica.* En esta misma web por este mismo autor.