Título/Title	Un paisaje relativista / A relativistic landscape
Nombre/Name	Enrique Cantera del Río
Filiación/Addres	C/Padre Benito Menni-6-2-E 47008 Valladolid (España)
Correo electrónico/E-mail	benarrob@gmail.com
Resumen/Abstract	Se propone una visualización del panorama físico mas elemental derivado de la relatividad especial. A visualization of the most basic physical landscape derived from special relativity is proposed.

A RELATIVISTIC LANDSCAPE

Enrique Cantera del Río

Introduction

Imagine yourself into the skin of a lost explorer in a deserted area. From his position may see some mountains, so that he goes to the nearest, trying to get a broader perspective to see a road, village, river or some other helping reference. From the top it can be seen the winding path he has followed and other simplest possible paths from the top to the plain, passing close to other roads made by man. Though he carries to the top both, good intentions and prejudices, the observer has a chance to get an idea of where it is, where it has to go and what way.

In the case of special relativity, the mountain corresponding is the principle of relativity, and within it the "eagle´s crag" corresponds to the light's speed constancy principle. We can describe such a height place by means of relativistic transformations between two inertial observers, using Cartesian coordinate systems with parallel axes and which move relatively on the common axis direction X.

The Lorentz transformation relates the measures of space and time for the same physical event by the two observers

$$\Delta t' = (\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)\beta^{-1}\ ;\ \ \Delta x' = (\Delta x - v\Delta t)\beta^{-1};\ \ \ \Delta y' = \Delta y;\ \ \Delta z' = \Delta z \qquad (T1)$$

$$\beta = \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

Measures of frequency (ω) and wave vector (*k*) of the same wave differ between observers according to the relationship

$$\omega' = (\omega - v k_x)\beta^{-1};\ \ k_x^{'} = (k_x - \frac{v}{c^2}\omega)\beta^{-1};\ k_y^{'} = k_y;\ k_z^{'} = k_z \qquad (T2)$$

Measures of mechanical impulse (*P*) and energy (*E*) for the same particle differ between observers according to

$$E' = (E - vP_x)\beta^{-1};\ \ P_x^{'} = (P_x - \frac{v}{c^2}E)\beta^{-1};\ P_y^{'} = P_y;\ P_z^{'} = P_z \qquad (T3)$$

The usual interpretation of these relationships can be expressed by saying that from the eagle´s crag we see *Minkowski Space*. It seems a paradox but If he want to see something concrete from this level of abstraction, our explorer must imagine also abstract questions.

Motion

All motion is a relationship between space intervals (Δx, Δy, Δz) and time intervals Δt. The simplest relationships are associated with classic vector algebra

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \overline{V}\Delta t \quad ; \ \Delta t = \overline{W} \bullet (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

if we apply *T1* to this definitions, so that the other observer can get the same mathematical form for the motion, we have

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - \frac{vV_x}{c^2}}; \ V_y = \frac{\beta V_y}{1 - \frac{vV_x}{c^2}}; \ V_z = \frac{\beta V_z}{1 - \frac{vV_z}{c^2}} \quad (T4)$$

$$W'_x = \frac{W_x - \frac{v}{c^2}}{1 - vW_x}; \ W_y = \frac{\beta W_y}{1 - vW_x}; \ W_z = \frac{\beta W_z}{1 - vW_x} \quad (T5)$$

Obviously the first relationship *T4* corresponds to the transformation of the velocity of a particle between inertial systems of special relativity. But the second relationship *T5* describes the motion of a wave, namely the movement of a constant phase state

$$\overline{k} \bullet \Delta\overline{r} - \omega\Delta t = 0 \Rightarrow \frac{\overline{k}}{\omega} \bullet \Delta\overline{r} = \Delta t; \quad \overline{W} = \frac{\overline{k}}{\omega}$$

the reader can check, using *T2*, that the *k/ω* vector transforms between inertial observers like the vector *W*.

Interaction

We assume a variation of mechanical impulse and / or related energy for any interaction. Similar as the case of the movement we can take

$$(\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z) = \overline{W}\Delta E \quad ; \ \Delta E = \overline{V} \bullet (\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z)$$

and after applying *T3* is found that *W* and *V* have the same transformation rule as in the case of motion. The second formula depends on the velocity of a particle and can easily recognize as the variation of kinetic energy of a constant mass particle. Following the symmetry, we can understand the first expression as energy-impulse exchanged by a wave and therefore

$$\overline{W}\Delta E = \Delta\overline{P}; \ \overline{W} = \overline{k}/\omega \Rightarrow \overline{k}\Delta E = \Delta\overline{P}\,\omega \Rightarrow \frac{\Delta E}{\omega} = \frac{\Delta P_x}{k_x} = \frac{\Delta P_y}{k_y} = \frac{\Delta P_z}{k_z}$$

Obviously the equality of quotients is also valid for the other observer, but there is something more. The reader can see that from *T2* : $k_z = k'_z$ and from *T3* : $\Delta P_z = \Delta P'_z$,therefore the value of the above quotients is the same for the two observers and then invariant between inertial coordinates, which is necessary in the context of relativity to justify the existence of *Planck's constant* and the *energy quanta*

$$k_z = k_z^{'}; \ \Delta P_z = \Delta P_z^{'} \Rightarrow \frac{\Delta E}{\omega} = \frac{\Delta E'}{\omega'} = n\hbar$$

where n is the number of basic packages of energy that wave exchanges. In the black-body problem Einstein introduced two concepts that fit with this view: the *induced emission* and *induced absorption* of radiation. In the induced emission, an electromagnetic wave causes the transition of electrons from one energy level to another, while lower energy levels are available; but this only happens if the emitted photons corresponds to the frequency of the inductor wave. Furthermore, the emitted photons are perfectly integrated into the inductive wave. There is no several waves of the same frequency that can interfere with each other, but the emitted photons are *in phase* with the inductor wave and it can be said that the wave has absorbed the corresponding amount of energy. This phenomenon is the basis of *LASER*. In the Induced absorption, a wave loses photons that are absorbed by electrons that make the corresponding change in the energy level, while the final level is available. Similarly inducing wave maintains the same phase, frequency and wavelength.

Wave-particle interaction

From the above we can theorize about the existence of a system in which a particle (subscript p) exchange energy and momentum with a wave (subscript w) so that the energy and mechanical impulse of the system is preserved:

$$\Delta E_p = -\Delta E_w \; ; \; \Delta \overline{P}_p = -\Delta \overline{P}_w \Rightarrow$$
$$\Delta E_p = \overline{V} \bullet \Delta \overline{P}_p = -\overline{V} \bullet \Delta \overline{P}_w = -\overline{V} \bullet \overline{W} \Delta E_w ; \; \rightarrow \; \overline{W} \bullet \overline{V} = 1 \quad (S1)$$

We can apply the above transformations *T4* and *T5* to this result and see that the expression $W_xV_x+W_yV_y+W_zV_z =1$ is invariant between inertial observers. So our system is in a physical state independent of the observer. Suppose the energy interchanged corresponds to a quantum of energy, then we have

$$\frac{\Delta E}{\omega} \overline{W} \bullet \overline{V} = \Delta \overline{P} \bullet \overline{V} \frac{T}{2\pi} \Rightarrow \Delta \overline{P} \bullet \Delta \overline{r} = 2\pi \frac{\Delta E}{\omega} = 2\pi \hbar \Rightarrow$$
$$\Delta \overline{P} \bullet \Delta \overline{r} = h$$

where Δr is the displacement of the particle for the period T of the wave. The result is compatible with *Heisenberg´s uncertainty principle* and therefore any particle can be in this state.

In the case of a charge radiating by acceleration, a relationship between energy and mechanical impulse of radiation is found

$$\Delta \overline{P} = \frac{\overline{V}}{c^2} \Delta E \Rightarrow \overline{W} = \frac{\overline{V}}{c^2} \Rightarrow \overline{W} \bullet \overline{V} = \frac{V^2}{c^2} < 1 \quad (S2)$$

The reader can also verify that, with the latter definition for W, the relationship $W_xV_x+W_yV_y+W_zV_z < 1$ is also invariant according to *T4* and *T5*; indicating a different physical state than *S1* wave-particle balance. But we should also find a wave that matched the found value W, and according to quantum mechanics a free particle can be represented by a wave function ψ with the expected value W

$$\psi(\overline{P}\bullet\overline{r}-Et)\rightarrow\overline{W}=\frac{\overline{P}}{E}=\frac{\overline{V}}{c^2}$$

where *P* and *E* are the corresponding relativistic values. If we reproduce the above calculation on the interaction wave-particle in this case, we arrive at

$$\Delta\overline{P}\bullet\Delta\overline{r}<h$$

and therefore in this state *S2* there is no exchange of energy between the particle and its associated wave. A system that changes from one to another of the aforementioned states must emit or absorb a photon; and therefore this change of state is a non-linear process.

Wave-particle-field interaction

From *S1* we can make

$$mc^2\Delta E_o\overline{W}\bullet\overline{V}=c^2\Delta\overline{P}_o\bullet\overline{P}_p=E_p\Delta E_o$$

where *m* is the relativistic mass of the particle. On the other hand, if m_0 is the rest mass of the particle, for small changes in energy-impulse we have

$$E_p^2=c^2P_p^2+\left(m_0c^2\right)^2\Rightarrow c^2\overline{P}_p\bullet\Delta\overline{P}_p=E_p\Delta E_p$$

and adding the two expressions

$$c^2\overline{P}_p\bullet\left(\Delta\overline{P}_o+\Delta\overline{P}_p\right)=E_p\left(\Delta E_o+\Delta E_p\right)$$

if the wave-particle interaction is balanced then the two sides of equation are null. But this equation can be maintained with not null values in both sides and this fact give us a chance to include field interaction (subscript *f*) in this way

$$c^2\overline{P}_p\bullet\left(\Delta\overline{P}_o+\Delta\overline{P}_p+\Delta\overline{P}_f\right)=E_p\left(\Delta E_o+\Delta E_p+\Delta E_f\right)$$

so we are supposing that *the field-particle interaction is similar to the wave-particle interaction*. A particle can have the same interaction with different values in his mechanical impulse; if the above equation is valid for all possible values of particle´s mechanical impulse it is evident that

$$\Delta\overline{P}_o+\Delta\overline{P}_p+\Delta\overline{P}_f=0\ ;\ \Delta E_o+\Delta E_p+\Delta E_f=0$$

so this state *S1,* extended with a external field, can conserve the energy-impulse.

Evidently, if the state is *S2* (extended) energy-impulse conservation is not possible and we must expect an absorption/emission of additional energy.

References

[1]Stimulated emission : https://en.wikipedia.org/wiki/Stimulated_emission

[2]Space,time, matter and vacuum (Spanish): Same author In this web-site.

UN PAISAJE RELATIVISTA

Enrique Cantera del Río

Introducción

Imagínese el lector en la piel de un explorador perdido en una zona desierta. Desde su posición pueden verse algunas montañas, de modo que se dirige a la mas cercana para, desde una perspectiva mas amplia, ver si puede divisar algún camino, poblado, río o alguna otra referencia que le ayude. Desde lo alto puede ver la senda tortuosa que ha seguido y otras posibles sendas aparentemente mas sencillas desde la cima hasta el llano y que pasan cerca de otros caminos hechos por el hombre. Aunque a la cima ascienden tanto las buenas intenciones como los prejuicios, el observador tiene una oportunidad de hacerse una idea de donde está, hacia donde tiene que ir y por que camino.

En el caso de la relatividad especial la montaña correspondiente es el *principio de relatividad* , y dentro de ella el “risco del águila” corresponde al *principio de constancia de la velocidad de la luz*. Se puede describir este lugar elevado por medio de las transformaciones relativistas entre dos observadores inerciales que utilizar sistemas de coordenadas cartesianos de ejes paralelos y que se desplazan relativamente sobre la dirección común del eje X.

La *transformación de Lorentz* relaciona las medidas de espacio y tiempo de un mismo suceso físico según los dos observadores

$$\Delta t' = (\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)\beta^{-1} \ ; \ \Delta x' = (\Delta x - v\Delta t)\beta^{-1} ; \quad \Delta y' = \Delta y; \ \Delta z' = \Delta z \qquad (T1)$$

$$\beta = \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

donde v es la velocidad relativa evaluada por el observador “sin primas”.

Las medidas de frecuencia (ω) y vector de ondas (k) de una misma onda difieren entre observadores según la relación

$$\omega' = (\omega - vk_x)\beta^{-1}; \ k_x' = (k_x - \frac{v}{c^2}\omega)\beta^{-1}; \ k_y' = k_y; \ k_z' = k_z \qquad (T2)$$

Las medidas de impulso mecánico (P) y energía (E) de una misma partícula difieren entre observadores según la relación

$$E' = (E - vP_x)\beta^{-1}; \ P_x' = (P_x - \frac{v}{c^2}E)\beta^{-1}; \ P_y' = P_y; \ P_z' = P_z \qquad (T3)$$

La interpretación habitual de estas relaciones puede expresarse diciendo que desde el risco del águila se ve el *espacio de Minkowsky*. Parece una paradoja, pero si quiere ver algo concreto desde semejante nivel de abstracción nuestro explorador deberá plantearse preguntas igualmente abstractas.

Movimiento

Todo movimiento es una relación entre intervalos de espacio (Δx, Δy, Δz) e intervalos de tiempo Δt. Las relaciones mas sencillas asociadas al álgebra vectorial clásica son

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \overline{V}\Delta t \quad ; \ \Delta t = \overline{W} \bullet (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

si a estas relaciones aplicamos las relaciones *T1* de modo que el observador primado encuentra la misma forma matemática para el movimiento tenemos

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - \frac{vV_x}{c^2}}; \ V_y = \frac{\beta V_y}{1 - \frac{vV_x}{c^2}}; \ V_z = \frac{\beta V_z}{1 - \frac{vV_z}{c^2}} \quad (T4)$$

$$W'_x = \frac{W_x - \frac{v}{c^2}}{1 - vW_x}; \ W_y = \frac{\beta W_y}{1 - vW_x}; \ W_z = \frac{\beta W_z}{1 - vW_x} \quad (T5)$$

Evidentemente la primera relación corresponde a la transformación de la velocidad de una *partícula* entre sistemas inerciales de la relatividad especial. Pero la segunda relación describe el movimiento de una *onda*, en concreto el movimiento de un estado de fase constante

$$\overline{k} \bullet \Delta\overline{r} - \omega\Delta t = 0 \Rightarrow \frac{\overline{k}}{\omega} \bullet \Delta\overline{r} = \Delta t; \quad \overline{W} = \frac{\overline{k}}{\omega}$$

el lector puede comprobar aplicando *T2* que el vector *k/ω* se transforma entre observadores inerciales igual que el vector *W*.

Interacción

En toda interacción suponemos la aparición de una variación de impulso mecánico y/o energía. En la misma línea que el caso del movimiento podemos tomar

$$(\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z) = \overline{W}\Delta E \quad ; \ \Delta E = \overline{V} \bullet (\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z)$$

y tras aplicar *T3* se comprueba que *W* y *V* se transforman de la misma forma que en el caso del movimiento. La segunda relación depende de la velocidad de una partícula y podemos reconocer fácilmente la expresión como la variación de energía cinética de una partícula de masa constante. Siguiendo la misma senda, todo apunta a interpretar la primera expresión como la energía intercambiada por una onda y podemos poner

$$\overline{W}\Delta E = \Delta\overline{P}; \ \overline{W} = \overline{k}/\omega \Rightarrow \overline{k}\Delta E = \Delta\overline{P}\,\omega \Rightarrow \frac{\Delta E}{\omega} = \frac{\Delta P_x}{k_x} = \frac{\Delta P_y}{k_y} = \frac{\Delta P_z}{k_z}$$

Evidentemente la igualdad de cocientes también es válida para el observador primado, pero hay algo mas. Note el lector que según *T2* tenemos $k_z = k'_z$ y según *T3* $\Delta P_z = \Delta P'_z$;por tanto el valor de los cocientes anteriores es *invariante* entre sistemas de coordenadas inerciales, lo cual es necesario en el contexto de la relatividad para justificar la existencia de la constante de Planck y los cuantos de energía

$$k_z = k_z^{'};\ \Delta P_z = \Delta P_z^{'} \Rightarrow \frac{\Delta E}{\omega} = \frac{\Delta E'}{\omega'} = n\hbar$$

donde *n* es el número de paquetes básicos de energía que la onda intercambia. En el problema del cuerpo negro Einstein introdujo dos conceptos que encajan con este planteamiento: La *emisión y absorción inducida de radiación*. En la emisión inducida, una onda electromagnética provoca la transición de electrones de un nivel energético a otro , disponible, de menor energía; pero esto solo ocurre si el fotón emitido corresponde a la frecuencia de la onda inductora. Además los fotones emitidos se integran perfectamente en la onda inductora. No aparecen varias ondas de la misma frecuencia que pueden interferir entre ellas, sino que los fotones emitidos están *en fase con la onda inductora* y puede decirse que la onda ha absorbido la cantidad correspondiente de energía. Este fenómeno es la base de funcionamiento de los *LASER*. En la absorción inducida una onda pierde fotones que son absorbidos por electrones que hacen el cambio correspondiente de nivel energético, supuesto que el nivel final está disponible. De igual modo la onda inductora mantiene la misma fase ,frecuencia y longitud de onda.

Interacción Onda-Partícula

De lo anterior podemos teorizar sobre la existencia de un sistema en que una partícula (subíndice *p*) intercambie energía e impulso con una onda (subíndice *o*) de forma que se conserve la energía y el impulso mecánico del sistema:

$$\Delta E_p = -\Delta E_o\ ;\ \Delta \overline{P}_p = -\Delta \overline{P}_o \Rightarrow$$
$$\Delta E_p = \overline{V} \bullet \Delta \overline{P}_p = -\overline{V} \bullet \Delta \overline{P}_o = -\overline{V} \bullet \overline{W} \Delta E_o;\ \rightarrow\ \overline{W} \bullet \overline{V} = 1 \qquad (E1)$$

Podemos aplicar al resultado las transformaciones anteriores *T4* y *T5* y comprobar que la característica $W_xV_x+W_yV_y+W_zV_z=1$ es invariante entre observadores inerciales. Por tanto nuestro sistema está en un *estado físico* independiente del observador. Supongamos que la energía intercambiada corresponde a un cuanto de energía, entonces podemos hacer el siguiente desarrollo

$$\frac{\Delta E}{\omega} \overline{W} \bullet \overline{V} = \Delta \overline{P} \bullet \overline{V} \frac{T}{2\pi} \Rightarrow \Delta \overline{P} \bullet \Delta \overline{r} = 2\pi \frac{\Delta E}{\omega} = 2\pi\hbar \Rightarrow$$
$$\Delta \overline{P} \bullet \Delta \overline{r} = h$$

donde Δr es el desplazamiento de la partícula correspondiente al periodo *T* de la onda. De esta forma el resultado es compatible con el *principio de incertidumbre de Heisenberg* y por tanto el estado definido puede afectar a cualquier partícula.

En el caso de la radiación de una carga acelerada existe una relación entre la energía y el impulso mecánico radiados de la forma

$$\Delta \overline{P} = \frac{\overline{V}}{c^2} \Delta E \Rightarrow \overline{W} = \frac{\overline{V}}{c^2} \Rightarrow \overline{W} \bullet \overline{V} = \frac{V^2}{c^2} < 1 \quad (E2)$$

El lector puede comprobar también que, con esta última definición para *W*, la relación $W_xV_x+W_yV_y+W_zV_z < 1$ también es invariante según *T4* y *T5*; lo que indica un estado físico diferente al equilibrio onda-partícula de *S1*. Pero además deberíamos encontrar una onda que se ajustase al valor *W* encontrado y según la mecánica cuántica una *partícula libre* puede representarse mediante una función de onda *ψ* con el valor *W* esperado

$$\psi(\overline{P} \bullet \overline{r} - Et) \rightarrow \overline{W} = \frac{\overline{P}}{E} = \frac{\overline{V}}{c^2}$$

donde *P* y *E* son los valores relativistas correspondientes. Si reproducimos el cálculo anterior sobre la interacción onda-partícula para este caso, llegaremos al resultado

$$\Delta\overline{P} \bullet \Delta\overline{r} < h$$

y por tanto en este estado *S2* no hay intercambio de energía entre la partícula y su onda asociada. Un sistema que cambie de uno a otro de los estados señalados deberá emitir o absorber un fotón; y por tanto es un proceso no lineal.

<u>*Interacción Onda-Partícula-Campo*</u>

Supongamos una partícula cargada en el estado *E1*. De la relación *E1* podemos deducir

$$mc^2 \Delta E_o \overline{W} \bullet \overline{V} = c^2 \Delta\overline{P}_o \bullet \overline{P}_p = E_p \Delta E_o$$

donde *m* es la masa de la partícula afectada por la corrección relativista. Por otra parte, si m_0 es la masa en reposo se la partícula, para pequeñas variaciones de la energía-impulso de una partícula tenemos

$$E_p^2 = c^2 \overline{P}_p + \left(m_0 c^2\right)^2 \Rightarrow c^2 \overline{P}_p \bullet \Delta\overline{P}_p = E_p \Delta E_p$$

sumando las dos expresiones

$$c^2 \overline{P}_p \bullet \left(\Delta\overline{P}_o + \Delta\overline{P}_p\right) = E_p\left(\Delta E_o + \Delta E_p\right)$$

si la interacción onda-partícula está balanceada los dos lados de la ecuación anterior son nulos. Pero la ecuación anterior puede mantenerse aun cuando los dos lados no sean nulos y esto nos ofrece un margen para incluir la interacción con el campo (subíndice *c*) de esta forma

$$c^2 \overline{P}_p \bullet \left(\Delta\overline{P}_o + \Delta\overline{P}_p + \Delta\overline{P}_c\right) = E_p\left(\Delta E_o + \Delta E_p + \Delta E_c\right)$$

de modo que suponemos que *la interacción entre el campo y la partícula es similar a la interacción entre la onda y la partícula*. Una partícula puede experimentar la misma interacción con distintos valores de su impulso mecánico; si la igualdad anterior se mantiene para todos los posibles valores del impulso mecánico de la partícula es evidente que debe ser

$$\Delta\overline{P}_o + \Delta\overline{P}_p + \Delta\overline{P}_c = 0 \;;\; \Delta E_o + \Delta E_p + \Delta E_c = 0$$

y por tanto el sistema en este estado *E1* ampliado con un campo externo puede conserva la energía. Evidentemente, si el estado de la partícula es el *E2* (ampliado) la conservación de la energía no es posible y debemos suponer la existencia de absorción o emisión de energía adicional.

Referencias

[1]Emisión estimulada : https://en.wikipedia.org/wiki/Stimulated_emission

[2]Espacio,tiempo,material y vacío : mismo autor en este web-site.