

Título del Trabajo	Análisis elemental del movimiento bajo fuerza central de tipo Newtoniano.
Nombre	Enrique Cantera del Río
Filiación	C/Padre Benito Menni-6-2-E 47008 Valladolid (España)
Correo electrónico	benarro@gmail.com
Resumen	Introducción a la teoría newtoniana de la gravedad para primeros cursos de carreras científico-técnicas y último curso de estudios medios.

ANÁLISIS ELEMENTAL DEL MOVIMIENTO BAJO FUERZA CENTRAL DE TIPO NEWTONIANO

Enrique Cantera del Río

Índice

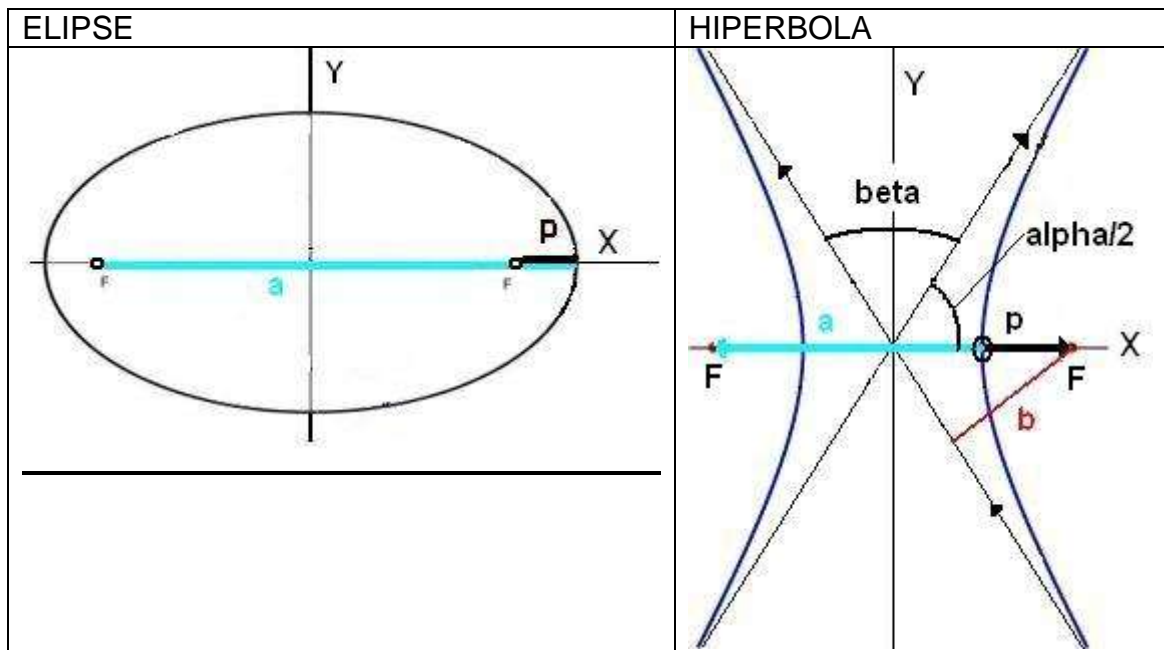
<i>Introducción y objetivos.</i>	<i>Pag 2</i>
<i>Conservación de la energía y del momento angular.</i>	<i>Pag 2</i>
<i>Elipses e hipérbolas en coordenadas canónicas.</i>	<i>Pag 3</i>
<i>Análisis del caso de la trayectoria elíptica.</i>	<i>Pag 4</i>
<i>Análisis del caso de la trayectoria hiperbólica.</i>	<i>Pag 6</i>
<i>Aplicaciones prácticas.</i>	<i>Pag 7</i>
<i>Apéndice Matemático: Ecuación de Binet, Vector de Runge y precesión de la órbita de Mercurio</i>	<i>Pag 11</i>
<i>Referencias.</i>	<i>Pag19</i>

Introducción y objetivos.

Con el magnífico precedente de las *leyes de Kepler*, el estudio del movimiento de una partícula en un campo central sometido a una fuerza dada por la ley de Newton para la gravedad está en el origen de la física matemática.

Este trabajo intenta presentar las principales conclusiones de este estudio de una forma sencilla y rigurosa; de modo que sea accesible del modo mas completo posible a estudiantes del último curso de secundaria y primero de universidad en ramas científico-técnicas. Se utilizan conceptos sencillos de geometría de cónicas, vectores, trigonometría plana y análisis matemático disponibles en el nivel académico citado.

Las siguientes imágenes se utilizarán a lo largo del texto:



Conservación de la energía y del momento angular.

La ley de Newton de la gravedad admite dos integrales sencillas (ver apéndice), válidas sea cual sea la trayectoria concreta del cuerpo afectado por la gravedad y asociadas a dos constantes del movimiento con unidades de energía y momento angular:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r}; \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

donde r es la distancia al centro de fuerza, que es uno de los focos y u_r es un vector unitario en la dirección, y sentido, del foco de fuerzas a la partícula.

Consecuencias:

1-Movimiento plano, la trayectoria es compatible con la ecuación de un plano:

$$0 = (\vec{r} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \cdot \vec{L} \equiv (x - x_0)L_x + (y - y_0)L_y + (z - z_0)L_z = 0$$

donde las componentes del momento angular L son valores constantes y los vectores r se miden respecto del centro de fuerzas.

2-Si $E < 0$, r no puede ser tan grande como queramos; esto representa una trayectoria acotada por una distancia máxima o *apoastro* entorno al centro de fuerzas. Corresponde a un *círculo* o una *elipse*. Si $E > 0$ ó $E=0$ la trayectoria no está acotada y la partícula puede estar a una distancia r tan grande como se quiera respecto del centro de fuerzas. Este caso corresponde a una hipérbola o una parábola. Para distancias muy alejadas del centro de fuerzas el efecto de dicha fuerza será despreciable y la partícula se moverá aproximadamente por inercia en una línea recta y con velocidad constante (*hipérbola*), o bien permanecerá aproximadamente en reposo relativo (*parábola*); según la primera ley de Newton de la mecánica. Esto representa el comportamiento asintótico para las trayectorias abiertas de la hipérbola y la parábola.

Elipses e hipérbolas en coordenadas canónicas.

Se puede definir la elipse como el lugar de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos denominadas *focos* es una constante. Análogamente la hipérbola es el lugar de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos denominados focos es una constante positiva. Se trata de dos figuras que tienen un centro de simetría. Las coordenadas canónicas están asociadas a un sistema de coordenadas con origen en dicho centro de simetría y cuyos ejes X, Y son también ejes de simetría; tal como aparece en las imágenes.

Para la elipse, las posiciones canónicas de los focos son $(a-p)/2$ y $-(a-p)/2$ sobre el eje X

$$\sqrt{\left(x + \frac{a-p}{2}\right)^2 + (y)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{a-p}{2}\right)^2 + (y)^2} = a + p \Rightarrow x^2 4pa + y^2 (a+p)^2 = ap(a+p)^2$$

Las trayectorias elípticas de los planetas con origen de coordenadas, o punto fijo, en el sol es una de las *leyes de Kepler*.

Para la hipérbola, en la representación canónica los focos están sobre el eje X en las posiciones $(a+p)/2$ y $-(a+p)/2$

$$\sqrt{\left(x + \frac{a+p}{2}\right)^2 + (y)^2} - \sqrt{\left(x - \frac{a+p}{2}\right)^2 + (y)^2} = a - p \Rightarrow x^2 4pa - y^2 (a-p)^2 = ap(a-p)^2$$

Pendiente de las rectas asintotas de la hipérbola

$$\tan(\alpha/2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{pa}}{a-p}$$

La distancia, simbolizada por la letra b , del foco a una asíntota cualquiera de la hipérbola cae dentro del tópicus geométrico de la distancia de un punto a una recta:

$$b = \frac{\left(\frac{a+p}{2}\right) \tan(\alpha/2)}{\sqrt{\tan^2(\alpha/2)+1}} = \sqrt{pa}$$

Análisis del caso de la trayectoria elíptica.

Las componentes de la aceleración de una partícula asociadas a su trayectoria verifican

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} [v(t)\vec{T}] = \frac{dv(t)}{dt} \vec{T} + \frac{v(t)^2}{\rho} \vec{N}$$

siendo $v(t)$ el módulo de la velocidad del punto en función del tiempo y ρ el radio de curvatura intrínseco de la trayectoria. El vector T es un vector unitario tangente a la trayectoria y con la misma dirección que la velocidad de la partícula en el punto considerado de la trayectoria y N es un vector unitario perpendicular a T y dirigido hacia la parte cóncava de la trayectoria. El hecho matemático de que el vector N esté bien definido indica la existencia del *plano osculador* a la trayectoria, de modo que, en términos de cálculo diferencial, cerca de un punto dado de la trayectoria existe un plano que aproxima tanto como queramos la trayectoria cerca de ese punto. El vector N es perpendicular a T y ambos están contenidos en dicho plano osculador. En otro contexto, la existencia de este plano osculador *permite* en el caso del movimiento de las partículas de un sólido rígido considerar la existencia del plano de giro instantáneo y por tanto la existencia del vector velocidad angular instantánea en la cinemática del sólido rígido[8]. En el caso de trayectorias planas el plano osculador es el mismo plano de la trayectoria.

Para el caso de órbita elíptica la función $r(t)$, que representa en función del tiempo el radio vector de la partícula móvil respecto del centro de fuerzas situado en uno de los focos, está acotada al menos por el máximo del apoastro (a) como hemos visto. Si derivamos respecto del tiempo la ecuación de la energía tenemos

$$\frac{dE}{dt} = 0 = mv \frac{dv}{dt} + G \frac{Mm}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

La derivada de $r(t)$ en sus puntos extremos, máximos y/o mínimos, se anula; y por tanto también se anula la derivada de $v(t)$ según la ecuación anterior, lo que indica que también son puntos extremos para el módulo de la velocidad. Una segunda derivada de la energía permite deducir los signos de la derivada segunda en estos extremos

$$mv \frac{d^2v}{dt^2} + G \frac{Mm}{r^2} \frac{d^2r}{dt^2} = 0$$

Por tanto un máximo de $r(t)$ (derivada segunda negativa) corresponde a un mínimo de $v(t)$ (derivada segunda positiva) y al revés.

Si la derivada del módulo de la velocidad se anula en los puntos extremos de $r(t)$, entonces la aceleración asociada a la trayectoria solamente tiene la componente normal asociada a N en estos puntos, y por tanto la fuerza que afecta a la partícula móvil tiene una dirección también normal a la trayectoria. Además según la ley de fuerzas de Newton la dirección de la fuerza siempre está dirigida hacia el centro de fuerzas, es decir, tiene la dirección del radio vector r . Dado que el vector velocidad instantánea es siempre tangente a la trayectoria, deducimos que en los puntos extremos de la trayectoria la velocidad instantánea y el radio vector de la partícula respecto del centro de fuerzas son perpendiculares. Esto permite expresar el módulo del momento angular en estos puntos como $L = mrv$ y la ecuación de la energía se puede plantear así en los puntos extremos

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{Mm}{r} \Rightarrow$$

$$r = -G \frac{Mm}{2E} \pm \sqrt{\left(G \frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

para $E < 0$ la solución de esta ecuación proporciona un valor para el máximo o apoastro (a) y otro valor que ha de ser necesariamente el mínimo o periaastro (p). Descartamos por razones físicas el valor mínimo $r=p=0$, equivalente a $L=0$; lo cual supondría unas energías cinética y potencial infinitas en la ecuación de la energía. El lector puede ver que el valor $L=0$ requiere considerar la masa central *exactamente puntual* ($p=0$), lo que supone necesariamente, en términos físicos de un caso real, el choque del móvil con el centro de fuerzas (supuesto esférico, compacto y sin huecos). Si suponemos el centro de fuerzas mucho más masivo que el móvil, tal como supone este modelo clásico, lo más probable es que parte de la energía se disipe en calor en el choque y la energía mecánica E deja de ser una constante.

Para que la ecuación anterior tenga soluciones reales asociadas a una trayectoria acotada debe verificarse, independientemente de la trayectoria concreta, que

$$E \geq -\left(\frac{GMm}{L}\right)^2 \frac{m}{2} \quad (1)$$

En el caso límite en que los extremos coinciden: $p = a$; tenemos una trayectoria circular, ya que si el mínimo y el máximo de $r(t)$ coinciden, entonces $r(t)$ debe ser constante y por tanto la ecuación anterior es una igualdad.

Planteando la ecuación de la energía para los extremos encontrados tenemos

$$E = \frac{L^2}{2mp^2} - G \frac{Mm}{p}$$

$$E = \frac{L^2}{2ma^2} - G \frac{Mm}{a}$$

Eliminando L resulta

$$E = -G \frac{Mm}{p+a}$$

con esto L se puede resolver, introduciendo el módulo de la Energía, como

$$L = \sqrt{2m|E|pa}$$

Vemos que conociendo L y E quedan totalmente determinados los puntos del periastro y el apoastro así como el plano del movimiento. Por tanto conocer L y E equivale a determinar totalmente la trayectoria elíptica.

Podemos calcular el radio de curvatura de la trayectoria en el periastro despejando ρ de las siguientes relaciones aplicables al periastro

$$E = -G \frac{Mm}{a+p} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{p}$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = G \frac{Mm}{p^2}$$

tenemos

$$\rho(p) = \frac{2ap}{a+p}$$

Puede comprobar el lector que el radio de curvatura en el apoastro es el mismo.

Para el caso de una órbita circular $p = a = r$, siendo r el radio de la trayectoria circular y por tanto el radio de curvatura es igual al radio de la circunferencia: $\rho(r) = r$.

Un caso límite es tomar el *apoastro* a tendente a infinito. Este es el caso de las trayectorias parabólicas con $E=0$.

Análisis del caso de la trayectoria hiperbólica.

En el caso de la trayectoria hiperbólica tenemos, aplicando las condiciones en el periastro y en el infinito

$$E = \frac{L^2}{2mp^2} - G \frac{Mm}{p} = \frac{P_\infty^2}{2m}$$

$$L = bP_\infty$$

donde la P mayúscula representa el impulso mecánico en el infinito. Aplicando resultados anteriores para b tenemos para L :

$$L = \sqrt{2m|E|ap}$$

y para E

$$E = G \frac{Mm}{a-p}$$

Una partícula que se acerque al foco desde el infinito por una rama asintótica y luego se aleje por la rama asintótica correspondiente experimentará una modificación en la dirección β de la velocidad que se puede calcular a partir del ángulo de las asíntotas

$$\tan(\beta/2) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha/2\right) = \frac{1}{\tan(\alpha/2)} = \frac{GMm}{L} \sqrt{\frac{m}{2E}} = \frac{GMm^2}{LP_\infty}$$

Cálculo del cambio de impulso en una trayectoria hiperbólica.

Al pasar la partícula de la asíntota de aproximación a la asíntota de alejamiento, el impulso mecánico de la partícula se puede calcular por

$$\Delta \bar{P} = \int_{t_1}^{t_2} -G \frac{Mm}{r^2} \bar{u}_r dt$$

donde \bar{u}_r es un vector unitario en la dirección, y sentido, del foco de fuerzas a la partícula. Para simplificar podemos desplazar el sistema de coordenadas canónico utilizado para la hipérbola en el eje X de modo que el origen coincida con el foco de fuerzas. En este nuevo sistema de coordenadas el vector \bar{u}_r y la conservación de L se expresan fácilmente en coordenadas polares:

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt}; \bar{u}_r = [\cos(\phi), \text{sen}(\phi)]$$

donde L debe considerarse con el signo algebraico adecuado (\pm). Eliminando dt tenemos

$$\Delta \bar{P} = -G \frac{Mm^2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} [\cos(\phi), \text{sen}(\phi)] d\phi = -G \frac{Mm^2}{L} [\text{sen}(\phi), -\cos(\phi)]_{\phi_1}^{\phi_2}$$

Para el caso del cambio de impulso entre dos asíntotas se puede calcular esta integral a partir de la inclinación de las asíntotas calculado mas arriba, ya que dicha inclinación no cambia en el nuevo sistema de coordenadas desplazado:

$$\Delta \bar{P} = -G \frac{Mm^2}{L} [\text{sen}(\phi), -\cos(\phi)]_{2\pi-\alpha/2}^{\alpha/2} = -2G \frac{Mm^2}{L} [\text{sen}(\alpha/2), 0]$$

Aplicaciones prácticas.

Estos últimos resultados son aplicables al caso del impulso o asistencia gravitatoria[4] que afecta a una nave a su paso por un planeta, que fue presentado en *espacio, tiempo, materia y vacío*[1] en la sección de problemas. En este caso la modificación de energía de la nave en su tránsito por la *esfera de influencia del planeta*, tomando un sistema de coordenadas centrado en el sol¹, es

$$\Delta E = \bar{v}_{planeta} \bullet \Delta \bar{P}$$

Según el signo de L y la dirección de la velocidad del planeta, la nave puede ganar o perder energía cinética. En caso de ganancia la nave puede incluso salir del sistema solar, como en el caso de las naves Voyager. El radio de la esfera de influencia de un planeta es la distancia al planeta mas allá de cual podemos considerar despreciable la atracción del planeta en comparación con la fuerza que ejerce el Sol. Se calcula mediante la siguiente fórmula atribuida a Laplace

$$R_{influencia} = D_{sol-planeta} \left(\frac{M_{planeta}}{M_{sol}} \right)^{2/5}$$

donde D es la distancia entre el sol y el planeta y M hace referencia a las masas del sol y del planeta. Una primera aproximación que se puede hacer es considerar que durante el tránsito de la nave por la zona de influencia del planeta la energía potencial asociada al campo gravitatorio solar es *aproximadamente constante* y que en dicha zona de influencia el movimiento de la nave está determinado por el campo del planeta y las condiciones iniciales de la nave al entrar en la zona de influencia. En *concordancia* con esta aproximación, la velocidad del planeta se puede considerar constante durante el tránsito de la nave por la zona de influencia del planeta. Por tanto el planeta se mueve aproximadamente por *inercia* durante el tiempo correspondiente al tránsito y la trayectoria de la nave, vista desde el planeta, puede considerarse hiperbólica de acuerdo al modelo que hemos descrito.

Otro concepto importante son las *órbitas de transferencia de Hohmann* [2]. Se trata de una maniobra de naves espaciales que permite cambiar de una órbita circular a otra también circular mediante empujes idealmente instantáneos de los motores en los puntos extremos de una trayectoria de transferencia semi-elíptica. Estos empujes generan un cambio de velocidad en los puntos extremos que tiene la misma dirección de la velocidad que ya llevaba la nave en dichos puntos extremos. De este modo la nueva velocidad de la nave sigue siendo perpendicular al radio-vector foco-nave. En el análisis anterior hemos demostrado que si existen puntos extremos de $r(t)$ en la trayectoria, en estos puntos el radio vector y la velocidad son perpendiculares; pero el lector puede ver también que la inversa es cierta: los puntos en que el radio vector y la velocidad son perpendiculares deben ser puntos extremos de la trayectoria, ya

¹ Este sistema de coordenadas se puede considerar inercial por periodos de tiempo muy superiores a un sistema de coordenadas basado en la superficie terrestre.

que la derivada del módulo de la velocidad en estos puntos de perpendicularidad debe anularse en las componentes intrínsecas de la aceleración. Por tanto para este caso, el punto en que se ha verificado el cambio de velocidad de la nave *sigue siendo un punto extremo* para la nueva trayectoria asociada a las nuevas condiciones cinemáticas.

Se pueden aplicar los resultados también a la “predicción clásica” de la desviación de un fotón al pasar cerca de un campo gravitatorio. Para pequeñas desviaciones angulares:

$$\beta \approx 2 \frac{GMm^2}{LP_\infty} = 2 \frac{GMm^2}{mcp^* mc} = \frac{2GM}{c^2 p}$$

donde p es la mínima distancia al centro de fuerzas en el periastro y m es la masa equivalente del fotón ($E=mc^2$). Este resultado es la mitad del calculado en la relatividad general y comprobado experimentalmente.

También, debido a la similitud con la ley de Coulomb, se puede hacer un análisis análogo aplicable al caso del experimento de *Rutherford* de dispersión de partículas alfa (núcleos de helio) por repulsión de los núcleos atómicos de una lámina de oro. Basta hacer el siguiente cambio en los resultados

$$GMm \rightarrow - \frac{Qq}{4\pi \epsilon} \quad (2)$$

Donde Q es la carga situada, inmóvil, en el foco o centro de fuerzas y q es la carga de la partícula móvil. Note el lector que las órbitas elíptica, circular y parabólica solamente son posibles para el caso de fuerzas atractivas (cargas de signo contrario), mientras que la trayectoria hiperbólica permite fuerzas atractivas y repulsivas. Las fuerzas atractivas determinan la trayectoria mediante la rama de la hipérbola mas cercana al foco de fuerzas; y las repulsivas (cargas del mismo signo) determinan la trayectoria mediante la rama de la hipérbola mas alejada del foco de fuerzas. Sin embargo en el caso de cargas eléctricas hay que evaluar el fenómeno de emisión de radiación de una carga acelerada que, en general, hace que no existan trayectorias cerradas estables. En el experimento de Rutherford es relevante la relación entre el parámetro b , denominado *parámetro de impacto*, y el ángulo de dispersión de la trayectoria hiperbólica β . Partiendo de la ley de fuerzas de *Coulomb*, el lector puede comprobar la siguiente relación:

$$b = \frac{Z_\alpha Z_{oro} e^2}{4\pi \epsilon m v_\infty^2} \frac{1}{\tan(\beta/2)}$$

donde los números Z hacen referencia al número de protones de las partículas alfa y del núcleo atómico del oro, e es la carga del electrón, ϵ la constante dieléctrica del vacío y la velocidad corresponde a la velocidad inicial con que las partículas alfa salen del sistema de aceleración correspondiente.

Finalmente la independencia respecto de la trayectoria de la relación (1) es importante en mecánica cuántica, de modo que una relación similar se verifica para el caso del potencial Coulombiano en el átomo de hidrógeno; siendo E y L los valores cuantizados correspondientes. De hecho, si tomamos el caso de órbita circular en (1) y el postulado del modelo semiclásico de Böhrr sobre cuantización de momento angular en átomos hidrógenoides: $L=nh//2\pi$, una vez hecho el cambio (2), obtenemos la fórmula correspondiente a los niveles de energía:

$$E = -Z^2 \frac{me^4}{8\varepsilon^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

En el análisis inicial descartamos el valor $L=0$ ($p=0$) por razones físicas, sin embargo el valor $L=0$ si está permitido por la mecánica cuántica clásica de *Heisenberg* y *Schrödinger*, y de hecho es la divergencia mas notable con el modelo semiclásico de Böhrr. En cambio en la mecánica cuántica relativista de *Dirac* existe un momento angular mínimo, $L = h/4\pi$, asociado al Spin del electrón.

Como curiosidad, si el lector ha visto imágenes de televisión del lanzamiento de cohetes espaciales, verá que los cohetes a medida que ganan altura aparecen inclinados. La inclinación que toman es en la dirección del giro de la tierra respecto de su eje de rotación. Visto desde un sistema de coordenadas asociado al centro de la tierra y que no gire con ella, el cohete sale con un momento angular inicial asociado al giro de la tierra. Con la inclinación de la trayectoria se busca aumentar lo mas rápidamente posible el momento angular del cohete para ponerlo en órbita.

En el apéndice matemático se incluye un estudio completo de las trayectorias posibles bajo la acción de una fuerza central de tipo Newtoniano.

APÉNDICE MATEMÁTICO

Energía potencial y momento angular para dos cuerpos puntuales en interacción

Supongamos dos objetos ligados por una fuerza de tipo Newtoniano. La energía del sistema será, desde un sistema de coordenadas inercial

$$E = \int \bar{F}_1 \cdot d\bar{r}_1 + \int \bar{F}_2 \cdot d\bar{r}_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + C$$

donde C es una constante de integración asociada al sistema de coordenadas inercial concreto que utilicemos. Por otra parte, según el principio de acción reacción tenemos $F_2 = -F_1$ y por tanto

$$E = \int \bar{F}_1 \cdot d\bar{r}_1 - \int \bar{F}_1 \cdot d\bar{r}_2 = \int \bar{F}_1 \cdot d(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = -Gm_1 m_2 \int \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot d\bar{r}; \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$$

el vector $d\bar{r}$ siempre se puede descomponer en una componente en la misma dirección del vector \bar{r} y otra componente perpendicular al vector \bar{r} . La primera componente corresponde a una variación del módulo de \bar{r} y por tanto

$$E = -Gm_1 m_2 \int \frac{r}{r^3} dr = \frac{K}{r} + C'$$

igualando las dos expresiones tenemos

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r} = const.$$

tenemos el resultado correspondiente a la conservación de la energía mecánica en un sistema de coordenadas inercial.

Para el caso del momento angular del sistema de dos cuerpos tenemos para el momento total de fuerzas M en un sistema de coordenadas inercial, aplicando el principio de acción y reacción $F_2 = -F_1$ y por tanto

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F}_1 = \bar{r} \times \bar{F}_1 = 0 \\ &\Rightarrow \bar{L} = \bar{r}_1 \times \bar{p}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{p}_2 = cte \end{aligned}$$

el resultado nulo se debe a que en la ley de Newton la fuerza F es paralela al radio-vector \bar{r} entre las partículas.

Respecto a la cantidad de movimiento, si consideramos el sistema aislado de dos cuerpos tenemos una fuerza neta sobre el sistema de

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0 = \frac{d}{dt} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \Rightarrow \bar{p}_1(t) + \bar{p}_2(t) = cte$$

en cualquier sistema de coordenadas inercial. Evidentemente, considerando la transformación cinemática de velocidades entre sistemas inerciales, siempre podemos encontrar uno de ellos que verifique $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$. Podemos re-escribir los resultados anteriores en este sistema de coordenadas inercial de esta forma

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = const. \equiv \frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2} - \frac{Gm_1m_2}{r}; \bar{p}_1 = \bar{p}_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{p}_1^2}{2\mu} - \frac{Gm_1m_2}{r} = const.; \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\bar{L} = \bar{r}_1 \times \bar{p}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{p}_2 = cte \equiv \bar{r} \times \bar{p}_1$$

Pero el lector debe notar que en estos resultados aparece una mezcla de magnitudes medidas respecto del sistema de coordenadas inercial (\bar{p}_1) junto con posiciones relativas entre las partículas (r), de modo que en general, existe la desigualdad

$$\bar{p}_1 \neq m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$$

podemos mejorar esto en nuestro sistema de coordenadas y manejar solamente magnitudes relativas entre los cuerpos en interacción

$$\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2; \quad m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = 0 \Rightarrow m_1 \bar{v}_1 + m_2 (\bar{v}_1 - \bar{v}) = 0 \Rightarrow \bar{p}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \bar{v} = \mu \bar{v}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r} = const.; \quad \bar{L} = \bar{r} \times \mu \bar{v} = cte$$

Introducimos la aceleración relativa de esta forma

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{a}_1 - \bar{a}_2 = \frac{\bar{F}_1}{m_1} - \frac{\bar{F}_2}{m_2} = \bar{F}_1 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{\bar{F}_1}{\mu} \Rightarrow$$

$$\bar{F}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \bar{r} = \mu \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$$

Esta última ecuación es válida en cualquier sistema inercial. Resumiendo resultados tenemos en nuestro sistema de coordenadas inercial

$$\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2; \quad \bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad \bar{p} = \mu \bar{v}$$

$$\Rightarrow -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \bar{r} = \frac{d \bar{p}}{dt}$$

$$E = \frac{\bar{p}^2}{2\mu} - \frac{Gm_1 m_2}{r} = cte; \quad \bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = cte$$

Note el lector que estas ecuaciones son válidas en nuestro sistema de coordenadas inercial y no a un sistema de coordenadas solidario con una de las masas. Si fuese el caso deberían aparecer términos correspondientes con fuerzas inerciales (centrífuga, Coriolis...). Podemos resolver estas ecuaciones, como se verá en la sección sobre la ecuación de Binet, y obtener una expresión para el vector $r(t)$. Sin embargo esto no nos informa todavía sobre la posición de los dos cuerpos en nuestro sistema de coordenadas. Para resolver esto podemos proceder así en nuestro sistema de coordenadas

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 0 = \frac{d}{dt}(m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2) \Rightarrow m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 = cte$$

Hemos introducido un sistema de coordenadas inercial mediante la propiedad de que la suma de impulsos mecánicos es nula. Sin embargo esto no determina completamente el sistema de coordenadas y aún tenemos la posibilidad de elegir el origen, la coordenada $(0,0,0)$, del sistema de coordenadas. Según el resultado anterior y el álgebra vectorial elemental siempre podemos elegir un origen que verifique

$$m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 = 0$$

El sistema de coordenadas que hemos definido de esta forma no es más que el sistema de coordenadas asociado al centro de masas del sistema de dos cuerpos. Podemos relacionar inmediatamente el vector $r(t)$ relativo y los vectores r_1 y r_2 en este sistema de coordenadas

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_1 - \bar{r}_2 ; m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 = 0 = m_1 \bar{r}_1 + m_2 (\bar{r}_1 - \bar{r}) \Rightarrow \\ \bar{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{r} \\ \bar{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{r} \end{aligned}$$

En el caso de que uno de los objetos sea de una masa muy superior, $m_2 \gg m_1$, entonces es $r_2=0$ y dicho objeto masivo se mantiene prácticamente en reposo en el origen de nuestro sistema de coordenadas. En este caso el vector relativo $r(t)$ coincide prácticamente con la posición del otro objeto (r_1) en nuestro sistema de coordenadas. Esta es la aproximación Newtoniana clásica del movimiento de los planetas alrededor del sol.

Los resultados encontrados son aplicables también al caso de dos masas conectadas por un muelle sin masa que siga la ley de Hooke : $F=k(l-l_0)$. La masa nula del muelle supone que las fuerzas elásticas sobre las masas verifiquen $F_1=-F_2$.

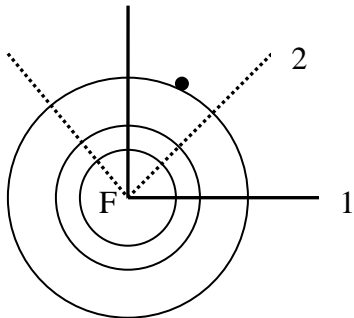
Ecuación diferencial de Binet

En un sistema de coordenadas cartesianas inercial (x,y) en el plano orbital y con origen en el centro de fuerzas, según la aproximación Newtoniana clásica comentada antes, podemos expresar la conservación de la energía y del momento angular de esta forma:

$$E = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] - \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{L}{m} dt = xdy - ydx$$

Al conseguir estas integrales de la 2ª ley de Newton se ha reducido el orden de las derivadas de modo que han desaparecido las diferenciales segundas y solo aparecen diferenciales de primer orden. Esto permite utilizar los términos diferenciales como variables; en concreto podemos eliminar la variable dt para encontrar la ecuación de la trayectoria

$$E = \frac{L^2}{2m} \left[\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\left(x \left(\frac{dy}{dx} \right) - y \right)^2} \right] - \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



Pese a tener un aspecto complejo, formalmente debemos considerarla una ecuación más sencilla ya que hay una reducción en la información proporcionada: de conocer la posición de la partícula en cada instante de tiempo a conocer solo la trayectoria que sigue. Sin embargo esta ecuación diferencial resulta todavía complicada y es conveniente ver intuitivamente el origen de esta complicación. La ecuación diferencial anterior es válida para el conjunto de sistemas

de referencia cartesianos planos con centro en el foco de fuerzas F . El dibujo adjunto representa dos de esos sistemas de referencia: 1 con ejes coordenados en línea gruesa y 2 con ejes coordenados en línea punteada. Estos sistemas de referencia se diferencian en un giro arbitrario entre sus ejes. El punto negro representa un punto arbitrario. Vemos que las coordenadas cartesianas (x,y) de este punto son distintas en el sistema 1 y en el sistema 2. Pero si utilizamos coordenadas polares (r,Φ) vemos que un punto arbitrario tiene la misma coordenada radial (r) en 1, en 2 y en general en todos los sistemas de referencia en que es válida la ecuación diferencial anterior. Intuitivamente esta simetría anuncia una simplificación en la ecuación diferencial si expresamos dicha ecuación en coordenadas polares :

$$x = r \cos(\phi); y = r \sin(\phi)$$

$$E = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] - \frac{GMm}{r}; \quad \frac{L}{m} dt = r^2 d\phi$$

$$E = \frac{L^2}{2m} \left[\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{GMm}{r}$$

Esta expresión lleva directamente a un proceso de integración que permite obtener la función $\Phi(r)$ de la trayectoria en coordenadas polares. Sin embargo todavía es posible simplificar la ecuación diferencial anterior haciendo el cambio $u=1/r$

$$\frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \rightarrow E = \frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 \right] - u GMm$$

si derivamos la ecuación anterior respecto al ángulo polar estamos de nuevo reduciendo información de la ecuación y por tanto simplificándola. Esta información eliminada en la derivación deberá ser incluida como *condición de contorno* en el proceso de integración:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right) \left[\frac{L^2}{m} \left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u \right) - GMm \right] = 0$$

La ecuación anterior tiene dos soluciones:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right) = 0 \rightarrow \frac{1}{r} = cte$$

que representa una trayectoria circular centrada en el foco de fuerzas. Pero dado que la derivada de u no es necesariamente nula siempre, obtenemos también la ecuación diferencial de *Binet*

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}$$

que corresponde a una *ecuación armónica*, similar a la oscilación elástica de un muelle, que incluye una solución particular constante y necesita dos constantes de integración asociadas a condiciones de contorno:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} + K \cos(\phi - \phi_0)$$

Los valores K y ϕ_0 son constantes de integración de la ecuación diferencial de segundo grado. El valor K se puede deducir de la ecuación diferencial de la Energía a partir de la cual dedujimos la ecuación de Binet; como hemos dicho incluimos de nuevo esta información como condición de contorno

$$K = \pm \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} \pm \left(\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2} \right) \cos(\phi - \phi_0)$$

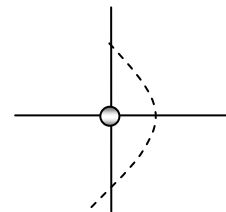
El valor Φ_0 se puede determinar haciendo que sea $\Phi = 0$ para el valor mínimo del radio vector r_{min} ; que ya hemos determinado antes.

Para el caso de la *hipérbola* es $E > 0$ y la distancia mínima en el periastro (p) verifica:

$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{1}{p} = \frac{GMm^2}{L^2} + \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}$$

que para $\Phi_0 = 0$ corresponde con el caso $K > 0$:

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} + \left(\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2} \right) \cos(\phi)$$



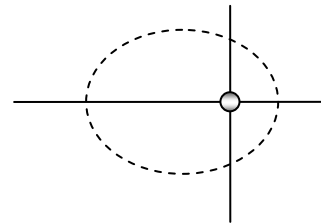
Para el caso $E = 0$ la ecuación representa una *parábola*.

En el caso de la *elipse* es $E < 0$ y la distancia mínima en el periastro (p) es

$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{1}{p} = \frac{GMm^2}{L^2} + \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}$$

que para $\Phi_0 = 0$ corresponde con el caso $K > 0$:

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} + \left(\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2} \right) \cos(\phi)$$

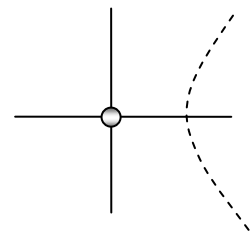


Para el caso en que la raíz cuadrada se anule, la ecuación representa una trayectoria circular:

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2}; E = -\frac{1}{2}m\left(\frac{GMm}{L}\right)^2 = -\frac{GMm}{2r}$$

El lector puede comprobar que para una fuerza central Coulombiana entre cargas del mismo signo la trayectoria correspondiente a la rama repulsiva hiperbólica es:

$$\frac{1}{r} = \left(\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{Qqm}{4\pi\epsilon L^2}\right)^2} \right) \cos(\phi) - \frac{Qqm}{4\pi\epsilon L^2}$$



El vector de Runge y la precesión del perihelio de Mercurio.

La ley de Newton de la gravedad universal aplicada al sistema solar dió una explicación precisa, según las capacidades de medida de los siglos XVIII y XIX, del movimiento de planetas y cometas en base al modelo de interacción entre dos cuerpos: el sol y cada uno de los planetas. Sin embargo la ley de gravedad universal implica que también deben existir fuerzas, mayores o menores, de cada planeta con el resto. La existencia de estas fuerzas se podría observar en trayectorias de los planetas apartadas de la elipse. Tal vez el caso más impresionante de este hecho fue la predicción (Le Verrier) de la existencia del planeta Neptuno en base a las perturbaciones observadas en la trayectoria del planeta Urano. Otro hecho experimental relevante relacionado con esto es la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio. La órbita de este planeta es una elipse, pero el eje mayor de esta elipse, con un foco fijo en el sol, gira muy lentamente (574 segundos de arco por siglo) en el propio plano de la órbita. Este giro se denomina precesión del perihelio. El cálculo de esta precesión la realizó *Le Verrier* mediante un complejo sistema de aproximaciones sucesivas y empleando el cálculo numérico para el efecto de cada planeta sobre la órbita de Mercurio. Actualmente este tipo de cálculos son propios de las computadoras programables. Junto con trabajos previos de *Laplace*, también fue capaz de demostrar que, salvo cuerpos de masa relativamente pequeña, la existencia de *Júpiter*, *Saturno* y *Urano* hacían del sistema solar un sistema fundamentalmente estable.

En la aproximación Newtoniana de un sistema inercial de coordenadas con origen el sol partimos de un vector que es, para un planeta dado, el producto vectorial del impulso mecánico por el momento angular. Nos interesa la variación de este vector con el tiempo

$$\bar{B} = \bar{p} \times \bar{L}; \quad \frac{d\bar{B}}{dt} = \frac{d\bar{p}}{dt} \times \bar{L} + \bar{p} \times \frac{d\bar{L}}{dt}$$

la variación de la cantidad de movimiento del planeta (de masa m) se debe a la fuerza de gravedad Newtoniana del sol (de masa M) y una componente perturbativa que llamaremos f . La variación del momento angular del planeta (L) se debe solo a f

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{GMm}{r^3} \bar{r} + \bar{f}; \quad \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r} \times \bar{f}; \quad \bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$$

a continuación analizamos el primer término del vector $d\bar{B}/dt$ introducido al principio

$$\frac{d\bar{p}}{dt} \times \bar{L} = \left(-\frac{GMm}{r^3} \bar{r} + \bar{f} \right) \times (\bar{r} \times \bar{p}) = -\frac{GMm}{r^3} \bar{r} \times (\bar{r} \times \bar{p}) + \bar{f} \times \bar{L}$$

para el primer término dependiente de la gravedad solar del resultado anterior y teniendo en cuenta la relación vectorial $\bar{p} = m d\bar{r}/dt$, el vector unitario u_r y las propiedades del triple producto vectorial tenemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{GMm}{r^3} \bar{r} \times (\bar{r} \times \bar{p}) = -\frac{GMm^2}{r^3} \bar{r} \times \left(\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right); \bar{r} = r\bar{u}_r \Rightarrow \\
& -\frac{GMm}{r^3} \bar{r} \times (\bar{r} \times \bar{p}) = -\frac{GMm^2}{r} \bar{u}_r \times \left(\bar{u}_r \times \frac{d(r\bar{u}_r)}{dt} \right) = -\frac{GMm^2}{r} \bar{u}_r \times \left(\bar{u}_r \times \left(\bar{u}_r \frac{dr}{dt} + r \frac{d\bar{u}_r}{dt} \right) \right) = \\
& -GMm^2 \bar{u}_r \times \left(\bar{u}_r \times \frac{d\bar{u}_r}{dt} \right) = -GMm^2 \left[\bar{u}_r \left(\bar{u}_r \cdot \frac{d\bar{u}_r}{dt} \right) - \frac{d\bar{u}_r}{dt} (\bar{u}_r \cdot \bar{u}_r) \right] = GMm^2 \frac{d\bar{u}_r}{dt}
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la regla del triple producto vectorial. Sustituyendo los resultados obtenidos en la ecuación inicial tenemos

$$\frac{d}{dt} [\bar{p} \times \bar{L} - GMm^2 \bar{u}_r] = \bar{f} \times \bar{L} + \bar{p} \times (\bar{r} \times \bar{f})$$

se define el *vector de Runge R* como

$$\begin{aligned}
\bar{R} &= \bar{p} \times \bar{L} - GMm^2 \bar{u}_r \\
\frac{d\bar{R}}{dt} &= \bar{f} \times \bar{L} + \bar{p} \times (\bar{r} \times \bar{f})
\end{aligned}$$

Caso de perturbaciones despreciables

En el caso de tomar $f=0$ tenemos que el vector de Runge es una *constante* del movimiento que no varía con el tiempo. Podemos visualizar el valor de R en el perihelio del planeta y ver que la dirección de este vector es paralela al eje mayor de la elipse. Más aún, podemos encontrar fácilmente la ecuación de la trayectoria multiplicando escalarmente el vector de Runge por el radio vector r desde el foco solar

$$\begin{aligned}
\bar{r} \cdot \bar{R} &= Rr \cos(\phi) = \bar{r} \cdot (\bar{p} \times \bar{L}) - GMm^2 \bar{r} \cdot \bar{u}_r = \bar{L} \cdot (\bar{r} \times \bar{p}) - GMm^2 r = L^2 - GMm^2 r \Rightarrow \\
\frac{L^2}{r} &= R \cos(\phi) + GMm^2
\end{aligned}$$

comparando esto con resultados anteriores, tenemos que la dirección del vector de Runge es la del eje mayor y el sentido es desde el foco solar al perihelio del planeta.

Caso de término dipolar no despreciable

La forma del sol no es una esfera perfecta, sino mas ancha en el ecuador; de modo que a la ley de newton hay que añadirle una componente dipolar adicional que hará las veces de componente perturbativa f . En este caso f provoca un cambio en la dirección y el sentido del vector de Runge. Si el valor de f es lo bastante pequeño podemos ver el proceso como un giro del eje mayor de una trayectoria orbital esencialmente elíptica del planeta. El término dipolar para una órbita en un plano ecuatorial respecto al sol será una función de la forma $f(r)u_r$; donde u_r es el vector unitario en la dirección del centro solar hasta el centro del planeta. Con esto tenemos

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = f(r)\bar{u}_r \times \bar{L} + \bar{p} \times (\bar{r} \times f(r)\bar{u}_r) = f(r)\bar{u}_r \times \bar{L}$$

a partir de aquí, si suponemos que el proceso solo supone un cambio de dirección o precesión del vector de Runge y no de su módulo, la precesión ω debe cumplir

$$f(r)\bar{u}_r \times \bar{L} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{R}$$

el vector ω debe ser perpendicular al plano de la órbita de Mercurio; por otra parte, si multiplicamos la expresión anterior por \bar{R} , vector que está en el plano de la órbita, tenemos

$$\bar{R} \times (\bar{\omega} \times \bar{R}) = \bar{R} \times (f(r)\bar{u}_r \times \bar{L}) \Rightarrow \bar{\omega} R^2 = -f(r)R \cos(\phi) \bar{L} \Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{f(r)}{R} \cos(\phi) \bar{L}$$

donde el ángulo es entre el radio vector y el vector de Runge, y por tanto en un ciclo es aproximadamente igual al ángulo entre el radio vector y el eje mayor de la elipse. Note el lector que, según el signo del coseno, el valor de ω cambia de sentido. Para obtener un resultado práctico debemos hacer el promedio de la expresión anterior en una órbita de mercurio, cuyo periodo llamamos T , factorizando términos constantes tenemos

$$\langle \bar{\omega} \rangle = -\frac{\bar{L}}{R} \langle f(r) \cos(\phi) \rangle = -\frac{\bar{L}}{R} \frac{1}{T} \int_0^T f(r) \cos(\phi) dt = -\frac{\bar{L}}{R} \frac{1}{T} \int_0^T f(r) \cos(\phi) \frac{dt}{d\phi} d\phi$$

del módulo del momento angular tenemos

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt}$$

lo que nos lleva a

$$\langle \bar{\omega} \rangle = -\frac{\bar{L}}{R} \frac{m}{TL} \int_0^{2\pi} r^2 f(r) \cos(\phi) d\phi$$

para una órbita elíptica de pequeña excentricidad, próxima a una órbita circular, podemos tomar estas aproximaciones

$$r \approx r_0(1 + \varepsilon \cos(\phi)); \varepsilon \ll 1$$

$$f(r) \approx f(r_0) + \varepsilon r_0 \cos(\phi) f'(r_0)$$

lo que nos lleva a

$$\langle \bar{\omega} \rangle = -\frac{\bar{L}}{R} \frac{mr_0^2}{TL} \int_0^{2\pi} (1 + 2\varepsilon \cos(\phi) + \varepsilon^2 \cos^2(\phi)) (f(r_0) + \varepsilon r_0 \cos(\phi) f'(r_0)) \cos(\phi) d\phi$$

al expandir la expresión anterior, dado que todos los términos cuentan al menos con un factor coseno, vemos que solo aportan al promedio los términos con coseno al cuadrado

$$\langle \bar{\omega} \rangle = -\frac{\bar{L}}{R} \frac{m r_0^2 \varepsilon}{TL} \int_0^{2\pi} (2 \cos^2(\phi) f(r_0) + r_0 \cos^2(\phi) f'(r_0) + \varepsilon^2 r_0 \cos^4(\phi) f'(r_0)) d\phi$$

prescindiendo del término en épsilon al cuadrado y en módulo tenemos un promedio para la precesión de la órbita de

$$\langle \omega \rangle = \frac{m r_0^2 \varepsilon}{RT} (f(r_0) + \frac{1}{2} r_0 f'(r_0))$$

Caso de influencia del resto de los planetas

En este caso la componente perturbativa es la suma de las fuerzas newtonianas debidas al resto de los planetas. Enumerando el resto de los planetas con el subíndice i y utilizando los desarrollos previos tenemos

$$\bar{\omega} = \frac{1}{R^2} \left[\bar{R} \times \left(\sum \bar{f}_i \times \bar{L} \right) + \bar{R} \times \left[\bar{p} \times \left(\bar{r} \times \sum \bar{f}_i \right) \right] \right] = \frac{1}{R^2} \sum \bar{R} \times \left(\bar{f}_i \times \bar{L} \right) + \bar{R} \times \left[\bar{p} \times \left(\bar{r} \times \bar{f}_i \right) \right] = \sum \bar{\omega}_i$$

$$\bar{\omega}_i = \frac{1}{R^2} \left[\bar{R} \times \left(\bar{f}_i \times \bar{L} \right) + \bar{R} \times \left[\bar{p} \times \left(\bar{r} \times \bar{f}_i \right) \right] \right]$$

y por tanto podemos estudiar la influencia de cada planeta por separado y sumar las contribuciones de cada uno a la precesión de la órbita de Mercurio. Realizar este cálculo con métodos numéricos requiere utilizar un sistema de coordenadas para el sistema solar en el que se conozcan las posiciones de los planetas en ciertos instantes de tiempo discretos.

Referencias

- [1] *Espacio, tiempo, materia y vacío*. Sección 11:problemas y cuestiones; choque elástico de dos partículas. En esta misma web y por este mismo autor.
- [2] *Órbita de Hohmann* http://es.wikipedia.org/wiki/Órbita_de_transferencia_de_Hohmann
- [3] *Introducción a la dinámica celeste* <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/celeste.htm>
- [4] *Asistencia gravitacional* http://es.wikipedia.org/wiki/Asistencia_gravitacional
- [5] *Leyes de Kepler* http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kepler
- [6] *Modelo de Bohr* http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_atómico_de_Bohr
- [7] *Puntos de Lagrange* http://es.wikipedia.org/wiki/Puntos_de_Lagrange
- [8] *Cinemática del sólido rígido: Teorema de Chasles*. http://es.wikipedia.org/wiki/Cinemática_del_sólido_rígido