Título del Trabajo	Radiación de una carga acelerada.
Nombre	Enrique Cantera del Río
Filiación	C/Padre Benito Menni-6-2-E 47008 Valladolid (España)
Correo electrónico	benarrob@gmail.com
Resumen	Replanteamiento del problema de la dinámica de una carga acelerada.
Versión 3ª	Tercera versión respecto a la primera aparecida en la edición 8 de INGLOMAYOR. A parte de modificaciones de estilo en la redacción y renumeración de las ecuaciones se mantiene el texto de la primera versión y : 1-Se incluye la nueva sección 8-*Compatibilidad analítica de las ecuaciones*. 2-Se incluye la nueva sección 10-*Radiación de carga acelerada y campo gravitatorio*. 3-Se replantea la sección 11.4 sobre el oscilador armónico simplificado las conclusiones respecto a la versión anterior.

RADIACIÓN DE UNA CARGA ACELERADA

Enrique Cantera del Río

Noviembre - 2015

1-Introducción.

El comportamiento de una carga eléctrica acelerada, con independencia de la fuerza aceleradora, es un problema límite de la física clásica. La radiación de un sistema de cargas es un hecho descrito en el *teorema de Pointing*; consecuencia lógica de las ecuaciones de Maxwell. El punto clave es la interpretación del *vector de Pointing* (***S***=***E***x***H***), que aparece en este teorema, como flujo de energía radiada en base al principio de conservación de la energía de un sistema electromagnético. Desde esta perspectiva se puede pensar que la radiación, como la energía potencial, es un comportamiento asociado al sistema de cargas, no a las cargas individuales. En este sentido se habla en los textos de *radiación dipolar, cuadripolar…*. Sin embargo en la teoría clásica se ve inmediatamente que la radiación de un sistema de cargas se puede calcular si se conoce el movimiento de dichas cargas, ya que esto es suficiente para determinar los campos que aparecen en el vector de Pointing. Hay una relación directa entre el movimiento del sistema de cargas y la radiación. *H.A. Lorentz* fue mas allá y amplió el resultado para una carga aislada que resulte ser acelerada de cualquier modo (campo magnético, gravedad,…), *independientemente de la existencia de una energía potencial electromagnética*. Demostró que el campo en las proximidades de una carga con simetría esférica resulta distorsionado por los efectos conjuntos de la aceleración de dicha carga y la velocidad de propagación finita de las alteraciones del campo. Esta distorsión genera una *"auto-fuerza"**[3]*** neta del campo sobre la partícula, sobre su propia fuente, tal que el desplazamiento de esta fuerza puede representar, al menos en ciertos casos, la energía electromagnética radiada. De este modo Lorentz no atribuye la radiación a la aceleración relativa entre las cargas del sistema, tal como sería de esperar si hubiese relación con la energía potencial, sino a la *aceleración de una carga respecto de cualquier sistema de coordenadas inercial*. Una carga puntual acelerada emite energía e impulso en forma de radiación. La razón de esta atribución es la existencia de energía emitida, en forma de oscilaciones del campo electromagnético de la partícula, en zonas relativamente alejadas de la partícula denominadas *campo de radiación*. El observador en el campo de radiación puede relacionar esta energía con un suceso ocurrido en el punto que ocupaba la carga en un tiempo anterior al actual. Este tiempo de retardo corresponde a la velocidad de propagación de una señal electromagnética desde la partícula y el suceso aludido es un cambio en la velocidad del punto cargado**.** En cuanto a la conservación de la energía, la energía de radiación se extrae *directamente* de la energía cinética mecánica de la partícula cargada, no directamente de la energía potencial del sistema electromagnético.

2-La fórmula de Larmor.

Supongamos una superficie esférica en el campo de radiación cuyo centro está ocupado por la carga acelerada. La energía que sale de esa superficie en forma de radiación electromagnética en la unidad de tiempo está dada por la fórmula de Larmor

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\bar{a}(t-\tau)\right]^2$$

donde *q* es el valor de la carga eléctrica, *a* es su aceleración y *τ* corresponde al retardo mencionado anteriormente. La causa de la energía radiada en el instante *t* es la aceleración de la carga en el instante *t - τ*.

Siguiendo las ideas expuestas, podemos buscar una fuerza cuyo desplazamiento genere esta energía radiada. Si esta fuerza existe y cumple las leyes de Newton debe ser

$$\sum \overline{F}_i = m\overline{a} \Rightarrow \overline{F}_{ext} + \overline{F}_r = m\overline{a}$$

donde el subíndice "ext" indica la resultante de fuerzas externas y el subíndice "r" indica la "auto-fuerza" de Lorentz entre la partícula y su propio campo. Dado que el efecto de esta fuerza es disminuir la energía cinética de la partícula y emitirla como radiación podemos poner

$$\int \overline{F}_r \bullet d\overline{r} = -\int \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\overline{a}(t)\right]^2 dt$$

Note el lector que ahora estamos prescindiendo del retardo. Las fuerzas Newtonianas son magnitudes esencialmente locales y deberían referirse a observadores locales a la partícula y no a observadores en el campo de radiación. En principio esto no debería ser ningún problema, ya que hemos visto que la energía que llega al campo de radiación procede de la aceleración de la carga y dicha energía debería estar, en el tiempo correspondiente, tan cercana a la carga como queramos.

$$\overline{F}_r \bullet d\overline{r} = -\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\overline{a} \bullet d\overline{v} = -\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(d(\overline{v} \bullet \overline{a}) - \overline{v} \bullet d\overline{a}\right) \Rightarrow (\overline{v} = d\overline{r}/dt)$$
$$\left(\overline{F}_r - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d\overline{a}}{dt}\right) \bullet d\overline{r} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} d(\overline{v} \bullet \overline{a})$$

Resulta que la fuerza de auto-frenado derivada por Abraham-Lorentz es el segundo término del paréntesis anterior.

$$\overline{F}_r = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d\overline{a}}{dt}$$

Según nuestro desarrollo esta fuerza se puede sostener en los casos en que la velocidad y la aceleración sean siempre perpendiculares o para movimientos oscilatorios de modo que el promedio integral del segundo miembro en un periodo sea cero

$$\int_0^T \left(\overline{F}_r - \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d\overline{a}}{dt}\right) \bullet d\overline{r} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\overline{v} \bullet \overline{a}\Big|_0^T = 0$$

Si aceptamos todo esto, la ley Newton para el caso de una carga acelerada resulta ser **[1]**

$$\overline{F}_{ext} + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d\overline{a}}{dt} = m\overline{a} \qquad (2.1)$$

En el caso en que la fuerza externa sea oscilatoria (no forzada) podemos poner, en una dimensión

$$-m\omega^2 x + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d^3x}{dt^3} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ecuación ampliamente estudiada en la bibliografía y con consecuencias físicamente asumibles. Pero para el caso en que la fuerza externa sea constante la ecuación diferencia es sencilla y tiene como solución

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}_{ext}}{m} + \bar{a}_0 e^{t/\tau}; \qquad \tau = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}$$

que predice una aceleración constante o bién una auto-aceleración o aumento exponencial espontáneo de la aceleración. La discrepancia con las situaciones reales es radical. En los aceleradores de partículas cargadas, donde se puede contrastar este resultado, no ocurre nada parecido. ¿No hemos conseguido una reducción al absurdo? Repasemos los puntos importantes intentando no repetir los mismos errores.

3-La radiación procede de la energía cinética de la partícula.

Imaginemos un objeto en movimiento en nuestro sistema de coordenadas. Introducimos en este objeto cierta cantidad de carga eléctrica de modo que la modificación de masa sea despreciable; lo ponemos en un campo magnético (exclusivamente magnético) externo. Debido a la *fuerza magnética* ***qvxB*** el objeto experimentará una fuerza normal a su trayectoria y debido a la aceleración generada la carga empezará a emitir radiación electromagnética. La emisión de radiación se hace a costa de la energía cinética del objeto y finalizará cuando el objeto acabe en reposo en nuestro sistema de coordenadas. Este fenómeno se constata en ciertos aceleradores de partículas (ciclotrones) y por tanto podemos considerar que existe soporte experimental para considerar que se puede transformar íntegramente energía cinética en radiación.

En el apartado previo hemos utilizado la fórmula de Larmor pero tomando la aceleración instantánea, en vez de la retardada, con el objeto de introducir una fuerza asociada a la radiación. En el siguiente argumento razonaremos sobre la hipótesis de que la radiación procede de la energía cinética pero *sin recurrir a la posible existencia de esta fuerza*. Supongamos una carga en reposo a la que se le aplica una fuerza. De la propia definición de aceleración tenemos que el cambio de velocidad de la partícula en un instante *dt* es ***dv=a*dt***. Pero si en dicho instante la carga, *manteniendo constante su masa*, ha emitido cierta cantidad de radiación y lo ha hecho a costa de su propia energía cinética, ya no podremos asegurar la definición de aceleración. En efecto, de la definición de aceleración se sigue $d\bar{v} = \bar{a}\,dt \Rightarrow m\bar{v} \bullet d\bar{v} = m\bar{v} \bullet \bar{a}\,dt \Rightarrow dE_c = \bar{v} \bullet m\bar{a}\,dt$ es decir, dado un valor instantáneo de la aceleración, la variación instantánea de energía cinética dE_c está completamente determinada si suponemos la masa de la partícula constante; esté cargada o no dicha partícula. Si la radiación supone extinción de energía cinética, entonces debería ser $dE_c \neq \bar{v} \bullet m\bar{a}\,dt$; en contra de la definición de aceleración instantánea. Evidentemente esta situación nos coloca en un error analítico muy básico ya que no podemos prescindir de la definición de aceleración instantánea y por tanto debemos concluir que:

1-*El análisis con la fórmula de Larmor debe incluir el efecto de la aceleración retardada*.

2-El análisis del movimiento de una carga acelerada debe considerar la posibilidad de fluctuaciones de la masa mecánica (m).

Un observador *acelerado no inercial* que perciba la carga en reposo permanente y sin fluctuación de masa, no verá modificación de energía cinética y por tanto no verá emisión de radiación según nuestra hipótesis. Si las leyes físicas deben ser válidas para cualquier observador, entonces la fluctuación de masa puede ser una alternativa válida para explicar la radiación percibida por cualquier observador. Note el lector que con este planteamiento la existencia de una fuerza de radiación todavía es posible, pero como consecuencia derivada de la fluctuación de la masa de la partícula.

4-Teorema de Pointing para una carga acelerada.

Siguiendo las observaciones anteriores, consideremos una superficie esférica centrada en la carga en el instante *dt*. Podemos describir fácilmente esta superficie en geometría analítica. El radio de la esfera (*cτ*) será suficientemente grande para considerar que llega al campo de radiación y suficientemente pequeño como para utilizar una aproximación lineal de la aceleración retardada a partir de la aceleración instantánea de la carga. El teorema de Pointing aplicado a este volumen acotado es

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon}{2}\int E^2 dv+\frac{1}{2\mu}\int B^2 dv\right)=\int \rho\overline{v}\bullet\overline{E}dv+\int\left(\overline{E}\times\overline{H}\right)\bullet d\overline{S}$$

Si tomamos un volumen dividido en elementos de integración *dv* y limitado por una superficie dividida en elementos *dS* tenemos los siguientes conceptos

1-El primer término es la velocidad de cambio de la energía electromagnética contenida en el volumen. Para el caso de una carga puntual acelerada por un campo externo podemos descomponer el campo en suma del campo externo y el campo de la partícula de modo que tenemos

$$\frac{\varepsilon}{2}\int\left(\overline{E}_{ext}+\overline{E}_{par}\right)^2 dv+\frac{1}{2\mu}\int\left(\overline{B}_{ext}+\overline{B}_{par}\right)^2 dv=$$
$$\frac{\varepsilon}{2}\int E_{ext}{}^2 dv+\frac{1}{2\mu}\int B_{ext}{}^2 dv+\frac{\varepsilon}{2}\int E_{par}{}^2 dv+\frac{1}{2\mu}\int B_{par}{}^2 dv+\varepsilon\int\overline{E}_{ext}\bullet\overline{E}_{par}dv+\frac{1}{\mu}\int\overline{B}_{ext}\bullet\overline{B}_{par}dv$$

Los sumandos que solo dependen de un campo corresponden a la *energía propia* del campo externo y de la *masa electromagnética de la carga* en el volumen de integración. Los sumandos que dependen del producto escalar de dos campos corresponden a la *energía de interacción* entre la partícula y el campo externo.

2-El segundo término incluye la densidad y la velocidad de la carga, y el campo eléctrico. Recordando la fuerza electromagnética sobre una carga puntual: ***F=dp/dt=q(E+vxB),*** este término se puede poner como velocidad de cambio de la energía cinética. Para el caso sencillo de una carga puntual

$$\int \rho \bar{v} \bullet \bar{E} dv = \bar{v} \bullet q\bar{E} = \bar{v} \bullet q\left(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}\right) = \bar{v} \bullet \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{dE_c}{dt}$$

3-El tercer término corresponde al flujo de energía electromagnética por unidad de tiempo que sale atravesando la superficie de integración. Suponemos que no hay partículas que atraviesen esta frontera; lo cual supondría incluir también un término asociado al flujo de energía mecánica que atraviesa dicha superficie. En estas condiciones y para el caso de una carga puntual acelerada este término corresponde a la fórmula de Larmor.

$$\int \left(\bar{E} \times \bar{H}\right) \bullet d\bar{S} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\bar{a}(t-\tau)\right]^2;\ c\tau = radio\ esfera$$

Resumiendo lo anterior en una fórmula tenemos, suponiendo un <u>*campo exterior constante*</u>

$$-\frac{d}{dt}\left(\varepsilon \int \bar{E}_{ext} \bullet \bar{E}_{par} dv + \frac{1}{\mu}\int \bar{B}_{ext} \bullet \bar{B}_{par} dv\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon}{2}\int E_{par}{}^2 dv + \frac{1}{2\mu}\int B_{par}{}^2 dv + E_c\right) + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\bar{a}(t-\tau)\right]^2$$

En cuanto al campo de la partícula, los resultados teóricos indican la existencia de dos campos componentes **[1]**:

$\boldsymbol{E_{par}^{p}}$, $\boldsymbol{B_{par}^{p}}$:Un campo casi-estacionario, igual que el campo de una carga puntual que se mueve a velocidad constante, pero que depende de la velocidad retardada. Las líneas del campo eléctrico pasan por el punto cargado.

$\boldsymbol{E_{par}^{r}}$, $\boldsymbol{B_{par}^{r}}$:Un campo de radiación, independiente del anterior. Las líneas de este campo no pasan por el punto cargado.

En consecuencia tenemos

$$\frac{\varepsilon}{2}\int E_{par}{}^2 dv = \frac{\varepsilon}{2}\int \left(\bar{E}^p_{par} + \bar{E}^r_{par}\right)^2 dv = \frac{\varepsilon}{2}\int \left(\bar{E}^p_{par}\right)^2 dv + \frac{\varepsilon}{2}\int \left(\bar{E}^r_{par}\right)^2 dv + \varepsilon \int \left(\bar{E}^p_{par} \bullet \bar{E}^r_{par}\right) dv$$

$$\frac{1}{2\mu}\int B_{par}{}^2 dv = \frac{1}{2\mu}\int \left(\bar{B}^p_{par} + \bar{B}^r_{par}\right)^2 dv = \frac{1}{2\mu}\int \left(\bar{B}^p_{par}\right)^2 dv + \frac{1}{2\mu}\int \left(\bar{B}^r_{par}\right)^2 dv + \frac{1}{\mu}\int \left(\bar{B}^p_{par} \bullet \bar{B}^r_{par}\right) dv$$

En el libro de *lecciones de física de Feynman* **[3]** el lector puede encontrar una explicación sobre la *masa electromagnética* m_e y ver que supone considerar que las partículas son en realidad objetos de un tamaño definido, que puede incluso ser variable. En estas condiciones tenemos, para bajas velocidades respecto de la luz

$$m_e c^2 = \frac{\varepsilon}{2}\int \left(E^p_{par}\right)^2 dv\ ;\ \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2\mu}\int \left(B^p_{par}\right)^2 dv$$

En principio los valores de masa electromagnética se definen para campos estacionarios; pero podemos suponer una evolución relativamente lenta de los campos en la que sea aplicable una aproximación quasi-estática de modo que podemos expresar el teorema de Pointing así:

$$-\frac{d}{dt}\left(\varepsilon \int \bar{E}_{ext} \bullet \bar{E}^p_{par} dv + \frac{1}{\mu}\int \bar{B}_{ext} \bullet \bar{B}^p_{par} dv\right) - \frac{d}{dt}\left(\varepsilon \int \bar{E}_{ext} \bullet \bar{E}^r_{par} dv + \frac{1}{\mu}\int \bar{B}_{ext} \bullet \bar{B}^r_{par} dv\right) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_e c^2 + \frac{1}{2} m_e v^2 + E_c\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon}{2}\int \left(\bar{E}^r_{par}\right)^2 dv + \frac{\varepsilon}{2}\int \left(\bar{B}^r_{par}\right)^2 dv\right) + \frac{d}{dt}\left(\varepsilon \int \left(\bar{E}^p_{par} \bullet \bar{E}^r_{par}\right) dv + \frac{1}{\mu}\int \left(\bar{B}^p_{par} \bullet \bar{B}^r_{par}\right) dv\right) + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\bar{a}(t-\tau)\right]^2$$

Como resultado tenemos en el miembro izquierdo de la ecuación una suma de términos asociados, respectivamente, a la interacción del campo externo con el campo propio de la partícula y a la interacción entre el campo externo y el campo de radiación de la partícula. En el miembro derecho tenemos los términos asociados a la energía cinética , que incluye a la masa electromagnética; y términos asociados al campo de radiación. Entre ellos aparece un término de interacción entre el campo propio de la carga y el campo de radiación; en principio este sería el término relacionado con la fuerza de auto-frenado.

***5-Dinámica de la carga puntual acelerada*.**

Tras la introducción de la masa electromagnética parece necesario atribuir una estructura interna a lo que hemos tomado por una partícula puntual. Sin embargo hemos introducido la energía cinética suponiendo una partícula puntual y la coherencia lógica nos dice que debería ser posible continuar el razonamiento utilizando esta hipótesis. En esta línea introducimos las siguientes relaciones

1-Variación de energía del campo de radiación dentro de la esfera de integración : Parece evidente que esta variación se calcula como la diferencia entre la energía radiada en el instante *dt* cerca de la carga, que podemos asociar a la aceleración instantánea, y la que se pierde al atravesar la superficie de radio *cτ*, asociada a la aceleración retardada

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon}{2}\int\left(\overline{E}^{r}_{par}\right)^{2}dv+\frac{\varepsilon}{2}\int\left(\overline{B}^{r}_{par}\right)^{2}dv\right)=\frac{q^{2}}{6\pi\varepsilon_{0}c^{3}}\left[\overline{a}(t)\right]^{2}-\frac{q^{2}}{6\pi\varepsilon_{0}c^{3}}\left[\overline{a}(t-\tau)\right]^{2}$$

2-Variación de la energía del campo propio de la partícula, relacionado con la masa electromagnética, dentro de la esfera de integración. En el apéndice del libro de *E.M.Purcell* del *Berkeley Physics Course* sobre *Electromagnetismo* ***[5]*** el lector puede encontrar, en el apéndice sobre radiación de una carga acelerada, un cálculo intuitivo de la variación de energía del campo propio de una partícula; es decir, las líneas del campo pasan por el punto cargado. Según esta referencia podemos poner un resultado igual al anterior

$$\frac{d}{dt}\left(m_{e}c^{2}+\frac{1}{2}m_{e}v^{2}\right)=\frac{q^{2}}{6\pi\varepsilon_{0}c^{3}}\left[\overline{a}(t)\right]^{2}-\frac{q^{2}}{6\pi\varepsilon_{0}c^{3}}\left[\overline{a}(t-\tau)\right]^{2}$$

Sustituyendo esto en la ecuación que hemos derivado del teorema de Pointing tenemos

$$-\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\int\overline{E}_{ext}\bullet\overline{E}^{p}_{par}dv+\frac{1}{\mu}\int\overline{B}_{ext}\bullet\overline{B}^{p}_{par}dv\right)-\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\int\overline{E}_{ext}\bullet\overline{E}^{r}_{par}dv+\frac{1}{\mu}\int\overline{B}_{ext}\bullet\overline{B}^{r}_{par}dv\right)=$$

$$\frac{dE_{c}}{dt}+\frac{q^{2}}{6\pi\varepsilon_{0}c^{3}}\left[\left[\overline{a}(t)\right]^{2}+\left(\left[\overline{a}(t)\right]^{2}-\left[\overline{a}(t-\tau)\right]^{2}\right)\right]+\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\int\left(\overline{E}^{p}_{par}\bullet\overline{E}^{r}_{par}\right)dv+\frac{1}{\mu}\int\left(\overline{B}^{p}_{par}\bullet\overline{B}^{r}_{par}\right)dv\right)$$

en primera aproximación para los términos de aceleración tenemos

$$\left[\bar{a}(t)\right]^2 + \left(\left[\bar{a}(t)\right]^2 - \left[\bar{a}(t-\tau)\right]^2\right) \approx \left[\bar{a}(t)\right]^2 + 2\bar{a} \bullet \frac{d\bar{a}}{dt}\tau$$

pero el lector debe notar que esta primera aproximación es la misma que para el cuadrado de la aceleración no retardada, sino adelantada

$$\left[\bar{a}(t+\tau)\right]^2 \approx \left[\bar{a}(t)\right]^2 + 2\bar{a} \bullet \frac{d\bar{a}}{dt}\tau$$

Esta situación puede afectar al principio de causalidad; ya que aún en primera aproximación esperamos resultados conformes con la causalidad. Al introducir en primera aproximación en el principio de conservación de la energía el valor de un parámetro en un tiempo futuro la evolución del sistema físico dependerá de condiciones futuras; cuando según el principio de causalidad suponemos que las causas siempre preceden en el tiempo a las consecuencias. Para evitar esta situación, la ecuación de Pointing debe darnos alguna alternativa que elimine el término "a-causal" en primera aproximación; y podemos ver que la integral asociada a la interacción entre el campo de radiación y el campo propio de la partícula puede hacerlo. Si suponemos también despreciable el término de interacción entre el campo externo y el de radiación, o lo incluimos en el término correspondiente (primera ecuación), tenemos que se produce un desacoplo de la ecuación de Pointing en otras dos ecuaciones. De acuerdo con nuestro planteamiento, podemos considerar el parámetro τ aproximadamente constante de modo que tenemos

$$-\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\int \bar{E}_{ext} \bullet \bar{E}^{p}_{par}dv + \frac{1}{\mu}\int \bar{B}_{ext} \bullet \bar{B}^{p}_{par}dv\right) = \frac{dE_c}{dt} + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\bar{a}(t)\right]^2 \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\int\left(\bar{E}^{p}_{par} \bullet \bar{E}^{r}_{par}\right)dv + \frac{1}{\mu}\int\left(\bar{B}^{p}_{par} \bullet \bar{B}^{r}_{par}\right)dv + \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\bar{a}(t)\right]^2\tau\right) = 0 \quad (5.2)$$

Resulta inmediato interpretar la ecuación (5.1) según el principio de conservación de la energía : el primer término corresponde a la energía transferida por la fuerza externa y el segundo es la suma de las variaciones de energía cinética y la energía radiada; todo evaluado en el instante *dt*. La ecuación (5.2) corresponde a un acoplo entre la carga y la radiación emitida por la misma carga de modo que la energía asociada al acoplo entre el campo de radiación y el campo propio de la partícula está directamente relacionada con el proceso de radiación de la partícula. El cálculo directo de esta integral requiere conocer la estructura interna de la partícula, sin embargo el desarrollo que hemos seguido plantea la necesidad de que esta integral de acoplo tenga un valor determinado y no despreciable en primera aproximación. Formalmente el resultado anterior corresponde a una constante del movimiento de la partícula con dimensiones de energía o masa. En la línea de este trabajo podemos interpretar esta relación como una forma de compensación para que la masa de la partícula se mantenga constante.

Si, siguiendo la mecánica clásica a partir de la segunda ecuación, introducimos para este acoplo un fuerza *f* podemos poner

$$\bar{f} \bullet \bar{v} + \frac{q^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d\bar{a}}{dt} \bullet \bar{a}\tau = 0$$

para el caso de que la partícula esté en reposo en *t-τ*, tenemos *aτ=v* y podemos estimar la fuerza de acoplo como

$$\bar{f} = -\frac{q^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d\bar{a}}{dt}$$

A parte de un factor ½, esta fuerza es similar a (2.1). Para un observador inercial en reposo instantáneo respecto de la carga acelerada, la radiación emitida por la carga en dicho instante se emite con tal simetría que el impulso mecánico correspondiente a la radiación es nulo **[2]**. Si se aplica la transformación relativista del impulso mecánico tenemos

$$\Delta P_l = 0 = \frac{\Delta p - \frac{v}{c^2}\Delta\varepsilon}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

y por tanto para otro observador inercial se verifica $\Delta\boldsymbol{p}=\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}/c^2$, donde ***p*** y ***ε*** hacen referencia al impulso mecánico y la energía de la radiación emitida; ***v*** es la velocidad de la partícula. Si estamos suponiendo que la radiación procede de la energía cinética de la partícula, entonces podemos tomar Δ***p***, Δ***ε*** como una componente de la energía-impulso de la partícula. Si dividimos esta relación por el tiempo correspondiente Δ*t* y lo incluimos todo en la fórmula de la fuerza de radiación tenemos

$$\bar{f} + \frac{q^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\bar{v}}{c^2}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{q^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d\bar{a}}{dt} \approx \frac{\bar{v}}{c^2}\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}a^2 + \frac{q^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{d\bar{a}}{dt} = 0$$

Note el lector que, según la ecuación fundamental de la dinámica, una fuerza proporcional a la velocidad es señal de una variación de la masa

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\bar{v}}{dt}$$

desde esta perspectiva vemos que el efecto de la fuerza de acoplo de radiación es restituir la masa perdida. Abstrayendo factores numéricos, podemos llegar a la ecuación siguiente

$$\frac{d\bar{a}}{dt} + \left(\frac{a}{c}\right)^2\bar{v} = 0 \quad (5.3)$$

Multiplicando escalarmente la ecuación diferencial anterior por la aceleración *dv/dt* tenemos

$$\frac{d\bar{v}}{dt}\bullet\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} + \left(\frac{a}{c}\right)^2\bar{v}\bullet\frac{d\bar{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)^2 + \int_0^t\left(\frac{a}{c}\right)^2 d\left(v^2\right)\right] = 0$$

Note el lector la similitud de esta ecuación con (5.2). Esta similitud aconseja pensar que (5.3) solo es aplicable en caso de campos externos constantes. Es evidente que, si el fenómeno de radiación no existiese, en un campo eléctrico constante la aceleración de la partícula sería constante *a=qE/m; despreciando efectos relativistas*. Por tanto en el caso de un campo eléctrico constante la única causa para que varíe la aceleración es la emisión de radiación. Si el campo no es constante es evidente también que la aceleración de la partícula puede variar debido al propio campo, y la radiación solamente será responsable de la variación de la diferencia entre la aceleración real de la partícula y la aceleración provocada por el campo. De este modo podemos generalizar (5.3) de esta forma

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{a}-\frac{q}{m}\left[\bar{E}_{ext}+\bar{v}\times\bar{B}_{ext}\right]\right)+\left(\frac{a}{c}\right)^2\bar{v}=0 \quad (5.4)$$

A partir de la ecuación (5.4) [1] para campos constantes podemos determinar inmediatamente las siguientes integrales

$$\bar{a}\bullet\left(\frac{d\bar{a}}{dt}-\frac{q}{m}\left[\bar{a}\times\bar{B}_{ext}\right]\right)+\left(\frac{a}{c}\right)^2\bar{a}\bullet\bar{v}=0 \Rightarrow \frac{da^2}{dt}+\left(\frac{a}{c}\right)^2\frac{dv^2}{dt}\Rightarrow\frac{da^2/dt}{a^2}+\frac{1}{c^2}\frac{dv^2}{dt}=0\Rightarrow\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)=-\frac{1}{2c^2}\left(v^2-v_0^2\right)\Rightarrow a=a_0e^{-\frac{v^2-v_0^2}{2c^2}} \quad (5.5)$$

$$\bar{v}\times\frac{d\bar{a}}{dt}-\frac{q}{m}\bar{v}\times\left[\bar{a}\times\bar{B}_{ext}\right]+\left(\frac{a}{c}\right)^2\bar{v}\times\bar{v}=0\Rightarrow\bar{v}\times\frac{d\bar{a}}{dt}-\frac{q}{m}\bar{v}\times\left[\bar{a}\times\bar{B}_{ext}\right]=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\bar{v}\times\bar{a}+\frac{q}{m}\frac{v^2}{2}\bar{B}_{ext}\right)=\frac{q}{m}\bar{a}\left(\bar{B}_{ext}\bullet\bar{v}\right) \quad (5.6)$$

Según la ecuación (5.6), si *B=0* o si *B* y *v* son perpendiculares, tenemos una constante vectorial perpendicular a la velocidad instantánea y por tanto el movimiento se desarrolla en un plano. Si *B* y *v* no son perpendiculares entonces el movimiento no puede considerarse plano. Derivando la ecuación base del resultado (5.5) tenemos

$$\frac{da^2}{dt}+\left(\frac{a}{c}\right)^2\frac{dv^2}{dt}=0\Rightarrow\frac{d^2a^2}{dt^2}+\left(\frac{a}{c}\right)^2\frac{d^2v^2}{dt^2}+\frac{1}{c^2}\frac{dv^2}{dt}\frac{da^2}{dt}=0; \quad \frac{dv^2}{dt}=2\bar{a}\bullet\bar{v} \quad (5.7)$$

lo que nos dice que, si existen, los extremos del cuadrado de la aceleración y del cuadrado de la velocidad están relacionados; de modo que un máximo de $\boldsymbol{a}^2$ corresponde a un mínimo de $\boldsymbol{v}^2$ y al revés. Sin embargo note el lector que (5.7) no establece que estos extremos existan realmente.

Note el lector que, según nuestra línea argumental, en principio la ecuación (5.1) de conservación de la energía solo es válida para el caso de campos externos constantes. Esto induce a aproximar la potencia transferida a la carga como

$$q\bar{E}_{ext}\bullet\bar{v}=\frac{dE_c}{dt}+\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}a^2=m\bar{a}\bullet\bar{v}+\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}a^2 \quad (5.8)$$

Recordando que la energía cinética es proporcional a $\boldsymbol{v}^2$ vemos que un mínimo de energía cinética en (5.8) conduce a una velocidad no nula en dicho extremo; de modo que la expresión anterior no contempla un mínimo nulo de energía cinética. Podemos imaginar una carga positiva que se mueva inicialmente en contra del campo eléctrico. Es evidente que el frenado del campo hará que la energía cinética llegue a un mínimo en algún momento y si el movimiento es rectilíneo no es fácil entender porque no puede anularse la energía cinética en algún instante. De esta forma no hemos podido dar una solución concreta a la ecuación (5.1) siguiendo una línea de argumentos clásicos para la dinámica de una carga acelerada. Sin embargo la ecuación (5.4) si

[1] La forma final de esta ecuacion se verá en la sección *Interpretación cuántica*.

permite dar una solución dinámica en un caso sencillo y contrastar el resultado con (5.8), como veremos a continuación.

6-Movimiento rectilíneo de una carga puntual en un campo eléctrico constante. ¿Movimiento Browniano?

En este caso y para una carga positiva la velocidad, la aceleración y el campo eléctrico mantienen constante la misma dirección y sentido, por lo que se puede plantear la ecuación (5.4) en términos de módulos y, puesto que la aceleración no se anula podemos dividir la expresión e integrarla de esta forma

$$\frac{1}{a^2}\frac{da}{dt}+\frac{v}{c^2}=0\Rightarrow -\frac{1}{a}+\frac{x}{c^2}=-\frac{m}{qE}$$

donde *x* es la posición correspondiente de la partícula en la dirección del movimiento y en la situación inicial es *x=0* y la aceleración es la Newtoniana. Despejando de la expresión anterior llegamos a

$$ma=\frac{qE}{1+\dfrac{qEx}{mc^2}}\Rightarrow \int ma\,dx=\int\frac{qE}{1+\dfrac{qEx}{mc^2}}dx\Rightarrow \frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=c^2\ln\left(1+\frac{qEx}{mc^2}\right)$$

aproximando el logaritmo para un *pequeño desplazamiento respecto de x=0, o para E cercano a cero*, podemos llegar a la expresión

$$qEx\approx\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}\left(\frac{q^2E^2}{mc^2}\right)x^2-\frac{1}{3}\left(\frac{q^3E^3}{m^2c^4}\right)x^3+....$$

donde reconocemos rápidamente la forma de la ecuación (5.8) con las energías potencial, cinética y, por eliminación, la energía emitida en la radiación

$$\frac{1}{2}\left(\frac{q^2E^2}{mc^2}\right)x^2-\frac{1}{3}\left(\frac{q^3E^3}{m^2c^4}\right)x^3+....\approx\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}a^2t$$

y la aceleración es en valor promedio. En el límite en que el campo eléctrico tiende a cero podemos suponer que la aceleración promedio tiende también al valor Newtoniano : *E→0 ; a→qE/m* y por tanto podemos plantear el siguiente límite

$$Lim_{E\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{q^2E^2}{mc^2}\right)x^2-\frac{1}{3}\left(\frac{q^3E^3}{m^2c^4}\right)x^3+....}{\dfrac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}t}=\frac{3\pi\varepsilon_0mcx^2}{tq^2}=1\Rightarrow x^2\approx\frac{q^2}{3\pi\varepsilon_0mc}t$$

que evidencia la similitud con el caso del *movimiento browniano* de una partícula(ver trabajo sobre termodinámica) con un promedio de energía cinética constante. De esta forma, aunque se trata de un comportamiento intrínseco, una partícula libre cargada parece como si se moviese en un medio viscoso afectado por impactos aleatorios. Para el caso del electrón el resultado anterior supone un desplazamiento cuadrático de 1 mm^2 por segundo.

7-Interpretación cuántica.

La ecuación (5.4) no es físicamente satisfactoria ya que el impulso mecánico de radiación debería ser proporcional a la carga *q*, de la misma forma que lo es la energía radiada de la *fórmula de Larmor*. Podemos generalizar la ecuación introduciendo un factor adimensional *β* de esta forma.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\bar{a}-\frac{q}{m}\left[\bar{E}_{ext}+\bar{v}\times\bar{B}_{ext}\right]\right)+\beta\left(\frac{a}{c}\right)^2\bar{v}=0 \quad (7.1)}$$

Que sería la ecuación dinámica de una carga acelerada. Las consecuencias matemáticas de esta fórmula son las mismas que las de (5.4) pero haciendo el cambio $c^2 \rightarrow \beta^{-1}c^2$. En el caso del límite cuando un campo eléctrico constante tiende a cero , que vimos antes, el resultado sería

$$Lim_{E\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{q^2E^2}{m\beta^{-1}c^2}\right)x^2-\frac{1}{3}\left(\frac{q^3E^3}{m^2\beta^{-2}c^4}\right)x^3+....}{\frac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}t}=\frac{3\pi\varepsilon_0mcx^2}{tq^2\beta^{-1}}=1\Rightarrow x^2\approx\frac{1}{\beta}\frac{q^2}{3\pi\varepsilon_0mc}t$$

si derivamos el resultado tenemos

$$mvx\approx\frac{1}{\beta}\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0c}$$

interpretando la expresión anterior según el *principio de indeterminación de Heisenberg*, resulta que la siguiente constante sería un valor admisible para β

$$\beta=\frac{q^2}{\hbar c4\pi\varepsilon_0};\ \Rightarrow mvx=\Delta p\Delta x\approx\hbar$$

donde *ħ* es la constante de Planck. Además el lector puede ver que, para el caso de la carga elemental *e*, β es la constante de estructura fina α, de modo que podemos poner

$$\beta=\frac{q^2}{\hbar c4\pi\varepsilon_0}=Z^2\frac{e^2}{\hbar c4\pi\varepsilon_0}=Z^2\alpha$$

donde *Z* es el número de veces que la carga *q* contiene la carga elemental *e*. Como consecuencia tenemos que en (5.4) el término del impulso de radiación está factorizado por el cuadrado de la carga. De este modo si tenemos dos cargas en las mismas condiciones cinemáticas de velocidad y aceleración, emitirá mas radiación aquella que tenga una carga mayor, lo cual está de acuerdo con la fórmula de Larmor.

8-Compatibilidad analítica de las ecuaciones.

Generalizando las ecuaciones (5.8) y (7.1) para una fuerza *f* tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left(m\bar{a}-\bar{f}\right)\bullet\bar{v}+m\tau_0 a^2=0;\quad \frac{d}{dt}\left(\bar{a}-\frac{\bar{f}}{m}\right)+\beta\left(\frac{a}{c}\right)^2\bar{v}=0;\qquad \tau_0=\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}$$

si derivamos en el tiempo la primera ecuación energética y despejamos en el resultado el primer termino de la segunda ecuación tenemos

$$\bar{v}\bullet\frac{d}{dt}\left(m\bar{a}-\bar{f}\right)+\bar{a}\bullet\left(m\bar{a}-\bar{f}\right)+2m\tau_0\bar{a}\bullet\frac{d\bar{a}}{dt}=0\Rightarrow\bar{a}\bullet\left[m\bar{a}\left(1-\beta\frac{v^2}{c^2}\right)-\bar{f}+2m\tau_0\frac{d\bar{a}}{dt}\right]=0\Rightarrow$$

$$\bar{f}=m\bar{a}\left(1-\beta\frac{v^2}{c^2}\right)+2m\tau_0\frac{d\bar{a}}{dt}$$

Podemos ver que esta última ecuación es incompatible con el resultado (5.5) para el caso de una fuerza *f* constante. Si la partícula acelerada parte del reposo su velocidad aumentará con el tiempo y según (5.5) la aceleración disminuirá con el tiempo y la derivada de la aceleración será de signo negativo y disminuyendo con el tiempo. En cambio en la expresión anterior, si la velocidad aumenta con el tiempo y la aceleración disminuye con el tiempo, la derivada de la aceleración solo puede aumentar con el tiempo. Las ecuaciones (5.8) y (7.1) son de este modo incompatibles. Una posible alternativa es que la incompatibilidad se deba a efectos relativistas que no se han considerado en la ecuación energética, mientras que la ecuación dinámica ya les incorpora. Veamos una primera corrección relativista respecto al término correspondiente a la energía cinética

$$\bar{p}\approx m\bar{v}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)\Rightarrow\frac{d\bar{p}}{dt}\approx m\bar{a}\left(1+\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)-\frac{m}{c^2}\left(\bar{v}\times\left(\bar{a}\times\bar{v}\right)\right)\Rightarrow\frac{dE_c}{dt}=\bar{v}\bullet\frac{d\bar{p}}{dt}\approx m\bar{v}\bullet\bar{a}\left(1+\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

y para la potencia de radiación tenemos

$$\frac{dE_{rad}}{dt}\approx m\tau_0\left(1+3\frac{v^2}{c^2}\right)\left(a^2-\frac{1}{c^2}\left(\bar{v}\times\bar{a}\right)^2\right)$$

y por tanto el sistema de ecuaciones será ahora

$$\left[m\bar{a}\left(1+\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)-\bar{f}\right]\bullet\bar{v}+m\tau_0\left(1+3\frac{v^2}{c^2}\right)\left(a^2-\frac{1}{c^2}\left(\bar{v}\times\bar{a}\right)^2\right)=0;\quad\frac{d}{dt}\left(\bar{a}-\frac{\bar{f}}{m}\right)+\beta\left(\frac{a}{c}\right)^2\bar{v}=0;$$

en el caso de campo eléctrico constante y movimiento rectilíneo el producto vectorial se anula y haciendo la derivada de la primera ecuación y utilizando (7.1) tenemos

$$\left[-m\frac{\beta}{c^2}a^2\bar{v}+\frac{3m}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{d\bar{a}}{dt}+\frac{3m}{c^2}\left(\bar{v}\bullet\bar{a}\right)\bar{a}\right]\bullet\bar{v}+\left[m\bar{a}\left(1+\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)-\bar{f}\right]\bullet\bar{a}+2m\tau_0\left(1+3\frac{v^2}{c^2}\right)\bar{a}\bullet\frac{d\bar{a}}{dt}+m\tau_0\frac{6\bar{v}\bullet\bar{a}}{c^2}a^2=0\Rightarrow$$

$$\bar{v}\bullet\left[\frac{3m}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{d\bar{a}}{dt}+\frac{3m}{c^2}\left(\bar{v}\bullet\bar{a}\right)\bar{a}\right]+\bar{a}\bullet\left[m\bar{a}\left(1+\left[\frac{3}{2}-\beta\right]\frac{v^2}{c^2}\right)-\bar{f}+2m\tau_0\left(1+3\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d\bar{a}}{dt}+6m\tau_0\frac{a^2}{c^2}\bar{v}\right]=0$$

teniendo en cuenta que el movimiento es rectilíneo y prescindiendo de los términos en v^2/c^2 y superiores tenemos

$$\overline{f} \approx m\overline{a} + 2m\tau_0 \frac{d\overline{a}}{dt} + 6m\tau_0 \frac{a^2}{c^2}\overline{v}$$

eliminando en la ecuación anterior el tercer sumando del segundo miembro en función de (7.1) tenemos

$$\overline{f} \approx m\overline{a} + 2m\tau_0 \frac{d\overline{a}}{dt} - \frac{6m\tau_0}{\beta}\frac{d}{dt}\left(\overline{a} - \frac{\overline{f}}{m}\right) \Rightarrow \overline{f} - \frac{6\tau_0}{\beta}\frac{d\overline{f}}{dt} \approx m\overline{a} + 2m\tau_0\left(1 - \frac{3}{\beta}\right)\frac{d\overline{a}}{dt}$$

Podemos integrar este resultado multiplicando por un factor exponencial *exp{(t-τ)/μ}* y utilizando el método de integración por partes de esta forma

$$\overline{f}(\tau)\ e^{t-\tau/\mu} - \mu\frac{d\overline{f}}{d\tau}\ e^{t-\tau/\mu} = m\overline{a}\ e^{t-\tau/\mu} - m\mu\frac{d\overline{a}}{d\tau}\ e^{t-\tau/\mu} + 2m\tau_0\frac{d\overline{a}}{dt}e^{t-\tau/\mu}\ ;\ \mu = \frac{6\tau_0}{\beta} \Rightarrow$$

$$\overline{f}(\tau)\ e^{t-\tau/\mu} - \mu\left\{\frac{d}{d\tau}\left(\overline{f}(\tau)\ e^{t-\tau/\mu}\right) + \frac{1}{\mu}\overline{f}(\tau)\ e^{t-\tau/\mu}\right\} = m\overline{a}\ e^{t-\tau/\mu} - m\mu\left\{\frac{d}{d\tau}\left(\overline{a}(\tau)\ e^{t-\tau/\mu}\right) + \frac{1}{\mu}\overline{a}(\tau)\ e^{t-\tau/\mu}\right\} + 2m\tau_0\frac{d\overline{a}}{d\tau}e^{t-\tau/\mu} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\left\{m\overline{a} - \overline{f}(\tau)\right\}e^{t-\tau/\mu}\right) = \frac{2m\tau_0}{\mu}\frac{d\overline{a}}{d\tau}e^{t-\tau/\mu}$$

$$\int_t^\infty \frac{d}{d\tau}\left(\left\{m\overline{a} - \overline{f}(\tau)\right\}e^{t-\tau/\mu}\right)d\tau = \left\{m\overline{a} - \overline{f}(\tau)\right\}e^{t-\tau/\mu}\Big|_t^\infty = \overline{f}(t) - m\overline{a} = \frac{m\beta}{3}\int_t^\infty \frac{d\overline{a}}{d\tau}e^{t-\tau/\mu}d\tau \Rightarrow$$

$$\overline{f}(t) = m\overline{a} + \frac{m\beta}{3}\int_t^\infty \frac{d\overline{a}}{d\tau}e^{t-\tau/\mu}d\tau = m\left(1 - \frac{\beta}{3}\right)\overline{a} + \frac{m\beta^2}{18\tau_0}\int_t^\infty \overline{a}\,e^{t-\tau/\mu}d\tau \quad (8.1)$$

8.1 Causalidad

Podemos ver en 8.1 que la integral se extiende para tiempos *τ* mayores que el tiempo de observación *t*, lo cual sería un problema de cara a mantener el principio de causalidad en el que se basa este trabajo. Sin embargo, para el caso de una fuerza constante y baja radiación podemos evaluar la integral anterior suponiendo una aceleración constante. El resultado de esto es que el término no-causal cancela con el otro término dependiente de β y (8.1) se transforma en la 2ª ley de Newton : ***f***=*m**a***. En este contexto vemos que despreciar términos en v^2/c^2 y superiores nos lleva a una primera aproximación en la que no aparece el efecto dinámico de la radiación y por tanto la dinámica de la carga acelerada necesita una aproximación que incluya como mínimo términos en v^2/c^2. Esta conclusión es consistente con la ecuación (5.5).

Si no consideramos la aceleración constante, podemos evaluar la integral mediante las *sumas de Riemann* correspondientes a un paso $\Delta\tau=\mu$; que es un valor de $\approx 10^{-20}$ segundos para el caso del electrón

$$\overline{f}(t) = m\left(1 - \frac{\beta}{3}\right)\overline{a} + \frac{m\beta^2}{18\tau_0}\frac{6\tau_0}{\beta}\left\{\overline{a}(t) + e^{-1}\overline{a}(t + \frac{6\tau_0}{\beta}) + e^{-2}\overline{a}(t + 2\frac{6\tau_0}{\beta}) + ...\right\} \Rightarrow$$

$$\overline{f}(t) = m\overline{a} + \frac{m\beta}{3}\left\{e^{-1}\overline{a}(t + \frac{6\tau_0}{\beta}) + e^{-2}\overline{a}(t + 2\frac{6\tau_0}{\beta}) + ...\right\} \quad (8.2)$$

Este resultado indica que la cancelación del término no causal es parcial en primera aproximación y mas efectiva para valores pequeños de β que para valores elevados.

8.2 Nota sobre la Corona Solar

La corona es la capa mas externa de la atmósfera solar donde existen campos magnéticos intensos y plasma con átomos altamente ionizados, como Hierro a falta de 19 electrones **[7]**. Se da también el hecho de que la emisión de radiación procedente de la corona es preferentemente de altas frecuencias, predominando en su espectro el ultravioleta y los rayos X. Todo esto conduce a asignar temperaturas de millones de grados a la corona solar; lo cual nos deja con cierta perplejidad si recordamos que la temperatura de la superficie del sol es de unos 5.000 grados. Uno esperaría una disminución progresiva de la temperatura con la distancia; como puede ser el caso de una hoguera.

En nuestro planteamiento, la presencia de iones de carga elevada significa valores de β elevados y un efecto apreciable en 8.2 equivalente un aumento efectivo de masa que indica un efecto de frenado. Si tomamos como guía la segunda ley de Newton, la dinámica de la carga acelerada tenderá a eliminar este exceso de masa en forma de radiación a costa de su propia energía cinética. Tal vez sea este fenómeno el que se produce en la emisión de radiación de alta frecuencia en la corona solar. La radiación emitida puede también aumentar la ionización de la misma o de otras partículas procedentes de capas inferiores de la atmósfera solar (*espículas*). De esta forma en la corona la presencia de campos magnéticos intensos puede provocar una combinación de radiación de alta frecuencia y partículas relativamente lentas en relación a la temperatura esperada[2].

9-Fluctuaciones. Gravedad.

La hipótesis de que la radiación procede de la energía cinética de la partícula nos lleva a la fluctuación de la masa de la partícula radiante. La partícula pierde masa y la recupera. Si la masa se pierde con una velocidad superior a la que se recupera, entonces la diferencia está relacionada con la energía cinética de la que procede la radiación. Pero si la velocidad de pérdida de masa es distinta a la velocidad de recuperación, entonces el proceso no puede ser continuo en el tiempo ya que estaría comprometida la propia existencia de la partícula. En nuestro caso la radiación se emite a la velocidad de la luz, mientras que la masa se recupera a la velocidad a la que se mueve la propia partícula. Por tanto el proceso de emisión de radiación debe ser fluctuante, discontinuo en el tiempo para que la partícula tenga un margen de recuperación. De cara a la radiación, el modelo clásico de carga puntual supone una energía propia electromagnética y una masa infinitas para la partícula. En tal modelo una pérdida continua de masa no sería un problema, ya que la masa de la partícula siempre sería infinita; pero existe una contradicción mecánica evidente, ya que una

[2] La explicación clásica de las líneas de Fraunhofer del espectro de luz solar supone la existencia de *gases fríos* absorbentes de radiación en las capas externas del sol.

masa infinita no puede ser acelerada por una fuerza finita. Por otro lado tenemos la fuerza de Lorentz ***F=ma=q(E+vxB)*** donde la masa mecánica de la partícula es claramente finita. Por coherencia debemos estudiar el caso en que la radiación es también emitida por una partícula de masa finita y esto nos lleva un proceso de radiación discontinuo si la partícula cargada debe mantener una masa estable. En estas condiciones, la fuerza de Lorentz y la fórmula de Larmor solo pueden ser, en un caso real, algún tipo de promedio estadístico.

Tanto para el caso de la energía cinética de una partícula de masa constante como para la energía radiada existe una relación con el impulso mecánico; pero una *transferencia directa* de energía-impulso cinética a radiación no es posible como puede verse fácilmente

$$\Delta E_p = \bar{v} \bullet \Delta \bar{P}_p \;;\; \Delta \bar{P}_r = \frac{\bar{v}}{c^2} \Delta E_r \;;\; \Delta E_p = -\Delta E_r \;,\; \Delta P_p = -\Delta P_r \Rightarrow \Delta E_p = \frac{v^2}{c^2} \Delta E_p \;\; !!!!$$

el subíndice *p* hace referencia a una partícula de masa constante y el subíndice *r* a la radiación. Según nuestra hipótesis el problema está en que la radiación está asociada a una fluctuación de la masa de la partícula, fluctuación que en promedio debe mantener la masa de la partícula constante. Si introducimos una pequeña fluctuación *δm* de la masa en la expresión de la energía relativista tenemos

$$U^2 = p^2c^2 + (m + \delta m)^2 c^4 \approx p^2c^2 + (mc^2)^2 + 2m\delta mc^4 \Rightarrow (U - mc^2)(U + mc^2) \approx p^2c^2 + 2m\delta mc^4$$

para bajas velocidades respecto a la luz es válido $U+mc^2 \approx 2mc^2$ y por tanto $U-mc^2 \approx p^2/2m+\delta mc^2$;si identificamos este resultado con la ecuación (5.8) tenemos $qEx=U-mc^2$ y para la fluctuación de masa $c^2\delta m \approx \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} a^2 \delta t$

Evidentemente esta fluctuación de masa crece con el tiempo y si no fuese emitida en forma de radiación afectaría necesariamente la estabilidad de la partícula. De este modo la dinámica de la partícula consta de fases en que acumula masa y fases en que libera el exceso de masa en forma de radiación. En un campo eléctrico constante, las fases de acumulación provocarán una disminución de la aceleración al aumentar la masa y las fases de liberación provocarán un aumento de la aceleración al disminuir la masa. Si las fases de acumulación son en promedio mas duraderas que las fases de liberación, el efecto promedio del proceso puede ser similar al de una fuerza de rozamiento que tiende a disminuir la velocidad y la aceleración de la partícula. La ecuación (7.1) da una medida de este fenómeno al relacionar la variación de aceleración con la emisión de radiación. En este contexto la ecuación (5.8) debe interpretarse en términos de promedios en el intervalo de tiempo adecuado.

Si la aceleración de la partícula se debe enteramente a un *campo gravitatorio*, entonces la fluctuación de masa no puede afectar a la aceleración de la partícula. Esto es lo que se sigue del *principio de equivalencia de la relatividad general* y por tanto una carga acelerada por un campo gravitatorio no experimentará la fuerza de rozamiento de radiación; es decir, la radiación no producirá variación en la aceleración de la partícula. Por tanto podemos concluir lo siguiente para una partícula cargada y acelerada:

1-Si la aceleración procede de un campo gravitatorio la carga no emite radiación.

2-La carga emite radiación solo si su aceleración procede de un campo electromagnético externo o, en general, de una fuerza que actúe sobre la carga.

La ecuación (5.8) relaciona la energía cinética y energía radiada; pero hemos visto que una relación *físicamente directa* entre estas cosas no es posible. Recordando el concepto de *dominio cinemático* del trabajo *espacio,tiempo,materia y vacío* en esta misma web; podemos decir que el promedio que se necesita para llegar a la ecuación (5.8) pasa por un proceso no *lineal e irreversible* de conmutación entre el dominio cinemático clásico y el dominio cinemático cuántico. Una señal de este proceso no lineal puede verse en el hecho de que la ecuación (7.1) contiene la constante de Planck y la ecuación (5.8) no. Este proceso no lineal confronta con la idea clásica de energía como desplazamiento de fuerzas y está relacionado con el principio de causalidad, como vimos en la sección sobre la dinámica de una carga acelerada.

10-Radiación de una carga acelerada y campo gravitatorio.

Existe una conocida imagen denominada a veces "el cajón de Einstein" en la que un observador dentro de un cajón acelerado por un motor externo, supuesto inobservable para dicho observador, no es capaz de distinguir entre su estado físico real y un estado de reposo en que actúa un campo gravitatorio uniforme. En base a esta imagen se suele explicar el principio de equivalencia y supone una simetría física local entre un observador gravitatorio y otro observador acelerado.

Así por ejemplo, en el caso del observador del cajón, podemos imaginar que experimentando llega a la siguiente ley física: Para que cualquier objeto físico permanezca sin aceleración hay que actuar sobré dicho cuerpo con una fuerza de valor determinado ***mg***, donde ***m*** es la *masa inercial* del objeto y ***g*** es la aceleración inercial. Invocando la simetría del principio de equivalencia resulta que esto también es cierto para un observador en reposo en la superficie de la tierra; *interpretando* ahora ***g*** como intensidad del campo gravitatorio y ***m*** como la *masa o carga-gravitatoria*. El hecho relevante de la simetría es que la masa inercial y la masa gravitatoria son siempre iguales entre sí, lo cual se aceptó sin explicación desde los tiempos de Newton. Como consecuencia resulta que la *aceleración* impartida por la gravedad es la misma *independientemente del valor de la masa y de la naturaleza físico-química del objeto;* hechos estos que se conocen desde Galileo.

El principio de localidad

Sin embargo hay fenómenos físicos que parecen no seguir esta simetría entre gravedad y aceleración. En particular el caso de la emisión de radiación por una carga acelerada, conocida en la teoría electromagnética clásica. Para este caso, si suponemos que un objeto cargado y en reposo para el observador del cajón acelerado emite radiación, entonces la simetría nos lleva a que un objeto cargado en reposo sobre la superficie de la tierra emitiría radiación. Parece que esto no ocurre en base a lo que conocemos en la tierra o datos astronómicos. Por otra parte habría que justificar el origen de la energía radiada. En el caso del observador gravitatorio no se aprecia claramente el origen de esta posible energía y en el caso del observador acelerado, debería concluir que la fuente u origen de la energía radiada no está en el interior del cajón, sino que procede del objeto externo que produce la aceleración del cajón. Es decir, debería dar una explicación *no-local* al proceso de radiación.

La simetría que manejamos se restringe al caso de aceleraciones y campos gravitatorios constantes. Si aplicamos la ecuación dinámica (7.1) al caso de una carga que se mueve con aceleración a_0 constante y campo eléctrico externo *E* tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{a}_0 - \frac{q}{m}\overline{E}\right) = -\frac{\beta}{c^2}a_0^2\overline{v} \Rightarrow d\overline{E} = \frac{m}{q}\frac{\beta}{c^2}a_0^2\, d\overline{r} \Rightarrow \overline{E} = \overline{E}_0 + \frac{m}{q}\frac{\beta}{c^2}a_0^2\,\overline{r}$$

y aplicando las ecuaciones de Maxwell al campo encontrado tenemos

$$\nabla \bullet \overline{E} = 3\frac{m}{q}\frac{\beta}{c^2}a_0^2 = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad ; \quad \nabla \times \overline{E} = 0$$

lo cual nos dice que una carga uniformemente acelerada y que emita radiación tiene que moverse en un medio con una densidad de carga *ρ* constante (en el espacio y el tiempo) y determinada. Es evidente que en la simetría planteada por el cajón de Einstein no se considera que el espacio esté ocupado por una densidad de carga; lo que nos permite pensar que, tanto en el caso del observador acelerado como en el caso del observador gravitatorio, no hay emisión de radiación; manteniéndose de esta forma la simetría.

Imaginemos un péndulo clásico oscilando con una carga en su extremo bajo el efecto de la tensión de la cuerda y la gravedad. Según la teoría cuántica del oscilador armónico son posibles estados cuánticos que cancelan la emisión de radiación[**9**]. La tensión tiene que ver con los enlaces químicos entre moléculas de dos partes inmediatamente contiguas de la cuerda; y por tanto se trata de una fuerza de naturaleza cuántica antes que electromagnética.

Finalmente, note el lector que el resultado obtenido para el campo *E* indica que el fenómeno de la radiación de una carga acelerada depende de la *aceleración relativa entre cargas* en vez de la aceleración respecto a un sistema inercial de coordenadas.

11-Apéndice Matemático.

11.1 Caso de campo eléctrico constante.

La ecuación (7.1) se puede plantear utilizando el sistema de coordenadas intrínseco asociado a la trayectoria de la partícula. Si los vectores unitarios correspondientes son : *T* para el tangente, *N* para el normal y *B* para el binormal; la aplicación de las *fórmulas de Frenet* resulta en

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\overline{T}+\frac{v^2}{\rho}\overline{N}\right)+\beta\left(\frac{a}{c}\right)^2 v\overline{T}=0 \quad \Rightarrow \frac{d^2v}{dt^2}\overline{T}+\frac{dv}{dt}\frac{v}{\rho}\overline{N}+\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{\rho}\right)\overline{N}+\frac{v^3}{\rho}\left(-\frac{1}{\rho}\overline{T}+\tau\overline{B}\right)=-\beta\left(\frac{a}{c}\right)^2 v\overline{T}$$

donde *ρ* es la curvatura y *τ* es la torsión de la curva trayectoria. La igualdad entre vectores requiere que la torsión sea nula y por tanto la trayectoria de la partícula será plana. En la componente *N* tenemos

$$\frac{dv}{dt}\frac{v}{\rho}+\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{\rho}\right)=0 \Rightarrow \rho = kv^3$$

donde *k* es un valor constante; de modo que la curvatura es proporcional al cubo de la velocidad. Con este resultado, la ecuación (5.5) y utilizando las componentes de la aceleración llegamos a

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = a^2-\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 = A^2e^{-\beta v^2/c^2}-\frac{1}{k^2v^2} \Rightarrow \left[kv\left(\frac{dv}{dt}\right)\right]^2 = A^2k^2v^2e^{-\beta v^2/c^2}-1 \Rightarrow$$

$$\frac{k}{2}\frac{dv^2}{dt}=\pm\sqrt{A^2k^2v^2e^{-\beta v^2/c^2}-1} \quad \Rightarrow \quad \pm\frac{2}{k}dt=\frac{dv^2}{\sqrt{A^2k^2v^2e^{-\beta v^2/c^2}-1}}$$

esta expresión es en principio directamente integrable y se puede obtener $v^2(t)$. Como resultado vemos que existe el caso en que la velocidad disminuye con el tiempo, como sería el caso de una partícula con velocidad inicial contraria al campo eléctrico, y casos en que la velocidad aumenta con el tiempo. Una consecuencia necesaria es la existencia de un límite mínimo de velocidad de valor aproximado *1/kA*. De esta forma la solución elimina explícitamente la velocidad nula, lo cual es coherente con el problema del extremo de energía cinética de la ecuación (5.8). La existencia de un límite mínimo de velocidad se discutió en *espacio,tiempo,materia y vacío* en la sección *sobre la masa de Planck*.

11.2 Caso de campo magnético constante

De la ecuación de conservación de la energía (5.8) y del resultado (5.5) tenemos

$$\tau = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}$$

$$\frac{dE_c}{dt} + m\tau a^2 = 0\ ;\quad a = a_0 e^{-\frac{\beta}{2c^2}\left(v^2 - v_0^2\right)} \Rightarrow \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} = -m\tau a_0^2 e^{-\frac{\beta}{c^2}\left(v^2 - v_0^2\right)} \Rightarrow \int_{v0}^{v} e^{\frac{\beta}{c^2}\left(v^2 - v_0^2\right)} d(v^2) = -2\tau a_0^2 t \Rightarrow$$

$$\frac{c^2}{\beta} e^{\frac{\beta}{c^2}\left(v^2 - v_0^2\right)} \Bigg|_{v0}^{v} = -2\tau a_0^2 t \Rightarrow e^{\frac{\beta}{c^2}\left(v^2 - v_0^2\right)} - 1 = -2\frac{\beta}{c^2}\tau a_0^2 t \Rightarrow$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{c^2}{\beta}\ln\left(1 - 2\frac{\beta}{c^2}\tau a_0^2 t\right)$$

11.3 Deflexión de partícula cargada por un centro de fuerzas Coulombiano: Bremsstrahlung

El famoso *experimento de Rutherford* sobre la estructura atómica se basa en la deflexión de partículas cargadas por centros de fuerza asociados a los núcleos atómicos de una lámina ultrafina de oro. Evidentemente la aceleración provocada por el centro de fuerza sobre una partícula provocará emisión de radiación, lo que debería provocar un aumento en la deflexión de una trayectoria que podemos considerar aproximadamente hiperbólica, de acuerdo con el formalismo newtoniano de fuerzas.

Si suponemos un movimiento plano de la partícula acelerada , podemos tomar coordenadas polares en el plano complejo y plantear la ecuación (7.1) de esta forma

$$a = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + i\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\right]e^{i\theta} \quad ; v = \left(\frac{dr}{dt} + ir\frac{d\theta}{dt}\right)e^{i\theta}; \qquad \frac{f}{m} = \frac{A}{r^2}e^{i\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(a - \frac{f}{m}\right) = -\frac{\beta}{c^2}a^2 v \Rightarrow$$

$$\frac{d^3r}{dt^3} - 3\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 3r\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{A}{r^3}\frac{dr}{dt} + i\left(3\frac{dr}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + r\frac{d^3\theta}{dt^3} + 3\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3 - \frac{A}{r^2}\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{\beta}{c^2}a^2\left(\frac{dr}{dt} + ir\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Tomaremos la componente real de la ecuación anterior y aproximaremos un momento angular constante tomado del modelo newtoniano

$$\frac{d^3r}{dt^3} - 3\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{3}{2}r\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2\frac{A}{r^3}\frac{dr}{dt} + \frac{\beta}{c^2}\frac{A^2}{r^4}\frac{dr}{dt};\ a \approx \frac{f}{m} = \frac{A}{r^2}e^{i\theta};\ L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

donde también aproximamos el cuadrado de la aceleración en el término de radiación por el valor newtoniano. Eliminando la derivada del ángulo a partir de momento angular *L* tenemos

$$\frac{d^3r}{dt^3} + \left(\frac{3L^2}{m^2} - \frac{\beta A^2}{c^2}\right)r^{-4}\frac{dr}{dt} + 2Ar^{-3}\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{3L^2}{m^2} - \frac{\beta A^2}{c^2}\right)r^{-3} - Ar^{-2}\right) = 0$$

aplicando las condiciones iniciales para *r* muy alejado del centro de fuerzas y multiplicando por *dr/dt* podemos continuar el proceso de integración

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{3L^2}{m^2}-\frac{\beta A^2}{c^2}\right)r^{-3}-Ar^{-2}=0\ \Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt}-\frac{1}{3}\left(\frac{3L^2}{m^2}-\frac{\beta A^2}{c^2}\right)r^{-3}\frac{dr}{dt}-Ar^{-2}\frac{dr}{dt}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{m^2}-\frac{\beta A^2}{3c^2}\right)r^{-2}+Ar^{-1}\right)=0\Rightarrow$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{L^2}{m^2}-\frac{\beta A^2}{3c^2}\right)r^{-2}+2Ar^{-1}=2B$$

eliminando la variable *dt* de la fórmula del momento angular *L* tenemos

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2}\right)^2+\left(\frac{L^2}{m^2}-\frac{\beta A^2}{3c^2}\right)r^{-2}+2Ar^{-1}=2B\Rightarrow\frac{L^2}{2m}\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\left(1-\frac{\beta A^2m^2}{3c^2L^2}\right)\frac{1}{r^2}\right]+\frac{Am}{r}=Bm$$

el lector puede comprobar en [6] la similitud de este resultado con el caso newtoniano, de modo que podemos poner, resolviendo *A* y *β* y relacionando *B* con la energía *E*

$$\frac{L^2}{2m}\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha^3Z_m^4Z_r^2}{3}\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right)\frac{1}{r^2}\right]\pm\frac{Z_mZ_re^2}{4\pi\varepsilon_0r}=E$$

donde *α* es la constante de estructura fina, *ħ* la constante de Planck*, Z* es el número de cargas elementales , el subíndice *m* hace referencia a la carga móvil y el subíndice *r* a la carga en reposo. El signo positivo es para repulsión y el positivo para atracción entre la partícula y el centro de fuerzas. De la misma forma que en [6] podemos encontrar la ecuación diferencial de *Binet* correspondiente, que será

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(1-\frac{\alpha^3Z_m^4Z_r^2}{3}\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right)u\pm\frac{Z_mZ_re^2m}{4\pi\varepsilon_0L^2}=0\quad;\quad u=\frac{1}{r}$$

y la solución correspondiente para la trayectoria será

$$\frac{1}{r}=\left(\sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\left(\frac{Z_mZ_re^2m}{4\pi\varepsilon_0L^2}\right)^2}\right)\cos\left(\phi\sqrt{1-\frac{\alpha^3Z_m^4Z_r^2}{3}\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}\right)\mp\frac{Z_mZ_re^2m}{4\pi\varepsilon_0L^2}$$

con signo negativo para repulsión y positivo para atracción entre el centro de fuerzas y la partícula. Si llamamos Δ_N a la deflexión newtoniana de la trayectoria, vemos rápidamente que el efecto de la radiación es un aumento de la deflexión Δ

$$\Delta\sqrt{1-\frac{\alpha^3Z_m^4Z_r^2}{3}\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}=\Delta_N\Rightarrow\Delta=\frac{\Delta_N}{\sqrt{1-\frac{\alpha^3Z_m^4Z_r^2}{3}\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}}$$

$$\tan(\Delta_N/2)=\frac{Z_mZ_re^2m}{LP_\infty}$$

donde P_∞ es el módulo del momento lineal a una distancia muy alejada del centro de fuerzas. Según este resultado, el término correctivo solamente es apreciable en la práctica cuando el momento angular *L* es del orden de la constante de Planck

$$L=b\,m\,v\approx\hbar\approx\Delta x\Delta p$$

donde *b* es el *brazo recto* del momento angular o distancia entre el punto centro de fuerzas y la recta asíntota. La relación anterior indica que la partícula móvil pasa muy cerca del centro de fuerzas “fijo”; a una distancia comparable con la longitud de onda de *De Broglie* de la partícula móvil. Por tanto a este nivel el fenómeno debe estudiarse según la mecánica cuántica como un proceso de *emisión de fotones* individuales. Los datos disponibles en wikipedia sobre las partículas alfa en la experiencia de Rutherford son : masa = 6.64424×10^{-27} kg , velocidad inicial = 2×10^{7} m/s; lo que conduce a $b \approx 8 \times 10^{-16}$ metros. En el caso de una partícula alfa enfilada directamente hacia un núcleo de oro (y por tanto *L=0*), el máximo acercamiento *r* se podrá calcular según la conservación de la energía como

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{Z_m Z_r e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

que supone un valor $r \approx 2.7 \times 10^{-14}$ metros; muy alejado del valor *b* anterior; de modo que las correcciones que aquí se presentan son despreciables en el caso del experimento de Rutherford.

11.4 Oscilador simple

Para una partícula cargada oscilando en el *eje x* y sometida a una fuerza *F=-kx* podemos plantear (7.1) de esta forma

$$\frac{d}{dt}\left(a + \omega^2 x\right) = -\frac{\beta}{c^2}a^2 v; \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Esta ecuación puede integrarse rápidamente de esta forma

$$\frac{da}{dt} + \omega^2 v = -\frac{\beta}{c^2}a^2 v \Rightarrow \int_0^a \frac{da}{1+\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\omega c}a\right)^2} = -\int_0^x \omega^2 dx \Rightarrow \frac{\omega c}{\sqrt{\beta}}\arctan\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\omega c}a\right) = -\omega^2 x \Rightarrow$$

$$a = -\frac{\omega c}{\sqrt{\beta}}\tan\left(\frac{\omega\sqrt{\beta}}{c}x\right)$$

donde para *x=0* la aceleración también se anula. De acuerdo con el comportamiento de la función *tangente()* resulta que el módulo de la aceleración es siempre superior a la aceleración newtoniana clásica. Este resultado es extraño, ya que esperamos que la emisión de radiación suponga un freno al movimiento de la partícula. La ecuación energética (5.8) es en este caso

$$\left(\frac{\omega c}{\sqrt{\beta}}\tan\left(\frac{\omega\sqrt{\beta}}{c}x\right) - \omega^2 x\right)v = m\tau_0 a^2$$

y tenemos que para [x>0;v>0] ó [x<0;v<0] los dos lados de la igualdad son positivos; pero si [x>0;v<0] ó [x<0;v>0] el término de radiación debería ser negativo; lo cual es evidentemente imposible ya que el cuadrado de la aceleración es siempre positivo. Parece difícil abandonar la ecuación energética (5.8); de modo que, en el contexto de este trabajo, tenemos dos alternativas

1- (7.1) no es aplicable para una fuerza de del tipo *F=-kx*

2-Una carga afectada por una fuerza del tipo *F=-kx* no emite radiación necesariamente.

Bibliografía

[1] Landau-Lifshitz:Teoría Clásica de Campos. Ed. Reverté 2ª edición.

Capítulo 8 : El campo de cargas en movimiento

[2] Bredov-Rumiantsev-Toptiguin:Electrodinámica Clásica. Ed. MIR.

Capítulo 8 : Radiación y dispersión de ondas electromagnéticas.

[3] Feynman- Leighton-Sands:Lecciones de Física de Feynman. Vol 2. Ed. McGraw-Hill

En especial el capítulo sobre la masa electromagnética.

[4] R.K.Wangsness: Campos Electromagnéticos. Ed. Limusa.

[5] *E.M.Purcell - Berkeley Physics Course – Electromagnetismo*

[6] Análisis elemental del movimiento bajo fuerza central newtoniana-Enrique Cantera del Río

[7]*Sobre la Corona Solar : http://en.wikipedia.org/wiki/Corona*
https://www.youtube.com/watch?v=Hg5tla7s-ys

[8] *http://en.wikipedia.org/wiki/Abraham-Lorentz_force*

[9] Apuntes de Mecánica Cuántica-Enrique Cantera del Río

Autor: ENRIQUE CANTERA DEL RÍO. Lcdo. en Cª Físicas e I.T Telecomunicaciones.