Título del Trabajo	Introducción a la Mecánica Analítica.
Nombre	Enrique Cantera del Río
Filiación	C/Padre Benito Menni-6-2-E 47008 Valladolid (España)
Correo electrónico	benarrob@gmail.com
Resumen	Introducción a la Mecánica Analítica para primeros cursos de carreras científico-técnicas.

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA ANALÍTICA

Enrique Cantera del Río

INTRODUCCION : PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES 2

1-LIGADURAS 3

2-VARIACIONES VIRTUALES 5

3-PLANTEAMIENTO FORMAL DEL PROBLEMA VARIACIONAL PARA LA MECANICA DE UNA PARTÍCULA 7

4-COORDENADAS GENERALIZADAS 8

5-SISTEMAS DE PARTÍCULAS Y DENSIDAD LAGRANGIANA 9

6-LAGRANGIANA Y RELATIVIDAD 12

7-NOTAS FINALES 14

Apéndice I : *Fuerzas de ligadura con trabajo no nulo* 17

Apéndice II : *Lagrangiana de una partícula en un campo Electromagnético* 21

Apéndice III : Hamiltoniano y movimiento de una partícula en un campo gravitatorio de Swartzschild. 23

Apéndice IV : *Ecuación de Binet y Relatividad General: Precesión del perihelio y curvatura de un rayo de luz* 25

Apéndice V : *El principio de Fermat.* 27

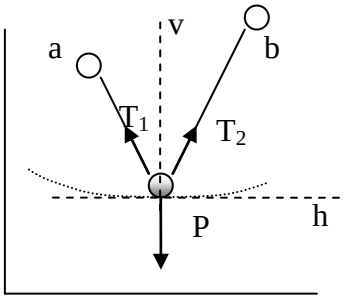
REFERENCIAS 28

INTRODUCCION : PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

En la historia de la física, uno de los primeros problemas que se abordaron fue el análisis de los sistemas en equilibrio mecánico y uno de los primeros principios fue el principio de los trabajos virtuales. Este principio es el resultado de muchas contribuciones a lo largo del tiempo. Inicialmente se aplicó en forma intuitiva a problemas de estática comenzando por *Aristóteles* (384-322 AC) y pasando por *Stevinus*(1598-1620) y *Galileo* (1564-1642). *Juan Bernoulli* (1667-1748) dio la forma mas consciente o explícita al principio, alrededor de 1717. Fue *D 'Alembert* (1717-1785) quien amplió el principio mas allá de la estática, permitiendo su uso en casos dinámicos. Un sistema mecánico está en equilibrio estático cuando las fuerzas externas y las de *ligadura* del sistema están balanceadas de tal forma que las distintas partes del sistema están en reposo. Un "instinto" natural en el estudio de estos sistemas es intentar modificar la posición de una de las partes y ver como se comporta el sistema. Según el principio de los trabajos virtuales, *cualquier pequeño desplazamiento*, *compatible con las restricciones geométricas o ligaduras* del sistema, hecho sobre una parte o el conjunto del sistema es tal que el trabajo total *hecho por las fuerzas que actúan en el sistema en equilibrio es* nulo. Si imaginamos el sistema como un conjunto de puntos afectados por fuerzas entonces el principio de los trabajos virtuales es

$$\sum_i \overline{f_i} \bullet \delta \overline{r_i} = 0$$

donde *i* numera al conjunto de partículas del sistema, *f* es la fuerza sobre cada partícula y *δr* cualquier desplazamiento de la partícula *i* compatible con las restricciones geométricas. A *δr* también se le llama desplazamiento virtual.
En el caso de equilibrio mecánico en sólidos elásticos, podemos dividir las fuerzas en *ligaduras externas* y *reacciones elásticas internas* y el principio de los trabajos virtuales dice que el trabajo de las fuerzas externas mas el trabajo de las fuerzas elásticas internas es nulo para cualquier desplazamiento virtual del sistema compatible con las restricciones geométricas. Esta alternativa del principio de los trabajos virtuales es muy utilizada en el cálculo de estructuras en ingeniería y arquitectura. Note el lector que lo que se anula es la suma de los trabajos virtuales que realiza cada fuerza en el estado de equilibrio, no el trabajo individual de cada una de ellas.



Imaginemos un sistema mecánico en equilibrio como el de la figura. La masa inferior está ensartada en una cuerda y la cuerda está atada a dos puntos fijos *(a,b)*. La masa inferior ocupa la mínima altura posible y existe un desplazamiento virtual que seguiría una trayectoria elíptica; con suma de distancias constante a los focos *(a,b)*. En el punto de equilibrio la condición de altura mínima indica que la tangente a la elipse es horizontal (*h*) y por tanto perpendicular al peso *P*. Aplicando el principio de los trabajos virtuales tenemos

$$(\overline{T_1} + \overline{T_2}) \bullet \delta \overline{r} + \overline{P} \bullet \delta \overline{r} = (\overline{T_1} + \overline{T_2}) \bullet \delta \overline{r} = 0$$

de esta expresión deducimos que las tensiones compensan sus componentes horizontales. Un desplazamiento virtual también posible es hacia arriba en la vertical y aplicado a la fórmula anterior tenemos que la suma de las componentes verticales de las tensiones es igual al peso. Por ahora tenemos las mismas conclusiones que la física está tica derivada de la 2ª ley de Newton

$$\sum \overline{F} = \overline{T_1} + \overline{T_2} + \overline{P} = 0$$

Pero el análisis de los movimientos virtuales proporciona un mejor conocimiento de las fuerzas de ligadura que las leyes de Newton. En nuestro caso la recta horizontal *h* es tangente a la trayectoria elíptica virtual de focos *a* y *b*, y la recta *v* es la perpendicular correspondiente. La elipse tiene la propiedad de que la recta *v* divide en dos partes iguales el ángulo formado por las rectas T_1 y T_2 . Si la elipse fuese un espejo, un rayo que partiese del foco *a* por la recta T_1 llegaría, una vez *reflejado* en el punto correspondiente de la elipse, al foco *b* por la recta T_2 : ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión. De este resultado deducimos inmediatamente que el módulo de las fuerzas de tensión es el mismo

$$\left|\overline{T_1}\right| = \left|\overline{T_2}\right|$$

1-LIGADURAS

Imaginamos una partícula, una bolita, moviéndose sin rozamiento y en contacto continuo con una superficie *fija* ligeramente ondulada determinada por una expresión *f(x,y,z)=0*, arbitraria en principio, a la que llamaremos ligadura. Consideramos la expresión siguiente.

$$\left(\frac{d\overline{p}}{dt} - \overline{F} - \overline{f}_L \right) \bullet d\overline{r} = 0$$

El hecho de la existencia de una restricción geométrica al movimiento de la partícula supone que debe haber cierta componente de la fuerza que siente la partícula cuyo origen es la existencia de dicha restricción geométrica o ligadura. El símbolo f_L representa la fuerza asociada a la ligadura, *F* el resto de fuerzas externas y *p=mv* la cantidad de movimiento de la bolita. En la expresión anterior, si partimos de principio con la 2ª Ley de Newton, entonces el contenido del paréntesis es nulo siempre y por tanto la igualdad se cumple trivialmente. El término *dr* corresponde a un desplazamiento de la partícula en su trayectoria en un instante de tiempo *dt*. Un simple cambio de miembro en la ecuación anterior nos da

$$\left(\frac{d\overline{p}}{dt} - \overline{F} \right) \bullet d\overline{r} = \overline{f}_L \bullet d\overline{r}$$

Recordando la fuerza normal en el contacto entre dos sólidos podemos ver intuitivamente, en este caso, que las fuerzas de ligadura serán normales a la

superficie de ligadura y por tanto el producto escalar f_L*dr se anula, ya que *dr* es un vector contenido en la ligadura *f(x,y,z)=0*. Por tanto la ecuación anterior es equivalente a esta otra

$$\bar{f}_L \bullet d\bar{r} = \left(\frac{d\bar{p}}{dt} - \bar{F} \right) \bullet d\bar{r} = 0$$

en este caso el contenido del paréntesis no es nulo en general. Pero la expresión anterior presenta cierta falta de generalidad matemática y podemos poner

$$\bar{f}_L \bullet (d\bar{r} + \delta\bar{r}) = \left(\frac{d\bar{p}}{dt} - \bar{F} \right) \bullet (d\bar{r} + \delta\bar{r}) = 0$$

donde ***δr*** es un *campo vectorial* adicional con un valor que podemos considerar tan pequeño como queramos y que verifica $\underline{f_L}*\delta r=0$, pero por lo demás arbitrario y sin relación física (causal) con el movimiento de la partícula real, de modo que la expresión queda

$$(\frac{d\bar{p}}{dt} - \bar{F}) \bullet \delta\bar{r} = \bar{f}_L \bullet \delta\bar{r} = 0 \qquad (1.1)$$

con las condiciones señaladas para ***δr.***
Vamos a considerar ahora la siguiente integral

$$\delta A = \int_{t1}^{t2} (\frac{d\bar{p}}{dt} - \bar{F}) \bullet (d\bar{r} + \delta\bar{r})\, dt - \int_{t1}^{t2} (\frac{d\bar{p}}{dt} - \bar{F}) \bullet d\bar{r}\, dt = \int_{t1}^{t2} (\frac{d\bar{p}}{dt} - \bar{F}) \bullet \delta\bar{r}\, dt = 0 \quad (2.1)$$

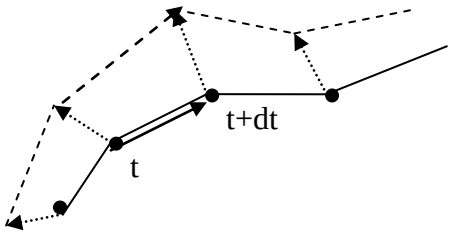
Dado un campo vectorial ***δr*** podemos en principio hacer este cálculo si conocemos el movimiento real de la partícula por medio de la aproximación de las sumas de *Riemann* para las integrales. En este caso será útil considerar un intervalo de tiempo *dt* constante en todo el intervalo temporal (t_1,t_2) para el paso al límite de las sumas de *Riemann*.

El campo ***δr*** se puede concebir realmente a partir de un campo de vectores ***η****(x,y,z,t)* cuyos vectores son perpendiculares a la fuerza de contacto $\underline{f_L}$ entre la bolita y la superficie en el punto *(x,y,z) y en el instante t*. Este campo debe también aceptar algunos procedimientos de análisis matemático, como veremos. Podemos definir ***δr*** así

$$\delta\bar{r} = dt\ \bar{\eta}(x,y,z,t) \Leftrightarrow \bar{\eta}(x,y,z,t) = \frac{\delta\bar{r}}{dt}$$

donde utilizamos el valor *dt* para conseguir un valor tan pequeño como queramos en el paso al límite de las sumas de Riemann.

2-VARIACIONES VIRTUALES



Hasta ahora solo se ha hecho un desarrollo abstracto ampliando al máximo el dominio de actuación de una expresión que es cierta en base a la 2ª Ley de Newton por medio de la introducción de un campo vectorial que verifica unas condiciones bastante amplias, de modo que es independiente del movimiento de la partícula. Veremos ahora que podemos interpretar este campo vectorial como una *variación virtual de la posición de la partícula real* a medida que esta se mueve en su trayectoria. En el dibujo vemos el campo *δr*, representado como flechas punteadas, interpretado como variación entre la posición de la partícula real y la trayectoria virtual, en línea discontinua, que se va generando. El desplazamiento sobre la trayectoria virtual(*dr**) y sobre la trayectoria real (*dr*) se relacionan así

$$\bar{dr}^{*}(t) = \bar{dr}(t) + \bar{\delta r}(t+dt) - \bar{\delta r}(t) \rightarrow$$

$$\frac{\bar{dr}^{*}(t)}{dt} = \frac{\bar{dr}(t)}{dt} + \eta(t+dt) - \eta(t) \rightarrow$$

$$\frac{\bar{dr}^{*}(t)}{dt} - \frac{\bar{dr}(t)}{dt} = \delta v = d\eta(t) = d\,\frac{\bar{\delta r}(t)}{dt} = \frac{d\,\bar{\delta r}(t)}{dt}$$

(la dependencia *η(t)* se debe a la trayectoria de la partícula: *x(t),y(t),z(t)*)
La última expresión es un incremento virtual entre la velocidad en la trayectoria real y la trayectoria virtual de la partícula, de ahí la notación *δv*. Por tanto podemos caracterizar la cinemática de la trayectoria virtual de la partícula a partir de la trayectoria real y el campo vectorial ***η****(x,y,z,t)* de esta forma

$$\bar{r}(t)^{*} = \bar{r}(t) + \bar{\delta r}(t) + \bar{r_0}; \bar{\delta r} = dt\,\bar{\eta}(x,y,z,t)$$

$$\bar{v}^{*}(t) = \bar{v}(t) + \bar{\delta v}(t)\ ;\ \bar{\delta v} = \frac{d\bar{\delta r}}{dt}$$

Si consideramos que la restricción geométrica de la ligadura se puede escribir como *f(x,y,z,t)=0*, lo cual es una ampliación al caso en que la superficie sea móvil o flexible, podemos escribir

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \bullet (dx, dy, dz) + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

de tal forma que la relación es válida para cualquier desplazamiento *(dx,dy,dz)* que verifique la ligadura en el instante *dt*. Según lo que venimos discutiendo, el desplazamiento real *dr* y el virtual *dr** deben cumplir la relación anterior:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bullet d\bar{r}+\frac{\partial f}{\partial t}dt=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bullet d\bar{r}^{*}+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0\rightarrow$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bullet(d\bar{r}^{*}-d\bar{r})=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bullet(\delta\bar{r}(t+dt)-\delta\bar{r}(t))=0$$

podemos poner el resultado anterior en términos del desplazamiento virtual de velocidad de esta forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bullet\delta\bar{v}(t)dt=0$$

Note el lector la enorme similitud de este resultado y la fórmula (1.1) para los desplazamientos virtuales y las fuerzas de ligadura[1]

$$\bar{f}_{L}\bullet\delta\bar{r}=0$$

No debe extrañarnos esto ya que el origen de las fuerzas de ligadura son las restricciones geométricas de dichas ligaduras.

Volviendo a la ecuación 2.1, si la fuerza está asociada a un campo conservativo se puede introducir una variación virtual de la energía potencial *U*:

$$\delta U=-\bar{F}\bullet\delta\bar{r}\rightarrow\delta A=\int_{t1}^{t2}\frac{d\bar{p}}{dt}\bullet\delta\bar{r}\,dt+\int_{t1}^{t2}\delta U\,dt=0$$

(en el apéndice II se matiza la utilización de la energía potencial)
La interpretación de variación virtual de la trayectoria nos va a permitir simplificar la primera integral utilizando la integración por partes

$$\int_{t1}^{t2}\frac{d\bar{p}}{dt}\bullet\delta\bar{r}\,dt=\int_{t1}^{t2}d\bar{p}\bullet\delta\bar{r}=\int_{t1}^{t2}d\bar{x}\bullet\bar{y};\quad\bar{x}=\bar{p},\ \bar{y}=\delta\bar{r};\ d(\bar{x}\bullet\bar{y})=d\bar{x}\bullet\bar{y}+\bar{x}\bullet d\bar{y}\rightarrow$$
$$\int_{t1}^{t2}d\bar{p}\bullet\delta\bar{r}=\left[\bar{p}\bullet\delta\bar{r}\right]_{1}^{2}-\int_{t1}^{t2}\bar{p}\bullet\frac{d}{dt}\delta\bar{r}\,dt$$

Si se impone al campo vectorial η que la variación virtual de posición se anule en los puntos extremos : *δr(t1)= δr(t2)=0*, el corchete se anula también. Podemos hacer esta elección ya que el vector nulo verifica, trivialmente, la condición de ortogonalidad que debe cumplir el campo vectorial *η*. Por otra parte, la derivada temporal del desplazamiento virtual corresponde con el desplazamiento virtual de velocidad, y podemos introducir inmediatamente el desplazamiento virtual del impulso mecánico *p* y de la energía cinética E_c así:

$$\int_{t1}^{t2}\bar{p}\bullet\frac{d}{dt}\delta\bar{r}\,dt=\int_{t1}^{t2}m\bar{v}\bullet\delta\bar{v}\,dt=\int_{t1}^{t2}\bar{v}\bullet\delta(m\bar{v})\,dt=\int_{t1}^{t2}\bar{v}\bullet\delta\bar{p}\,dt=\int_{t1}^{t2}\delta E_{c}\,dt\quad(2.1)$$

[1] En la referencia [10] el lector puede comprobar que la diferencia entre estas expresiones es un *multiplicador de Lagrange*.

Note el lector que el paso de la ecuación anterior en que se ha introducido la variación virtual del momento mecánico requiere que la *masa* sea una *constante* independiente de la velocidad, lo cual deja de ser cierto a altas velocidades según la relatividad. Por tanto, en el *dominio clásico no relativista* el resultado necesario es

$$\delta A = \int_{t1}^{t2} \delta U \, dt - \int_{t1}^{t2} \delta E_c dt = \int_{t1}^{t2} \delta (U - E_c) dt = \delta \int_{t1}^{t2} (U - E_c) \, dt = 0 \equiv \delta \int_{t1}^{t2} (E_c - U) \, dt = 0$$

la última relación resulta de multiplicar por -1 la expresión anterior. Este resultado tiene consecuencias matemáticas precisas que se verán en la siguiente sección y caracteriza una condición de extremo para la integral de tiempo respecto de los movimientos posibles de la partícula. En palabras de Hamilton:

"De todos los caminos posibles a lo largo de los cuales se puede mover una partícula de un punto a otro dentro de un intervalo especificado de tiempo, el camino que será recorrido es aquél que minimiza la integral de tiempo de la diferencia entre las energías cinética y potencial del sistema."

3-PLANTEAMIENTO FORMAL DEL PROBLEMA VARIACIONAL PARA LA MECANICA DE UNA PARTÍCULA

El planteamiento anterior se corresponde con un problema matemático bien definido asociado al *cálculo de variaciones*. Un ejemplo es el cálculo de geodésicas en una superficie como curvas de mínima distancia entre dos puntos.

El razonamiento de las trayectorias virtuales es aplicable también en el límite en que las fuerzas de ligadura tiendan a 0. De hecho la expresión *F-ma* se anula siempre para una partícula si *F* es la fuerza total, esté sometida a ligaduras o no. Por tanto la condición de extremo de la integral debe mantenerse en cualquier caso. En el caso de ligadura no nula *F-ma* nunca se hacía nulo, y esto hace que el campo η se eligiese de forma que verificase las ligaduras. Pero en el caso de fuerzas de ligadura nulas el campo *η(x,y,z)* es totalmente arbitrario.
En este contexto se puede plantear el problema de hallar la función $L=U-E_c$, o *Lagrangiana*, que hace extremo el valor de la integral temporal definida. Lo relevante será la dependencia funcional *L(t,r,v)*, es decir, L depende del tiempo, de la posición y de la velocidad de la partícula; como es el caso de la diferencia entre la energía potencial y la energía cinética:

$$A = \int_{t1}^{t2} L(t, \bar{r}, \bar{v}) dt$$

podemos expresar la variación de la expresión anterior al introducir un campo de desplazamientos virtuales *δr*, así: $\{r=(x_1,x_2,x_3)\}$

$$\delta A = \int_{t1}^{t2} \{L(t, \bar{r} + \delta\bar{r}, \bar{v} + \delta\bar{v}) - L(t, \bar{r}, \bar{v})\} dt$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3} \int_{t1}^{t2} \{\frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial v_i} \delta v_i\} dt$$

donde se han utilizado las derivadas parciales en los argumentos que se ven modificados (no el tiempo) ya que el campo de desplazamientos virtuales es independiente de *L.*
La segunda integral del sumatorio se puede desarrollar por partes:

$$\int_{t1}^{t2} \frac{\partial L}{\partial v_i} \delta v_i \, dt; \;\; f_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}; \;\; dg_i = \delta v_i \, dt = \frac{d}{dt}(\delta x_i) \, dt$$

$$d(f_i g_i) = g_i df_i + f_i dg_i \rightarrow$$

$$\int_{t1}^{t2} \frac{\partial L}{\partial v_i} \delta v_i \, dt = \left[\frac{\partial L}{\partial v_i} \delta x_i \right]_{t1}^{t2} - \int_{t1}^{t2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) \delta x_i \, dt$$

y resumiendo con el resultado anterior, en el caso de una variación nula

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial L}{\partial v_i} \delta x_i \right]_{t1}^{t2} + \sum_{i=1}^{3} \int_{t1}^{t2} \{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right)\} \delta x_i \, dt = 0$$

Igual que antes, asumimos que el desplazamiento virtual se anula para los extremos de integración. Por otra parte, dado que el campo de desplazamientos δr se puede elegir arbitrariamente, para que la variación anterior se anule para cualquier elección de $\delta r = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$, los factores correspondientes de la integral deben anularse siempre

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = 0; \; i = 1,2,3 \;\; (3.1)$$

Lo que resulta en 3 ecuaciones diferenciales, denominadas de Euler-Lagrange, una para cada coordenada cartesiana independiente. Para una partícula la función Lagrangiana es $L = 1/2mv^2 - U(x,y,z)$ y las expresiones anteriores conducen inmediatamente a la 2ª Ley de Newton para una partícula en un campo conservativo.

4-COORDENADAS GENERALIZADAS

En el caso de actuar una ligadura geométrica, por ejemplo *f(x,y,z)=0*, hay que expresar el Lagrangiano en *coordenadas generalizadas*. Así en principio a partir de la ecuación de la ligadura se puede eliminarla coordenada z en el Lagrangiano y quedar como una función $L(t,x,y,v_x,v_y)$; lo que daría lugar a dos ecuaciones de Euler-Lagrange en lugar de 3 como en el caso anterior. El análisis matemático anterior se puede reproducir en el caso de existir ligaduras,

pero esto requiere utilizar el mínimo número posible de variables independientes para expresar *L*, de modo que los valores δx_i del integrando puedan tomar valores arbitrarios. El caso equivale a la búsqueda de un *extremo condicionado por ligaduras* sobre la integral temporal definida asociada al Lagrangiano. Lo importante es que el Lagrangiano esté expresado con la *mínima cantidad de variables independientes*. El desarrollo hecho, basado en el principio de D´Alembert para las fuerzas de ligadura de un sistema mecánico, parece eliminar dichas fuerzas según la expresión (1.1) (o la 5.1 mas adelante). Sin embargo *re-codificamos la información correspondiente a las fuerzas de ligadura* si expresamos el Lagrangiano en función de las coordenadas independientes del sistema. Es decir, si incluimos en el Lagrangiano las restricciones del tipo *f(x,y,z,t)=0* correspondientes. Esto supondrá una reducción en el número de variables utilizadas en el Lagrangiano. Las variables resultantes pueden ser coordenadas cartesianas, polares, ángulos, distancias…cualquier conjunto de *coordenadas independientes* verificará las ecuaciones de Euler-Lagrange. Veamos una demostración sencilla de esto para el caso de $L(t,x_1,x_2,x_1',x_2')$; las variables primadas representan derivadas respecto del tiempo. Suponemos que tenemos dos conjuntos de variables independientes posibles (x_1, x_2) y (q_1, q_2) para especificar el estado del sistema y sus relaciones de transformación correspondientes (las variables primadas son derivadas temporales)

$$x_1 = x_1(q_1,q_2) \rightarrow \frac{dx_1}{dt} = x_1' = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} q_2'; \quad \frac{dq_{1,2}}{dt} = q'_{1,2}$$

$$x_2 = x_2(q_1,q_2) \rightarrow \frac{dx_2}{dt} = x_2' = \frac{\partial x_2}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} q_2'; \quad \frac{dq_{1,2}}{dt} = q'_{1,2}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_1} = \frac{\partial x_1'}{\partial q_1'} \; ; \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = \frac{\partial x_2'}{\partial q_1'}$$

Supuesto que las ecuaciones de *Euler-Lagrange* se cumplen para las coordenadas (x_1, x_2), veremos que también se cumplen para (q_1, q_2)

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_1} + \frac{\partial L}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1'} = \frac{\partial L}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial q_1'} + \frac{\partial L}{\partial x_2'}\frac{\partial x_2'}{\partial q_1'}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_1'}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial x_2}{\partial q_1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_2'}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2}\right] = 0$$

Por tanto el Lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden expresar con la misma forma matemática en cualquier sistema de coordenadas independientes. Note el lector que este es un requisito para cualquier Ley Física en la Teoría General de la Relatividad.

5-SISTEMAS DE PARTÍCULAS Y DENSIDAD LAGRANGIANA

El desarrollo hecho hasta ahora solamente considera una partícula en un campo conservativo. Podemos ampliar el desarrollo para el caso de un sistema de partículas de esta forma

$$\sum_i \left(\overline{F}_i^{ext} + \overline{F}_i^{\text{int}} - \frac{d\,\overline{p}_i}{dt} \right) \bullet \delta\overline{r}_i = \sum_i \overline{f_{Li}} \bullet \delta\overline{r}_i = 0 \quad (5.1)$$

donde el índice *i* numera las partículas del sistema. En este caso hay tres tipos de fuerzas : las fuerzas externas al sistema, las fuerzas internas al sistema y las fuerzas de ligadura del sistema. En la expresión anterior, las fuerzas de ligadura f_{Li} son las componentes de las fuerzas externas e internas asociadas a restricciones geométricas; y las fuerzas F_i externas e internas excluyen las citadas fuerzas de ligadura. Note el lector la gran similitud entre (5.1) y el principio de los trabajos virtuales que se expuso en la introducción. En base a la similitud entre el principio de los trabajos virtuales para un sistema en equilibrio y el trabajo de las fuerzas de ligadura en un sistema dinámico, el *principio de D´Alembert* postula que el *conjunto de fuerzas de ligadura* en un sistema dinámico se comporta análogamente al conjunto de fuerzas de un sistema mecánico en equilibrio. Esto supone ampliar el ejemplo que venimos manejando, ya que implica que puede haber fuerzas de ligadura individuales que si hagan algún trabajo en determinados desplazamientos virtuales, pero este debe ser compensado por el resto de los trabajos virtuales. El *Apéndice I* analiza un caso de este tipo.

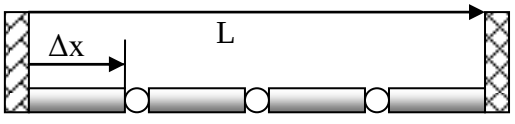
Vamos a ver el efecto de las fuerzas internas en dos casos especiales.

1-Fuerzas internas en un sólido rígido: En este caso las fuerzas internas no realizan ningún trabajo, como puede verse en "*cinemática y dinámica del sólido rígido*"[11]. De hecho las fuerzas internas de un sólido rígido corresponden a la ligadura geométrica que define al sólido rígido : las distancias entre dos puntos del sólido deben mantenerse constantes en cualquier situación dinámica. Por tanto en la expresión 5.1 podemos pasar las fuerzas internas al lado derecho, con las fuerzas de ligadura y llegamos fácilmente a la siguiente Lagrangiana

$$\delta A = \delta \int_{t1}^{t2} (\sum_i E_{ci} - U_i^{ext})\, dt = 0 \Rightarrow L = \sum_i E_{ci} - U_i^{ext}$$

donde U^{ext} es la energía potencial correspondiente al supuesto campo conservativo asociado a las fuerzas externas; típicamente el campo gravitatorio.

2-Fuerzas internas en un sólido elástico contínuo: En este caso la distancia entre dos puntos del sólido elástico no se mantiene constante en general y podemos asociar una energía potencial elástica U^{int} a las fuerzas elásticas internas. Por medio de un ejemplo, veremos que la Lagrangiana de un sistema de partículas se puede ampliar



al caso de *sistemas continuos*. En la sección de problemas de *Espacio, tiempo, materia y vacío* [1] se presentó un análisis del movimiento ondulatorio de un sólido elástico. Podemos intentar plantear la Lagrangiana de un sólido elástico haciendo un paso al límite a partir de la Lagrangiana de sistemas discretos como el presentado en el dibujo formado por masas puntuales y bandas elásticas consideradas sin masa. La imagen representa un conjunto de bandas elásticas separadas por masas esféricas *m*. Partimos del sistema en reposo con las masas equi-espaciadas una distancia Δx, como muestra la imagen. Posteriormente se estiran las bandas hacia un lado y se deja libre el sistema. Denominando $\xi(x_i,t)$ al campo (real) de desplazamientos de las masas respecto de la posición x_i en que la masa estaba en reposo inicialmente, la Lagrangiana del sistema de *n* partículas es

$$L = \sum_i E_{ci} - U_i^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} k \left(\xi_i - \xi_{i-1} \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\xi_{n+1} \right)^2$$

la suma de la masa de las partículas debe corresponder a la masa total del sistema: M , y cada segmento de banda tiene una constante elástica *k* que ya apareció en [1]

$$k = \frac{YS}{\Delta x}; \; m = \frac{M}{nS\Delta x} S\Delta x = \rho S \Delta x = \rho dv$$

donde ρ representa la densidad de masa por unidad de volumen y *S* la superficie transversal de la banda elástica. Sustituyendo estos valores :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{\Delta x} \right)^2 \right] S\Delta x + \frac{1}{2} k \left(\xi_n \right)^2$$

y en el límite cuando *n* tiende a infinito:

$$L = \int \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] dv$$

con lo que la condición de extremo de la integral de acción es

$$\delta A = \delta \int_{t1}^{t2} dt \int_0^v dv \; \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] = 0$$

La expresión del integrando recibe el nombre de *Densidad Lagrangiana, simbolizada por* ℓ ,y para obtener las ecuaciones diferenciales de la función que hace extrema la integral anterior debemos aplicar de nuevo el método de variaciones. En este caso el problema es hallar el extremo de esta función integral

$$A = \int_{t1}^{t2} dt \int_0^v dx dy dz \; \ell(\xi, \partial_t \xi, \partial_x \xi)$$

donde los símbolos ∂_t , ∂_x representan las derivadas parciales correspondientes de la función a la que se aplican. La modificación de *A* asociada a una variación virtual arbitraria ***δξ(x,y,z,t)*** será

$$\delta A = \int_{t1}^{t2} dt \int_0^v dx dy dz \left[\ell(\xi + \delta\xi, \partial_t\xi + \partial_t\delta\xi, \partial_x\xi + \partial_x\delta\xi) - \ell(t, \xi, \partial_t\xi, \partial_x\xi) \right] =$$

$$\int_{t1}^{t2} dt \int_0^v dx dy dz \left[\frac{\partial \ell}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial \ell}{\partial(\partial_t\xi)}\delta(\partial_t\xi) + \frac{\partial \ell}{\partial(\partial_x\xi)}\delta(\partial_x\xi) \right]$$

Para factorizar todo el integrando con ***δξ*** integramos por partes los términos que dependen de las derivadas de ***δξ***. Análogamente al caso de una partícula se puede conmutar ***δ*** en las derivadas $\delta(\partial_x\xi) = \partial_x\delta\xi$:

$$\int_0^L dx \frac{\partial \ell}{\partial(\partial_x\xi)}\partial_x\delta\xi = \left[\frac{\partial \ell}{\partial(\partial_x\xi)}\delta\xi \right]_0^L - \int_0^L dx\, \partial_x\left(\frac{\partial \ell}{\partial(\partial_x\xi)} \right)\delta\xi$$

$$\int_{t1}^{t2} dt \frac{\partial \ell}{\partial(\partial_t\xi)}\partial_t\delta\xi = \left[\frac{\partial \ell}{\partial(\partial_t\xi)}\delta\xi \right]_{t1}^{t2} - \int_{t1}^{t2} dt\, \partial_t\left(\frac{\partial \ell}{\partial(\partial_t\xi)} \right)\delta\xi$$

Con las condiciones habituales de anulación del desplazamiento virtual en los extremos del dominio de integración, la variación de la integral queda

$$\delta A = \int_{t1}^{t2} dt \int_0^v dx dy dz \left[-\partial_t\left(\frac{\partial \ell}{\partial(\partial_t\xi)} \right) - \partial_x\left(\frac{\partial \ell}{\partial(\partial_x\xi)} \right) + \frac{\partial \ell}{\partial \xi} \right]\delta\xi = 0$$

Que conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange en la siguiente forma:

$$-\partial_t\left(\frac{\partial \ell}{\partial(\partial_t\xi)} \right) - \partial_x\left(\frac{\partial \ell}{\partial(\partial_x\xi)} \right) + \frac{\partial \ell}{\partial \xi} = 0$$

para el caso de nuestro problema con densidad Lagrangiana

$$\ell = \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - Y\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

produce como resultado la ecuación de ondas, una vez aplicadas las ecuaciones de Euler-Lagrange.

6-LAGRANGIANA Y RELATIVIDAD

En la ecuación (2.1) de la sección variaciones virtuales, se ha utilizado para el momento mecánico la expresión clásica *p=mv*, tomando *m* como una constante. Como ya se señaló, en la teoría especial de la relatividad el impulso mecánico de una partícula es

$$\bar{p} = \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

podemos desarrollar (2.1) con esta expresión

$$\int_{t1}^{t2} \bar{p} \bullet \frac{d}{dt}\delta\bar{r}\, dt = \int_{t1}^{t2} \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \bullet \delta\bar{v}\, dt = \int_{t1}^{t2} \delta(L_0 - mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})\, dt$$

El valor L_0 es una constante por determinar. En suma, el valor de la Lagrangiana sería

$$L = L_0 - mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - U$$

Si queremos que esta función coincida con el caso clásico (Energía cinética menos Energía potencial) para bajas velocidades $v<<c$, entonces es fácil comprobar que el valor de la constante debe ser $L_0 = mc^2$. Sin embargo la constante L_0 en realidad no aporta mucho, ya que las condiciones de extremo dependen de las derivadas de la Lagrangiana. Podemos también tomar $L_0 = 0$ y considerar que la Lagrangiana clásica es

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - U$$

Si se aplican las condiciones de extremo a la Lagrangiana relativista encontramos inmediatamente la Ley de Newton para una partícula relativista en un campo conservativo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \bar{\nabla}U$$

La derivada en el tiempo del impulso mecánico es igual al gradiente de la energía potencial.

Una situación muy interesante ocurre en el caso de una partícula libre no sometida a ninguna fuerza externa. En este caso la condición de extremo para la integral en el tiempo de la Lagrangiana es esta

$$\delta\int_{t1}^{t2} L\, dt = -mc^2\,\delta\int_{t1}^{t2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt = -mc\,\delta\int_{t1}^{t2}\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = -mc\,\delta\int_{t1}^{t2} dl \quad = 0$$

es decir, la condición de extremo de la integral equivale a la condición de distancia mínima o máxima entre dos puntos en el espacio de *Minkowsky*. Es importante notar también que en este caso la integral temporal de la Lagrangiana es un valor *invariante entre sistemas de coordenadas inerciales*,

ya que el elemento de línea en el espacio de *Minkowsky* también lo es. Mas aún, según la relatividad general el elemento de línea es invariante respecto de cualquier sistema de coordenadas, sea inercial o no. Por tanto la anterior integral temporal de la Lagrangiana también se puede aplicar al caso de una partícula que se mueve en un campo gravitatorio descrito según la Relatividad General. Recuerde el lector que, en el contexto de la relatividad general, la gravedad no es una fuerza sino una modificación de la geometría del espacio-tiempo provocada por las masas que crean el campo gravitatorio. En el trabajo *Espacio, tiempo, materia y vacío[1]* se hizo una introducción a la métrica de *Schwartzschild* y se obtuvo el elemento de línea, en coordenadas esféricas, para una campo gravitatorio estacionario y con simetría esférica:

$$dl^2 = c^2(dt)^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)-\frac{(dr)^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}}-(rd\phi)^2-(r\,sen(\phi)\,d\theta)^2$$

La Lagrangiana correspondiente en este caso es

$$L=-mc\frac{dl}{dt}=-mc\sqrt{c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)-\frac{(d\,r/dt)^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}}-(rd\phi/dt)^2-(r\,sen(\phi)\,d\theta/dt)^2}$$

para el caso del movimiento de un planeta podemos suponerlo plano y tomar el ángulo de latitud constante $\Phi=\pi/2$ y su velocidad de cambio $d\Phi/dt=0$. Es decir, el plano de la órbita será el plano ecuatorial (x-y) en coordenadas esféricas, con lo que simplificamos a coordenadas polares planas:

$$L=-mc\sqrt{c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)-\frac{(d\,r/dt)^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}}-(r\;d\theta/dt)^2}$$

Una vez aplicadas las ecuaciones de Euler-Lagrange a esta expresión se pueden obtener las ecuaciones del movimiento de un planeta según la relatividad general y asignar una medida a efectos medidos experimentalmente tales como la desviación de un rayo de luz al pasar cerca del sol y la precesión del perihelio de Mercurio. El Apéndice II presenta el resultado de las ecuaciones de Euler-Lagrange en este caso.

El lector puede comprobar que, según las fórmulas para el impulso mecánico y la energía de la relatividad especial, el Lagrangiano de una partícula también se puede poner de este modo

$$L=\bar{p}\bullet\bar{v}-E$$

7-NOTAS FINALES

En la introducción el sistema mecánico en equilibrio se caracteriza por que la masa está en el lugar mas bajo posible. Esta idea no es circunstancial y puede ser deducida de un planteamiento general que incluye el principio de los trabajos virtuales.
En un planteamiento general, podemos considerar un sistema mecánico formado por elementos rígidos unidos por fuerzas de contacto y afectados por la gravedad. Podemos suponer que estas fuerzas de contacto siguen la 3ª Ley de Newton : las fuerzas de contacto aparecen por *pares de acción-reacción* iguales y en sentido opuesto. Con esta descripción, tenemos que cualquier movimiento virtual en el sistema va a ser tal que el trabajo asociado a las fuerzas de contacto va a ser nulo. El contacto se puede asimilar a un punto y el desplazamiento virtual de este punto supone el desplazamiento de las fuerzas de contacto. El trabajo virtual correspondiente se anulan por ser fuerzas de acción-reacción iguales y opuestas. Por tanto el resultado neto de los trabajos virtuales corresponde con el asociado a la gravedad. Como sabemos el trabajo asociado con la gravedad corresponde a la modificación de la energía potencial del sistema y por tanto tenemos

$$\sum_i \overline{f_i} \bullet \delta \overline{r_i} = \delta(Mgh_{cm}) = Mg\,\delta h_{cm} = 0$$

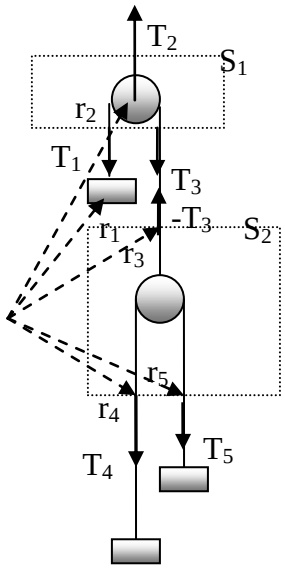
donde M es la masa del sistema, g la intensidad de la gravedad y h_{cm} es la altura del centro de masas del sistema. Según este resultado, el equilibrio de un sistema formado por elementos rígidos y afectado por la gravedad y fuerzas de contacto viene caracterizado por un valor extremo de la altura del centro de masas. Normalmente este extremo corresponde a un mínimo en la altura del centro de masas y por tanto un mínimo en la energía potencial.

Imagine el lector el sistema físico utilizado en la introducción, formada por una bolita con masa ensartada en una cuerda sin masa. Si partimos de una situación inicial estable en que mantenemos la bolita en una posición elevada y la soltamos a su suerte; llegará el momento en que el sistema llegue a un estado estable. En el proceso habrá una pérdida de energía que podemos medir por el cambio de energía potencial de la bolita ΔE_p; ya que consideramos la cuerda sin masa. El primer principio de la termodinámica nos dice que la energía debe conservarse y que la energía mecánica aparentemente perdida se ha transformado en calor : $\Delta Q = -\Delta E_p$; otra forma de energía. Además el segundo principio de la termodinámica nos dice que el cambio de estado ha sido tal que maximiza la creación de entropía ΔS en las condiciones dadas por la ligadura de una cuerda de longitud constante : $\Delta S = \Delta Q/T$, siendo T la temperatura del sistema. Por tanto el estado final del sistema corresponde al de menor energía potencial posible compatible con las ligaduras; de acuerdo con la discusión previa. En el caso de que nuestro sistema sea una cuerda con masa y longitud fija podemos ver que se aplica el mismo principio y el estado final de la cuerda será aquel que presenta un mínimo de la energía potencial.

Apéndice I **: *Fuerzas de ligadura con trabajo no nulo***

El dibujo representa un sistema mecánico en movimiento formado por dos poleas, dos cuerdas y tres masas. La polea superior es fija y *T2* es la fuerza correspondiente del eje de dicha polea. Habitualmente este problema se trata en cursos básicos de física y se indica que se consideran las poleas y las cuerdas "sin masa". En este sentido el problema se abordó en la sección de problemas de [1]. Ahora queremos plantear el problema utilizando el principio de *D´Alembert*, de modo que consideraremos que las fuerzas de ligadura del sistema forman un conjunto de vectores equilibrado al cual se puede aplicar el principio de los trabajos virtuales y las leyes conocidas del equilibrio de fuerzas. En nuestro caso las fuerzas de ligadura son las tensiones de las cuerdas y veremos estas tensiones realizan trabajos individuales no nulos, pero la suma de estos trabajos debe considerarse nula según el principio de D´Alembert.

En primer lugar las restricciones geométricas del movimiento del sistema son estas:



1-Polea superior fija

$$d\bar{r}_2 = 0$$

2-Cuerda superior de longitud constante

$$d\left(\bar{r}_1 - \bar{r}_2\right) = -d\left(\bar{r}_3 - \bar{r}_2\right)$$

3-Cuerda inferior de longitud constante

$$-d\left(\bar{r}_4 - \bar{r}_3\right) = d\left(\bar{r}_5 - \bar{r}_3\right)$$

El principio de los trabajos virtuales requiere considerar todas las partículas del sistema y las fuerzas que actúan sobre ellas. En este caso podemos reducir el número de puntos considerando solo los puntos de intersección de las cuerdas con los límites de los dos subsistemas *S1* y *S2*. En estos subsistemas se verifican equilibrios parciales de las fuerzas de ligadura

$$S_1: \quad \bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{T}_3 = 0$$
$$S_2: \quad -\bar{T}_3 + \bar{T}_4 + \bar{T}_5 = 0$$

Para estos dos subsistemas en equilibrio podemos aplicar el principio de los trabajos virtuales

$$S_1: \bar{T}_1 \bullet d\bar{r}_1 + \bar{T}_2 \bullet d\bar{r}_2 + \bar{T}_3 \bullet d\bar{r}_3 = 0$$
$$S_2: -\bar{T}_3 \bullet d\bar{r}_3 + \bar{T}_4 \bullet d\bar{r}_4 + \bar{T}_5 \bullet d\bar{r}_5 = 0$$

eliminando T_2 de S_1 y T_3 de S_2 y aplicando las restricciones geométricas tenemos

$$S_1: \left(\bar{T}_1 - \bar{T}_3\right) \bullet d\bar{r}_1 = 0 \Rightarrow \bar{T}_1 = \bar{T}_3$$
$$S_2: \left(\bar{T}_4 - \bar{T}_5\right) \bullet \left(d\bar{r}_4 - d\bar{r}_3\right) = 0 \Rightarrow \bar{T}_4 = \bar{T}_5$$

Con estos resultados podemos aplicar la 2ª Ley de Newton al sistema y obtener este sistema de ecuaciones

$$a_5 + a_1 = -(a_4 + a_1); \quad T_4 = T_5;$$
$$T_1 = 2T_4; \qquad T_1 - m_1 g = m_1 a_1;$$
$$T_4 - m_4 g = m_4 a_4; \qquad T_5 - m_5 g = m_5 a_5;$$

6 ecuaciones y 6 incógnitas que resuelven el problema. Note el lector que la condición de equilibrio de las fuerzas de ligadura del principio de D´Alembert también permite escribir el equilibrio de momentos para los subsistemas

$$S_1 : \bar{r}_1 \times \overline{T_1} + \bar{r}_2 \times \overline{T_2} + \bar{r}_3 \times \overline{T_3} = 0$$
$$S_2 : -\bar{r}_3 \times \overline{T_3} + \bar{r}_4 \times \overline{T_4} + \bar{r}_5 \times \overline{T_5} = 0$$

y esto debe ser compatible con las conclusiones anteriores. Acto seguido planteamos el Lagrangiano del sistema para resolver el problema según la mecánica analítica

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_4 v_4^2 + m_5 v_5^2\right) - \left(mgh_1 + mgh_4 + mgh_5\right)$$

de las restricciones geométricas, expresadas en términos de velocidades y alturas, tenemos, en una dimensión:

$$v_4 + v_5 + 2v_1 = 0$$
$$h_4 + h_5 + 2h_1 = h_0$$

donde h_0 es una constante. Eliminando v_1 y h_1 en el Lagrangiano tenemos

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 \frac{v_4^2 + v_5^2}{4} + m_1 \frac{v_4 v_5}{2} + m_4 v_4^2 + m_5 v_5^2 \right) - \left(m_1 g(\frac{h_0 - h_4 - h_5}{2}) + m_4 g h_4 + m_5 g h_5 \right)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_4}\right) - \frac{\partial L}{\partial h_4} = a_4(\frac{m_1}{4} + m_4) + a_5(\frac{m_1}{4}) = \left(\frac{m_1}{2} - m_4\right) g = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_5}\right) - \frac{\partial L}{\partial h_5} = a_5(\frac{m_1}{4} + m_5) + a_4(\frac{m_1}{4}) = \left(\frac{m_1}{2} - m_5\right) g = 0$$

El lector puede comprobar que el sistema de ecuaciones obtenido anteriormente por medio del principio de *D´Alembert* conduce a este mismo resultado. En este ejemplo vemos las ecuaciones de *Euler-Lagrange* aplicadas a un caso en que las fuerzas de ligadura producen un trabajo no nulo individualmente, aunque nulo en conjunto. La justificación física de las condiciones de equilibrio aplicadas a los dos subsistemas es que se consideran las cuerdas y poleas de dichos subsistemas *sin masa*; de lo contrario habría que considerar su aceleración según la 2ª Ley de Newton. Al utilizar formalmente el Lagrangiano que hemos utilizado, hemos modelado

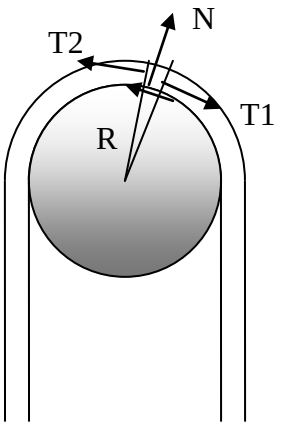
implícitamente las fuerzas internas (tensiones) del sistema como fuerzas de ligadura; es decir, fuerzas asociadas por completo a las restricciones geométricas. De lo contrario, las energías cinéticas y potenciales de cuerdas y poleas deberían aparecer en un Lagrangiano asociado a un sistema continuo.

El planteamiento de la mecánica analítica presentado depende de la veracidad del principio de D´Alembert para el problema concreto que se aborde, principio que podemos expresar por la expresión

$$\sum_i \overline{f_{Li}} \bullet \delta \overline{r_i} = 0 \qquad (A1)$$

para las fuerzas de ligadura en el sistema. Hasta ahora hemos visto varias formas en que se pueden verificar la expresión anterior:

1-Que las fuerzas de ligadura sean perpendiculares a las restricciones geométricas, como en el caso de la bolita que se mueve sobre la superficie.
2-Que realmente no existan fuerzas de ligadura ($f_{Li}=0$)
3-Que el trabajo virtual hecho por las fuerzas de ligadura en una parte del sistema se compense con el hecho en otra parte del sistema y el balance total sea nulo.



Podemos ver mas casos. La figura adjunta representa una cuerda sobre una polea que puede girar respecto de su eje; eje que está en reposo durante el giro de dicha polea. Si la polea gira de forma acelerada, la aplicación del principio del momento angular al sistema obliga a considerar una variación de la tensión en la cuerda que está en contacto con la polea. Hemos seleccionado un elemento de cuerda mediante un pequeño ángulo trazado desde el eje de la polea. Vamos a considerar las fuerzas sobre los elementos de cuerda como fuerzas de ligadura, de este modo tenemos $\overline{f_{Li}} = \overline{T}_1 + \overline{T}_2 + \overline{N} + \overline{R}$ en este caso N es la fuerza de contacto normal entre el elemento de cuerda y la superficie de la polea y R es la fuerza de rozamiento entre la cuerda y la superficie de la polea. Si queremos aplicar la mecánica analítica a este sistema nuestro problema es ver en que condiciones se puede verificar la ecuación A1. Si consideramos que el rozamiento actúa perfectamente, sin deslizamiento entre la cuerda y la polea, podemos suponer una cuerda de masa despreciable y tomar el balance de fuerzas $f_{Li}=0$, lo cual nos lleva a *A1* inmediatamente. Si por otra parte fuese *R=0* y la polea fuese *fija*, entonces f_{Li} se anula también con la condición de masa despreciable de la cuerda y módulo de la tensión constante a lo largo de la cuerda. Sin embargo en el caso en que *R* no sea nula y haya *deslizamiento relativo* entre la cuerda y la superficie de la polea, si estos objetos no van a la misma velocidad, entonces *la cuerda no transfiere completamente la energía a la polea* y hay una pérdida de energía por frotamiento en forma de calor. En este caso *A1* no será nula y el principio de D´Alembert, y la mecánica analítica, no es directamente aplicable. Sin embargo la disipación de energía en forma de calor afecta poco a los principios de conservación de impulso mecánico y momento angular, que todavía siguen siendo una buena aproximación en problemas sencillos. El problema clásico de la bola y la cadena (abordado en la secc. problemas de [1]) está en este caso.

Apéndice II* : *Lagrangiana de una partícula en un campo electromagnético.

En el desarrollo hecho, se ha considerado que la partícula está afectada por fuerzas conservativas de modo que la Lagrangiana depende de la energía potencial correspondiente. Sin embargo esto puede ser una restricción innecesaria y podemos plantear el problema para un caso general. En este caso la expresión

$$\delta U = -\bar{F} \bullet \delta \bar{r}$$

sigue siendo válida, pero ya no interpretamos que U sea una función que depende de las coordenadas de posición *U(x,y,x)*, sino que en general dependerá también del *tiempo* y la v*elocidad de la partícula* : $U(x,y,z,v_x,v_y,v_z,t)$. De esta manera, siguiendo el mismo desarrollo, obtenemos la misma Lagrangiana y las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange, pero ahora hay que considerar las derivadas de *U* respecto de la velocidad y el tiempo. En este caso, la fuerza correspondiente *F* está relacionada con la función *U* mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange de esta forma

$$L = T - U$$

$$F_{xi} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right);\ i = 1,2,3$$

En el caso de una partícula sometida a un campo electromagnético externo, la fuerza correspondiente es la fuerza de Lorentz; despreciando la emisión de radiación por aceleración de la partícula

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

Los campos eléctrico *E* y magnético *B* del campo externo están relacionados con los potenciales eléctrico φ y magnético *A* por las relaciones

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}\varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\ ;\ \bar{B} = -\bar{\nabla} \times \bar{A}$$

$$\bar{\nabla} \bullet \bar{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

La última ecuación corresponde a la condición gauge de Lorentz. Sustituyendo las dos primeras ecuaciones anteriores en la fuerza de Lorentz tenemos

$$\bar{F} = q\left(-\bar{\nabla}\varphi - \left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{A})\right]\right)$$

aplicando las siguientes relaciones válidas matemáticamente[2]

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + (\bar{v} \bullet \bar{\nabla})\bar{A}\ \ ;\ \ \bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{A}) = \bar{\nabla}(\bar{v} \bullet \bar{A}) - (\bar{v} \bullet \bar{\nabla})\bar{A}\ \ \Rightarrow\ \ \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{A}) = \frac{d\bar{A}}{dt} - \bar{\nabla}(\bar{v} \bullet \bar{A})$$

[2] como se demuestra en el trabajo *introducción a la mecánica de fluidos*

podemos eliminar el corchete anterior asociado al vector A y la fuerza de Lorentz queda así

$$\overline{F} = q\left(-\overline{\nabla}\left(\varphi - \bar{v}\bullet\overline{A}\right) - \frac{d\overline{A}}{dt}\right)$$

y, dado que ni el potencial escalar φ ni el vectorial A asociados al campo externo dependen de la velocidad de la partícula, podemos asignar la función U como

$$F_{xi} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right) \rightarrow U = q(\varphi - \bar{v}\bullet\overline{A})$$

por tanto la Lagrangiana correspondiente, en el caso relativista será

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - q(\varphi - \bar{v}\bullet\overline{A})$$

y tomando la expresión equivalente para el Lagrangiano de una partícula libre en relatividad tenemos

$$L = \overline{p}\bullet\bar{v} - E - q(\varphi - \bar{v}\bullet\overline{A}) = (\overline{p} + q\overline{A})\bullet\bar{v} - (E + q\varphi)$$

es evidente que el potencial escalar y el vectorial aparece de forma simétrica a la energía y el impulso mecánico en el Lagrangiano. Si suponemos que la expresión de la acción : Ldt se mantiene invariante entre sistemas de coordenadas inerciales, entonces los potenciales electromagnéticos se deben transformar entre dos sistemas de coordenadas inerciales de la misma forma que lo hacen la energía y el impulso mecánico. Si el cuadrivector energía-impulso en el espacio de Minkowsky es (p_x,p_y,p_z,E/c), entonces el cuadrivector potencial electromagnético será (A_x,A_y,A_z,φ/c). El lector puede comprobar el carácter invariante entre sistemas inerciales del elemento de acción

$$Ldt = \left(\overline{p}\bullet\bar{v} - E\right)dt = \overline{p}\bullet d\bar{r} - Edt$$

aplicando las fórmulas de transformación para los vectores espacio-tiempo e impulso-energía [1]. El teorema de Noether se basa en el carácter invariante de la integral de acción respecto de transformaciones de coordenadas.

Apéndice III* : *Hamiltoniano y movimiento de una partícula en un campo gravitatorio de Swartzschild.

La *transformación de Legendre* es un procedimiento matemático que genera una función a partir de otra dada. La características de esta transformación es que, si la función original depende de unos parámetros : f(q1,q2,…), la función transformada depende de las derivadas correspondientes de la función original

$$f(q_1,q_2) \rightarrow F(\frac{\partial f}{\partial q_1},\frac{\partial f}{\partial q_2})$$

En principio, con las condiciones matemáticas adecuadas, la nueva función mantiene la misma información que la original y puede resultar mas útil en algunos casos.

Podemos aplicar esto a la Lagrangiana introduciendo la nueva función *H* que será la transformación de Legendre de la Lagrangiana, pero solo respecto de las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas; matemáticamente:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i'} = p_i$$

$$H(q_i,p_i) = \left[\sum_i q_i p_i\right] - L(t,q_i,q_i')$$

Podemos demostrar que la función derivada en el tiempo de la función H , o *Hamiltoniano*, se mantiene constante para el caso de una partícula en un campo conservativo. Por simplicidad tomamos el caso de una sola coordenada generalizada: i=1

$$H(q,p) = q'p - L(t,q,q')$$

$$\frac{dH}{dt} = q''p + q'p' - \frac{\partial L}{\partial q}q' - \frac{\partial L}{\partial q'}q'' - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

donde se ha aplicado la definición de *p* y las ecuaciones de Euler-Lagrange para la coordenada *q*. La demostración se puede hacer para cualquier número de coordenadas. Para el caso en que el Lagrangiano no dependa explícitamente del tiempo la derivada parcial correspondiente se anula y el resultado es que la función *H* no varia con el tiempo. Si el sistema que estudiamos está aislado en términos energéticos, la constante *H* coincide con la energía del sistema. Podemos aplicar esto al caso de la Lagrangiana relativista

$$L = L(r,r',\theta') = -mc\sqrt{c^2(1-\frac{2GM}{rc^2}) - \frac{(r')^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} - (r\,\theta')^2}$$

Esta función tiene dos características: no depende explícitamente ni del tiempo ni de la coordenada angular θ.

La ecuación Euler-Lagrange correspondiente a la no dependencia con *θ* es

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \theta'} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta'} = mc\frac{r^2\theta'}{\sqrt{c^2(1-\frac{2GM}{rc^2}) - \frac{(r')^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} - (r\,\theta')^2}} = A$$

Como el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo tenemos

$$H = r'\frac{\partial L}{\partial r'} + \theta'\frac{\partial L}{\partial \theta'} - L(r, r', \theta') \rightarrow$$

$$H = mc\left[\frac{\frac{(r')^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}}}{\sqrt{c^2(1-\frac{2GM}{rc^2}) - \frac{(r')^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} - (r\,\theta')^2}} + \frac{r^2(\theta')^2}{\sqrt{c^2(1-\frac{2GM}{rc^2}) - \frac{(r')^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} - (r\,\theta')^2}} + \sqrt{c^2(1-\frac{2GM}{rc^2}) - \frac{(r')^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} - (r\,\theta')^2}\right]$$

$$H = \frac{mc^3(1-\frac{2GM}{rc^2})}{\sqrt{c^2(1-\frac{2GM}{rc^2}) - \frac{(r')^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} - (r\,\theta')^2}}$$

La constante *A* es corresponde al momento angular y la constante *H* corresponde con la energía; valores que han de ser constantes en un sistema aislado. Podemos hacer una aproximación al caso clásico con las condiciones de velocidades mucho menores que la velocidad de la luz *c* y radio *r* muy superior al radio de Scwartzschild $2GM/c^2$:

$$A = mr^2\theta'\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}}\right)(1+\frac{v^2}{2c^2}+...) \approx mr^2\theta'\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{GM}{rc^2}+...\right)$$

$$H = mc^2\left(\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}\right)(1+\frac{v^2}{2c^2}+...) \approx mc^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 + ...$$

Apéndice IV* : *Ecuación de Binet y Relatividad General: Precesión del perihelio y curvatura de un rayo de luz.

Precesión del perihelio de Mercurio

Con los resultados del Apéndice anterior, podemos encontrar la versión relativista de la ecuación de *Binet* que se vio en [2]. Empezamos por hacer la división *A/H*, despejar *dt* del resultado y eliminar *dt* en la ecuación de *H*. Con la sustitución *u=1/r* y una derivación adicional se llega a una ecuación similar a la de *Binet* pero con un término adicional que la hace *no lineal*

$$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)+u(1-\frac{3GM}{c^2}u)=\frac{GMm^2}{L^2}\ ;\ L\equiv A\ es\ el\ momento angular$$

Es fácil encontrar soluciones en forma de órbitas circulares anulando la derivada segunda. Estas soluciones circulares solo son posibles para $r > 3GM/c^2$. Dado que existen trayectorias circulares en la ecuación diferencial, podemos abordar el caso de trayectorias elípticas poco excéntricas, cercanas a circunferencias y con radios muy superiores al de *Scwartzschild* ; mediante una aproximación lineal del término cuadrático entorno a un radio medio aproximado r_0 (u_0)

$$u^2=(u_0+\Delta u)^2\approx u_0^2+2u_0\Delta u=2u_0u-u_0^2$$

donde se ha despreciado el término cuadrático de Δu. Sustituyendo esto en la ecuación diferencial tenemos:

$$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)+u-\frac{3GM}{c^2}(2u_0u-u_0^2)=\frac{GMm^2}{L^2}\rightarrow\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)+u\left(1-\frac{6GM}{r_0c^2}\right)=\frac{GMm^2}{L^2}-\frac{3GM}{c^2}u_0^2$$

finalmente, r_0 debe corresponder con el *semi-latus rectum de la elipse [9]*; ya que en un margen de π radianes es $r<r_0$ y en los π radianes restantes es $r>r_0$ (vea el lector la nota al final). Por otra parte, para objetos con masa en reposo no nula, el término constante adicional es despreciable frente al término clásico; de modo que la ecuación diferencial linealizada es

$$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)+u\left(1-\frac{6GM}{r_0c^2}\right)=\frac{GMm^2}{L^2}$$

Ecuación análoga a la de *Binet*, de modo que la solución general será

$$u=\frac{GMm^2}{L^2}+K\cos\left(\sqrt{1-\frac{6GM}{r_0c^2}}\,\theta\ +\theta_0\right)$$

con K y θ_0 constantes de integración. La solución nos hace ver el fenómeno de precesión del perihelio en las órbitas elípticas, ya que para que la fase del *coseno* llegue a 2π y la función u se repita, el ángulo θ debe ser mayor de 2π; aproximando la raíz cuadrada tenemos

$$\Delta\theta = \theta - 2\pi \approx \frac{6GM}{2c^2 r_0} 2\pi \approx \frac{6\pi GM}{c^2 r_0}$$

que corresponde al desplazamiento angular del perihelio de un planeta en el tiempo asociado al periodo de su órbita. Durante mucho tiempo se supo de este efecto en el planeta *Mercurio* y se detectaron varias causas posibles de este fenómeno, como la influencia de otros planetas, el tamaño del propio planeta y la falta de simetría del campo gravitatorio del Sol. Sin embargo estas contribuciones no justificaron las medidas experimentales hasta que se incluyó el resultado aquí presentado, obtenido por *Einstein* hace ya casi 100 años, junto con el resto de dichas contribuciones.

Nota sobre el valor r_0 en la aproximación del cálculo de la precesión del perihelio

Podemos hacer una estimación del radio r_0 mas ajustado a una trayectoria elíptica minimizando la función $F(r_0)$ siguiente

$$F(r_0) = \int_0^{2\pi} (r - r_0)^2 d\theta; \quad \frac{dF}{dr_0} = 0 \rightarrow \int_0^{2\pi} (r - r_0) d\theta = 0$$

La ecuación de la trayectoria elíptica [2] se puede poner así

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos(\theta)} \approx a(1-\varepsilon^2)\left[1 - \varepsilon\cos(\theta) + (\varepsilon\cos(\theta))^2 + ...\right]$$

donde ε es la excentricidad de la elipse, a el semi-eje mayor y $a(1-\varepsilon^2)$ es el *semilatus rectum*. Haciendo la integral tenemos

$$r_0 = a(1-\varepsilon^2)(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + ...) \rightarrow r_0 \approx a(1-\varepsilon^2) + a\frac{\varepsilon^2}{2}$$

resultado que, para pequeñas excentricidades, está dentro del orden de magnitud del semilatus rectum para r_0

Curvatura de la luz a su paso por las cercanías del Sol

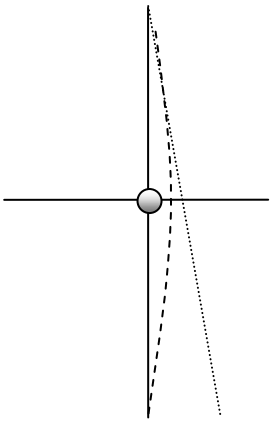
En [2] se expone un cálculo semiclásico para la desviación de un rayo de luz al pasar cerca de un campo gravitatorio con simetría esférica. El lector puede ver que se trata de una valor muy pequeño.

El lector puede notar que la cantidad *H/A* utilizada antes para deducir la versión relativista de la ecuación de Binet es independiente de la masa de la partícula. Si utilizamos esta relación para un rayo de luz, caracterizado geométricamente por

$$dl^2 = c^2(1 - \frac{2GM}{rc^2})dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} - r^2 d\theta^2 = 0$$

obtenemos la correspondiente versión de la ecuación de Binet para un rayo de luz

$$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)+u(1-\frac{3GM}{c^2}u)=0$$



comparado con el resultado para el caso anterior, se trata de la misma ecuación pero para un objeto con masa en reposo nula; lo que es una característica de la luz en relatividad. Multiplicando por *du/dθ* la expresión anterior podemos integrar fácilmente

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2-\frac{2GM}{c^2}u^3=const.$$

La ecuación anterior define la trayectoria de un rato de luz en las cercanías de un campo gravitatorio con simetría central, similar al del sol. Podemos imaginar que la trayectoria será similar a una hipérbola muy abierta. El dibujo da una imagen de las trayectorias del rayo de luz con y sin el efecto de la gravedad utilizando el mismo sistema de coordenadas que en [2]. El centro corresponde a un foco de la hipérbola y está ocupado por el Sol. Podemos ver que las asíntotas están cercanas a un ángulo de $\pm\pi/2$ respecto al eje horizontal, origen de ángulos. Volviendo a la ecuación integrada, podemos asignar, como en el dibujo, que para $\theta=0$ es $du/d\theta=0$, un extremo de u. Si en este punto extremo el valor es $u = u_p = 1/p$ *(p = periastro)* tenemos

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2-\frac{2GM}{c^2}u^3=u_p{}^2-\frac{2GM}{c^2}u_p{}^3$$

haciendo el cambio $\rho=u/u_p$ y $a = 2Gmu_p/c^2$ podemos llegar a esta expresión

$$d\theta=\pm\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2+a\rho^3-a}}$$

veremos que podemos aprovechar el hecho de que las asíntotas están cercanas al ángulo recto reordenando y aproximando la expresión anterior así

$$d\theta=\pm\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{1}{\sqrt{1-a\dfrac{1-\rho^3}{1-\rho^2}}}\approx\pm\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(1+\frac{a}{2}\frac{1-\rho^3}{1-\rho^2}\right)$$

integrando en el dominio *[0,1] para ρ*, tenemos para una asíntota

$$\Delta\theta=\frac{\pi}{2}+a$$

con lo que, por simetría, la desviación completa desde la recta incidente es:

$$\delta=2(\Delta\theta-\frac{\pi}{2})=\frac{4GM}{pc^2};\ \ p=periastro$$

y resulta ser el doble que el cálculo semiclásico de [2]

Notas adicionales

La aproximación lineal de la ecuación de Binet

$$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)+u\left(1-\frac{6GM}{r_0c^2}\right)=\frac{GMm^2}{L^2}-\frac{3GM}{c^2}u_0^2$$

permite deducir la existencia de trayectorias circulares para la luz (m=0), a una distancia $r_0 = 3GM/c^2$ .Por otra parte es posible también hacer una aproximación tomando una trayectoria elíptica clásica como referencia, en vez de un círculo. En este caso tenemos que sustituir en la ecuación anterior $u_0 =1/r_0$ por

$$\frac{1}{r_0}=u_0=\frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}\left[1+\varepsilon\cos(\theta)\right]$$

lo que genera un ecuación no lineal

$$\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)+u\left(1-\frac{6GM}{a(1-\varepsilon^2)c^2}\left[1+\varepsilon\cos(\theta)\right]\right)=\frac{GMm^2}{L^2}-\frac{3GM}{a^2(1-\varepsilon^2)^2c^2}\left[1+\varepsilon\cos(\theta)\right]^2$$

El lector puede comprobar también que la ecuación para la trayectoria de un rayo de luz se puede encontrar también a partir del extremo de la siguiente función integral

$$\delta\int_{p1}^{p2}dt=\frac{1}{c}\delta\int_{p1}^{p2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)}\sqrt{1-r^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\right]dr=0$$

Esto es equivalente al *principio de Fermat*: la trayectoria de un rayo de luz entre dos puntos en el campo gravitatorio (p1,p2) es aquella que tiene asociado un *tiempo coordenado mínimo* en el sistema de coordenadas asociado al campo gravitatorio.

Apéndice V* : *El principio de Fermat sobre la trayectoria de un rayo luminoso.

Según el principio de Fermat, la trayectoria de un rayo de luz que pasa por dos puntos determinados en un medio caracterizado por un índice de refracción *n*(x,y,z) es aquella que minimiza el tiempo que tarda la luz en recorrerlo. Si la velocidad de la luz en el medio es *v(x,y,z)* el índice de refracciones *n=c/v*, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Note el lector que suponemos que la velocidad de la luz en un punto (x,y,z) es la misma con independencia de la orientación de la trayectoria del rayo de luz en ese punto.
El tiempo Δt que invierte la luz en un trayecto arbitrario entre dos puntos p_1,p_2 es

$$\Delta t = \int_{p1}^{p1} \frac{dl}{v(x,y,z)} = \frac{1}{c}\int_{p1}^{p1} n(x,y,z)dl = \frac{1}{c}\int_{p1}^{p1} n(x,y,z)\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

donde *dl* es un elemento de línea en la trayectoria considerada y p1,p2 los puntos. Como el lector sabe, cualquier curva en tres dimensiones puede representarse mediante tres funciones de un único parámetro, que llamaremos *u* : [x(u), y(u), z(u)]. Si prescindimos del factor constante 1/c, que no influirá en el proceso de buscar el mínimo de la integral anterior, la expresión anterior se transforma en

$$c\Delta t = \int_{p1}^{p1} n(x,y,z)\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du$$

y la condición de tiempo mínimo corresponde al siguiente problema variacional

$$\delta\int_{p1}^{p1} L(x,y,z,x',y',z',u)du = 0;\quad L = n(x,y,z)\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}$$
$$x' = dx/du;\quad y' = dy/du;\quad z' = dz/du$$

es evidente la similitud con el caso mecánico, donde en vez del parámetro *u* teníamos el parámetro tiempo. Sin embargo podemos aplicar el mismo formalismo y utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{d}{du}\left(n\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}\right) = 0 \Rightarrow \left(\; dl = du\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\;\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}\frac{d}{du}\left(n\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}\right) \equiv \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{d}{dl}\left(n\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}\right) = 0$$

incluyendo los resultados para las componentes *y,z* tenemos, utilizando el álgebra vectorial

$$\nabla n - \frac{d}{dl}\left(n\bar{T}\right) = 0$$

donde *T* es el vector unitario tangente a la trayectoria. La anterior es la ecuación de las trayectorias de los rayos de luz en un medio de índice de refracción *n(x,y.z).*

REFERENCIAS

[1] Espacio,tiempo,materia y vacío. En esta misma web por este mismo autor.

[2] Análisis elemental del movimiento bajo fuerzas centrales de tipo Newtoniano.En esta misma web por este mismo autor.

[3] La Teoría de la Relatividad. Armando Martínez
http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.com.es/2009/03/25c-orbitas-planetarias-relativistas.html

[4] Introducción a la mecánica de Lagrange y Hamilton. Terenzio Soldovieri C.
http://www.cmc.org.ve/tsweb/documentos/ApuntesMecII.pdf

[5]Apuntes de mecánica clásica. Fernando O.Minotti
http://es.scribd.com/doc/52414910/Apuntes-de-Mecanica-Clasica

[6]El principio de los trabajos virtuales. José Mª Rico Martínez
http://www.dicis.ugto.mx/profesores/chema/documentos/Dinámica+de+Maquinaria/Principio+del+Trabajo+Virtual.pdf

[7] Lagrange. La elegancia matemática . Venancio Pardo Rego.
Editorial Nivola-2003. ISBN: 84-95599-59-7

[8]Transformada de Legendre
http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Legendre

[9] http://es.wikipedia.org/wiki/Elipse

[10] http://www.lfp.uba.ar/minotti/mecanica/cursomec.pdf

[11] Cinemática y Dinámica del Sólido Rígido. En esta misma web por este mismo autor.