Título del Trabajo	Introducción a la Mecánica de Fluidos.
Nombre	Enrique Cantera del Río
Filiación	C/Padre Benito Menni-6-2-E 47008
	Valladolid (España)
Correo electrónico	benarrob@gmail.com
Resumen	Introducción a la Mecánica de Fluidos
	para primeros cursos de carreras
	científico-técncias.

INTRODUCCION A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Introducción

Presión Hidrostática

Columna de agua en equilibrio Sobre-presiones Sistemas de coordenadas no inerciales Experiencia de Torricelli Mareas Prensa Hidráulica Altímetro de presión Momento angular hidrostático Momento de carena

Movimiento de fluidos

La presión en un fluido en movimiento. Líneas de corriente Análisis matemático de campos 2ª Ley de Newton para un elemento de fluido Conservación de la masa Sistema de ecuaciones para un fluido sin rozamiento interno

Visualización y ejemplos

Tubo de Venturi
Velocidad de salida de un fluido
Tubo de Pitot
Sustentación
Flujo compresible. Movimiento subsónico y supersónico.
Equilibrio Geostrófico
El golpe de ariete.
Cavitación y Sono-Luminiscencia

Paradoja de D´Alembert

Ondas superficiales en el agua.

Sistema de coordenadas intrínseco de una corriente estacionaria

Ampliación del uso del sistema de coordenadas intrínseco Ecuaciones de Saint-Venant

Viscosidad

Flujo de Couette Ecuación de Navier-Stokes Flujo de Poiseuille y viscosidad en corrientes libres Efecto Coanda Arrastre de objetos en una corriente fluida

Capa Límite

Ecuaciones de Navier-Stokes para la capa límite Separación de la capa límite

Apéndice : Transformaciones de coordenadas de las operaciones gradiente, divergencia y rotacional.

INTRODUCCIÓN

Dada la estrecha relación de nuestra especie con el agua, a lo largo del tiempo se ha ido acumulando una gran experiencia sobre el comportamiento físico del agua. En el propio lenguaje se fijan ideas como las corrientes, los remolinos, las turbulencias, las olas...Conceptos que son resultados directos de la experiencia y que serán refinados por la Física en la mecánica de fluidos. Incluso el concepto de presión del agua es un resultado relativamente directo de la experiencia. Un buceador nota rápidamente este efecto de la presión en sus tímpanos a medida que desciende bajo la superficie del agua.

En cuanto al control físico del movimiento del agua tenemos los testigos históricos tales como canales de riego en el Egipto antiguo, acueductos, molinos y norias Romanos. El empuje de elevación de todo cuerpo sumergido parcial o totalmente en el agua se utilizó en la construcción de barcos desde tiempo inmemorial.

Leonardo Da Vinci, en el renacimiento, registra sus observaciones sobre el reposo y el movimiento del agua en varios cuadernos de trabajo:

- "...las superficies de todos los líquidos en reposo, que se encuentren unidos entre sí por debajo, siempre tienen la misma altura."
- "...en todos los casos en que hay movimiento de agua, hay gran parecido con el movimiento del aire."

"Para percibir la corriente de agua esparcir pequeñas semillas...de tal modo que se distribuyan por el seno del agua. El movimiento de estas semillas indicará cuales son las partes del agua que se mueven mas o menos rápidamente..."

"Si un canal experimenta un ensanchamiento brusco a cada lado, el agua forma remolinos a ambos lados del ensanchamiento..."

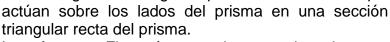
"El agua discurre mas rápido por el centro de canales rectos que por sus costados o en su fondo. Y mas rápido cerca de la superficie que cerca del fondo."

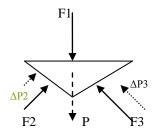
La mecánica de fluidos es la continuación natural de la mecánica elemental. Conceptos tales como las fuerzas de contacto : normales y rozamiento evolucionan hacia los conceptos de presión y viscosidad. Esta evolución tiene una parte matemática realmente relevante, ya que presiones y viscosidades adoptan ahora la forma matemática de tensores.

PRESIÓN HIDROSTÁTICA

Según el principio de Arquímedes, todo cuerpo total o parcialmente sumergido en agua, experimenta una fuerza ascendente equivalente al peso del agua que el volumen de dicho cuerpo desaloja. Hay que decir que esta ley no es exclusiva del agua, sino de cualquier material en estado de fluido, como pueden ser líquidos y gases; pero para concretar supondremos que utilizamos agua como fluido.

En este contexto imaginemos un prisma de sección triangular que introducimos en el seno de un recipiente con agua. La imagen representa las fuerzas que





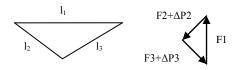
Las fuerzas Fi actúan en la normal a la cara correspondiente del prisma de la misma forma que la fuerza de contacto normal de un objeto que se desliza sin rozamiento por un plano inclinado. Por tanto estamos suponiendo que no existe rozamiento, en este contexto denominado viscosidad, entre el prisma

y el agua. Estas fuerzas representan la acción del agua sobre el prisma y por tanto la resultante de estas fuerzas debe ser el empuje descrito en el principio de Arquímedes. Por otra parte sobre el prisma actúa también la fuerza asociada a su peso (P) . La fuerza resultante del peso y del empuje ascensional tendrá cierto valor. Dependiendo de este valor, el prisma se hundirá si prevalece el peso o alcanzará la superficie del agua si prevalece el empuje. En el caso límite en que el empuje y el peso sean iguales entonces se alcanza el equilibrio hidrostático y el prisma no se mueve de su posición. En este caso la masa del prisma es igual que la masa de agua desalojada por su volumen, es decir, el prisma tiene la misma densidad que el agua. Si el prisma es homogéneo con densidad constante, este caso tiene una propiedad interesante fácilmente accesible a la experiencia: el equilibrio hidrostático que se alcanza es un equilibrio indiferente; el prisma permanece en la posición en que se haya colocado y no tiene ninguna tendencia a girar. Por tanto, medido respecto de un punto cualquiera, el momento total asociado a las fuerzas Fi sobre el prisma compensa exactamente el momento asociado al peso del prisma en este caso.

Volviendo al equilibrio de fuerzas podemos poner : $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{P} = 0 = \overline{E} + \overline{P}$

Dado que los vectores que manejamos están en un mismo plano, como operación matemática siempre es posible descomponer el vector P en suma de 2 vectores ΔP_2 , ΔP_3 linealmente independientes en dicho plano y perpendiculares a las caras respectivas del prisma. De esta forma la expresión anterior queda

$$(\overline{F}_1)+(\overline{F}_2+\Delta P_2)+(\overline{F}_3+\Delta P_3)=0$$



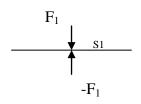
Las componentes vectoriales que a parecen agrupadas en paréntesis representan un triángulo vectorial que además es semejante a la sección triangular del prisma, debido a la perpendicularidad de las componentes vectoriales. La relación de semejanza se puede expresar como

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2 + \Delta P_2}{S_2} = \frac{F_3 + \Delta P_3}{S_3} = \langle p \rangle$$

donde S representa el área de las caras del prisma, es decir, el producto de la longitud / de los lados del triángulo por la altura del prisma; altura que es la misma para todas las caras.

Primer paso al límite

En la expresión anterior, podemos variar la forma de la sección triangular del prisma. Por ejemplo podemos tomar sucesivos prismas que vayan abatiendo el lado 2 sobre el lado 1, manteniendo constante la longitud del lado 1 y anulando progresivamente el lado 3. Esta operación, en el limite, supone anular los valores ΔP_2 , ΔP_3 ; ya que estas fuerzas son componentes del peso y por tanto son proporcionales a la masa contenida en el prisma. En el límite del que hablamos el prisma se transforma en una superficie, no tiene volumen y por tanto el prisma deja de tener masa. Si en el proceso límite los valores de F₁ y F_2 se mantienen significativamente superiores a los de ΔP_2 , ΔP_3 , entonces llegamos a la siguiente configuración:



Sobre una superficie S1 ,sin masa, inmaterial, aparecen dos fuerzas iguales y de sentido contrario, una por cada lado. Interpretamos este resultado así : la superficie S1 separa dos partes del fluido. Las fuerzas internas del dos fuerzas iguales y de sentido contrario, una por cada separa dos partes del fluido. Las fuerzas internas del fluido son fuerzas de contacto que se manifiestan en la superficie de separación entre las partes del fluido y

cumplen con la 3ª ley de Newton; el principio de acción y reacción. Por otra parte el resultado se ha obtenido en un proceso en que las fuerzas F son aplicadas a una superficie material; por continuidad también debemos aceptar el resultado si S1 es la superficie de separación entre el agua y otro cuerpo; este cuerpo puede ser otro fluido ,como el caso del aire. A nivel atómico, podemos imaginar que estas fuerzas son el resultado de la repulsión de las nubes electrónicas de los átomos situados a ambos lados de la superficie S1. Note el lector que las fuerzas F1 siempre serán perpendiculares a la superficie S1, independientemente de la orientación de dicha superficie.

Segundo paso al límite

Lo anterior muestra que las fuerzas internas en el agua, esto es la presión, converge con la superficie sobre la actúan, de modo que podemos poner la presión media sobre una superficie como

$$\langle p \rangle = \frac{F}{S}$$

si hacemos la superficie tan pequeña como gueramos alrededor de un punto, entonces la fuerza correspondiente irá disminuyendo también, pero podemos suponer la convergencia y definir la presión en dicho punto como

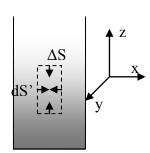
$$p = \frac{dF}{dS}$$

la existencia de este límite es , en algún sentido, un acto de fé similar al de la definición de la velocidad instantánea. En principio pueden aparecer indeterminaciones matemáticas del tipo 0/0; pero la hipótesis que se acepta es la del comportamiento matemáticamente continuo de las magnitudes físicas. Si hacemos los dos pasos al límite en uno para el caso de un prisma de sección triangular cuyos lados son tan pequeños como queramos tenemos

$$\frac{dF_1}{dS_1} = \frac{dF_2}{dS_2} = \frac{dF_3}{dS_3} = p$$

de modo que para una superficie elemental centrada en un punto, la presión es independiente de la orientación de dicha superficie y siempre perpendicular a ella.

Columna de agua en equilibrio



La imagen representa un recipiente con agua en reposo.

Definimos una porción del agua mediante un prisma recto
de sección ΔS, altura Δh, masa Δm y densidad de masa
por unidad de volumen ρ. Las fuerzas de presión que
actúan sobre este prisma se representan en el dibujo.

Dado que la porción de agua está en reposo las fuerzas
de presión en la horizontal deben compensarse. Las
fuerzas en la vertical deben compensar el peso de la
columna de agua

$$p_{\text{superior}}\Delta S - p_{\text{inf}\,erior}\Delta S + \Delta m\,g = 0 \ \rightarrow p_{\text{superior}} - p_{\text{inf}\,erior} + \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta z}\,g\Delta z = 0 \ \rightarrow \ p_{\text{inf}\,erior} = p_{\text{superior}} + \rho\,g\Delta z$$

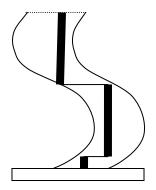
El razonamiento hecho es válido también para una columna de aire en una zona de aire en reposo, sin viento. Por supuesto en este caso se debe utilizar la densidad del aire.

Si, en el caso de la columna de agua, la parte superior del prisma llega hasta la superficie del agua, entonces la presión superior es igual a la presión atmosférica en el punto en cuestión. En la superficie de separación entre aire y agua podemos aplicar lo dicho en la sección "primer paso al límite".

Si ahora hacemos la altura Δz de la porción de agua tan pequeña como queramos, entonces el análisis de fuerzas en la horizontal da

$$p_{derecha}dS'-p_{izquierda}dS'=0 \rightarrow p_{izquierda}=p_{derecha}$$

Note el lector que este resultado permite tomar Δx , la distancia horizontal, tan grande como permita el recipiente.



Por tanto la presión hidrostática como función de las coordenadas solo depende de la altura z, en la dirección del campo gravitatorio : p=p(z). En el caso de un recipiente de forma irregular, la diferencia de presión entre dos puntos se puede calcular combinando los resultados anteriores para distintas columnas de agua en equilibrio como muestra el dibujo; tomando la presión como una magnitud matemáticamente continua.

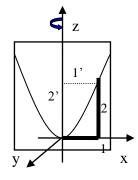
Sobre-presión

El siguiente dibujo representa un depósito de agua conectado a una tubería

muy estrecha y alta. Si tenemos el depósito lleno y empezamos a llenar la tubería de agua, debido a la dependencia de la presión con la altura p(z), podemos aumentar enormemente la presión sobre zonas próximas al fondo, lo que supone un aumento de la fuerza que el agua hace sobre el recipiente equivalente al producto de la presión por la superficie correspondiente. Esto aumenta la tensión en las paredes del depósito; a tal extremo que incluso es posible romper las paredes del depósito. En tiempos de los Romanos se utilizaba una técnica de minería denominada "ruina montium". De esta forma se excavaban altos pozos y galerías en las zonas apropiadas de una montaña. Al introducirse grandes cantidades de agua el *golpe de ariete* fracturaba zonas de la montaña que después caían abajo por efecto de la gravedad.

El lector no debe creer que este efecto viola la conservación de la energía y que es posible realizar un gran trabajo con un escaso aporte de energía. Si el depósito empieza a romperse por la presión, entonces empezará a derramarse agua y en muy poco tiempo la altura de agua de la tubería habrá disminuido considerablemente, disminuyendo también la presión sobre el fondo. Sin embargo, para romper la materia, basta un instante en que la presión sea lo bastante grande.

Equilibrio hidrostático en un sistema de coordenadas no inercial



El dibujo adjunto muestra un recipiente cerrado con agua en su interior. El recipiente gira respecto del eje z a una velocidad constante, de modo que el movimiento de giro se transmite poco a poco al fluido. Finalmente, para un observador asociado al sistema de coordenadas rotante (x,y,z), la superficie del agua adoptará la forma estable de un paraboloide de revolución. Este observador, no inercial, puede utilizar también las leyes de la presión hidrostática, pero en el equilibrio hidrostático debe introducir también la aceleración centrífuga, descrita en [1]. Para describir

completamente el campo de presiones p(x,y,z) para este observador podemos tomar dos columnas de agua : 1 y 2, una horizontal y otra vertical de sección

dS'. En la columna 1 horizontal la presión en los extremos derecho e izquierdo debe compensar el efecto de la fuerza centrífuga, que actúa en esta dirección.

$$(p_{derecha} - p_{izquierda})dS' = \left(\int_{x=0}^{x=x} dp\right)dS' = \int_{x=0}^{x=x} dm \, w^2 \, x = \int_{x=0}^{x=x} \rho \, dS' \, dx \, w^2 \, x \rightarrow$$

$$p_{derecha} - p_{izquierda} = \int_{x=0}^{x=x} \rho \, w^2 \, x \, dx = \frac{1}{2} \rho \, w^2 \, x^2$$

Para la columna 1 vertical las presiones superior e inferior deben compensar el peso de la columna, que es la fuerza que actúa en esta dirección vertical. El resultado obviamente coincide con el encontrado anteriormente

$$p_{\text{inf}\,erior} = p_{\text{sup}\,erior} + \rho\,g\,z$$

Por tanto la diferencia de presión entre el origen de coordenadas y un punto de la superficie del agua será

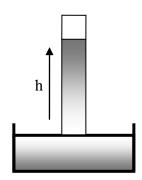
$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{1}{2} \rho \ w^2 x^2 - \rho g z$$

Por otro lado, podemos hacer el cálculo de este cambio de presión utilizando dos columnas complementarias 1' y 2' en la zona de aire. Esto nos lleva a este resultado

$$\frac{1}{2}\rho_{agua} w^2 x^2 - \rho_{agua} g z = \Delta p = \frac{1}{2}\rho_{aire} w^2 x^2 - \rho_{aire} g z$$

resultado que es compatible con la ecuación de una parábola : $z = ax^2$

Experiencia de Torricelli



La imagen muestra el sistema utilizado por Torricelli para medir la presión atmosférica. La cubeta inferior contiene mercurio, un elemento fluido y líquido en condiciones habituales de presión y temperatura. Inicialmente llenamos el tubo completamente con mercurio líquido. Lo taponamos de modo que no queda nada de aire dentro del tubo. Ponemos el tubo boca abajo dentro de la cubeta y destapamos la boca del tubo dentro de la cubeta. La columna de mercurio desciende una cierta cantidad hasta que se alcanza el equilibrio hidrostático. El nivel de la

cubeta está a la presión atmosférica y a la zona de vacío de la parte superior del tubo podemos asociar una presión nula, ya que suponemos que no existe materia allí, está vacía. Por tanto tenemos

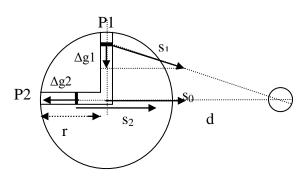
$$p_{atmosf\acute{e}ri\alpha} = \rho_{mercurio} g h$$

siendo h la altura de la columna de mercurio desde el nivel de la cubeta. A parte de poder medir los cambios de la presión atmosférica relacionados con los cambios de tiempo meteorológico, la experiencia de Torricelli es el primer momento en física en que se genera un vacío de materia. De esta forma se

pudo comprobar que la luz era capaz de atravesar el vacío, mientras que el sonido necesita de un medio material para su propagación. Posteriormente se comprobó que el vacío generado en el experimento es solo aproximado y que hay que considerar la existencia de una presión, aunque extremadamente baja y despreciable frente a la presión atmosférica, de vapor de mercurio en equilibrio con el propio mercurio líquido.

Una pipeta es un instrumento muy utilizado en química para trasladar líquidos en pequeñas cantidades. Su mecanismo de funcionamiento es similar al tubo del experimento de Torricelli, solo que ahora el tubo está abierto por los dos extremos. Un extremo se introduce en el líquido que se desea trasladar, por el otro extremo una persona genera con su boca una pequeña succión que elimina aire de la parte superior del tubo. Esta succión, al eliminar aire, disminuye la presión de dicho aire en esta zona, lo que provoca una subida de la columna de líquido para llegar al equilibrio hidrostático. Después se tapona la parte superior con el dedo gordo para evitar que el aire entre y ya se puede trasladar el líquido.

Mareas



El dibujo adjunto representa la interacción entre la Tierra y el Sol, separados una distancia d, de cara a un cálculo sencillo de las mareas causadas por el Sol. Suponemos que la tierra es un planeta líquido, que no gira respecto su eje de rotación y perfectamente esférico. El sistema de coordenadas que utilizaremos es un sistema de coordenadas en caída

libre solidario a la tierra (que suponemos no gira) y cuyo centro se mantiene unido al centro de la tierra; por tanto sigue el movimiento del centro de la tierra en el campo gravitatorio solar. Imaginemos dos columnas de agua, 1 y 2 tal como aparecen en el dibujo. En ambas columnas se ha marcado un elemento de fluido. El cálculo de la variación de presión en estas columnas debe hacerse en términos diferenciales, puesto que la gravedad terrestre ya no es constante en dimensiones tan grandes y además hay que considerar el efecto de la gravedad solar sobre las columnas. Vamos a calcular la diferencia de presión P_2 - P_1 desde el sistema de coordenadas en caída libre definido antes, para lo que aplicaremos la fórmula

$$dp = \rho [g(r) + \Delta g(r)]dr$$

donde g(r) hace referencia al campo gravitatorio de la tierra y $\Delta g(r)$ hace referencia a las alteraciones correspondientes al campo gravitatorio solar. El elemento de fluido en la columna 1 está afectado por el campo gravitatorio solar s_1 , pero esta es la visión desde un sistema de coordenadas inercial centrado en el sol. Respecto de nuestro sistema de coordenadas la cinemática exige compensar la aceleración s de cualquier cuerpo asociada al campo gravitatorio solar con la aceleración s_0 asociada al movimiento de nuestro

sistema de coordenadas. De este modo tenemos, en módulo (M_s = masa del sol)

$$\Delta g_1(r) = \left| \overline{s}_1 - \overline{s}_0 \right| \approx \frac{GM_s}{d^2} \frac{r}{d}$$

Para el elemento de fluido de la columna 2 debemos hacer la misma compensación. Para ello podemos desarrollar en serie el campo solar respecto del origen de coordenadas

$$s_{2} = \frac{GM_{s}}{(d+r)^{2}} = \frac{GM_{s}}{d^{2}} \frac{1}{(1+\frac{r}{d})^{2}} \approx \frac{GM_{s}}{d^{2}} \left[1 - \frac{2r}{d} \right] \quad (r \ll d)$$

$$\Delta g_{2}(r) = \bar{s}_{2} - \bar{s}_{0} = -\frac{2GM_{s}}{d^{2}} \frac{r}{d}$$

Con esto podemos calcular la variación de presión P₂-P₁

$$\int_{\rho_{1}}^{\rho_{2}} dp = \rho \int_{R}^{0} \Delta g_{1}(r) dr + \rho \int_{0}^{R} \Delta g_{2}(r) dr$$

$$P_{2} - P_{1} = \rho \int_{R}^{0} \frac{GM_{s}}{d^{3}} r dr - \rho \int_{0}^{R} \frac{2GM_{s}}{d^{3}} r dr = -\rho \int_{0}^{R} \frac{3GM_{s}}{d^{3}} r dr = -\rho \frac{3GM_{s}}{2d^{3}} R^{2}$$

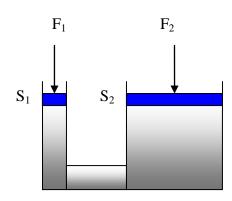
donde R es el radio terrestre. El término asociado a la gravedad terrestre g(r) desaparece debido a que consideramos la tierra perfectamente esférica.

En consecuencia vemos que el efecto de la gravedad solar en una tierra líquida, que no gira respecto a si misma y perfectamente esférica es una disminución de la presión en 2 respecto de la presión en 1. Por tanto la tendencia al equilibrio hidrostático exige un movimiento de agua desde la zona 1 a la zona 2; es decir, la altura del mar en la zona 2 debe ser superior a la altura del mar en la zona 1 en una cantidad Δh que compense la discrepancia de presiones calculada

$$\rho \frac{3GM_s}{2d^3} R^2 = \rho g \Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{3GM_s}{2gd^3} R^2$$

donde g es la aceleración de la gravedad terrestre en su superficie. Haciendo cuentas la altura es de aproximadamente 25 centímetros. Un cálculo similar para la Luna resulta en 35 centímetros. Note el lector que este resultado correspondería a Δh en alta mar y que esto supone en realidad un gran volumen de agua desplazada. Debido al giro de la tierra, las mareas acaban en las cercanías de las masas continentales, donde el mar tiene menos profundidad y esto hace que la marea gane en altura y velocidad, aún mas si pasa por estrechos poco profundos, como el Canal de la Mancha o el estrecho de Gibraltar. Dado que la atmósfera también se comporta como un fluido, también hay mareas atmosféricas [2].

Prensa hidráulica



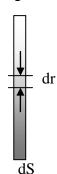
El dispositivo de la figura consta de dos vasos comunicantes llenos de agua. Como sabemos el equilibrio de presiones requiere que el agua llegue a la misma altura en los dos vasos. Posteriormente se aplican unos pistones (en negro) y se aplican sendas fuerzas F_1 y F_2 en cada uno de los vasos. Si estas fuerzas son tales que se mantiene el nivel en los vasos, entonces la presión justo debajo de los pistones debe ser la misma, y por tanto

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \to F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

relación que es similar a la de la palanca; de modo que si la relación de secciones S_2/S_1 es lo bastante grande, una fuerza relativamente pequeña F_1 , puede equilibrar a otra F_2 relativamente grande. Las imprentas antiguas se basaban en la presión de las planchas con los caracteres alfabéticos sobre el papel. Estas planchas se colocarían en el lado de F_2 de modo que estuviesen muy cerca de un tope con el papel y un pequeño desplazamiento de F_1 provocaría una gran compresión del papel contra las planchas, que quedan grabadas en el papel. Si en el lado de F_1 se conecta a una tubería con agua a presión, el sistema funciona como un elevador hidráulico.

Altímetro de presión.

Podemos imaginar una columna vertical de aire de sección dS en una atmósfera en equilibrio estático. Un elemento de volumen de esta columna está sometida a una presión superior y otra inferior que deben contrarrestar el peso de dicho elemento de volumen de aire dV, aplicando la ley de Newton de la gravedad:



$$dpdS = dm \frac{GM}{r^2} = dV \rho \frac{GM}{r^2}; dV = dSdr \rightarrow dp = \rho \frac{GM}{r^2} dr$$

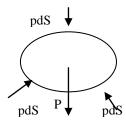
donde ρ es la densidad del aire. Si aplicamos la ecuación de los gases ideales al aire : $p = \rho RT/m_{mol}$, donde m_{mol} es la masa molar del aire; por tanto, suponiendo la temperatura T constante

$$\frac{dp}{p} = \frac{GM}{RTm_{mol}} \frac{dr}{r^2} \to \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_{r_0}^{r} \frac{GM}{RTm_{mol}} \frac{dr}{r^2} \to \ln(p) - \ln(p_0) = -\frac{GM}{RTm_{mol}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

El resultado es una relación entre la presión atmosférica y la altura. Esta relación se utiliza en los altímetros de presión, adecuadamente calibrados en los parámetros p_0 , r_0 , m_{mol} y T para aproximar la altura según medidas de presión. Estos dispositivos se utilizan en aviones y se calibran para las condiciones de los aeropuertos en que se realizará el aterrizaje, sin embargo el sistema es poco fiable en caso de una atmósfera no estable cerca de borrascas

y centros de bajas presiones, donde la presión cambia abruptamente. Los aviones disponen también de radio-altímetros.

Momento angular hidrostático



Un recipiente contiene agua en estado de reposo. Esto significa que las distintas porciones de agua que podamos imaginar están en reposo relativo. Esto es lo que pasa también en el caso del sólido rígido. Si consideramos una porción de agua en forma arbitraria, el equilibrio hidrostático exige que :

1-El efecto de las fuerzas de presión (*pdS*) sobre la superficie equilibre el peso (*P*)

2-El momento de fuerzas sobre la porción de fluido sea nula:

$$\sum_{vi} \overline{r_{vi}} \times (\overline{g} \, dm_{vi}) + \sum_{si} \overline{r_{sj}} \times (p_{sj} \, d\overline{S}_{sj}) = \overline{r_{agua}}^{CM} \times (m_{agua} \overline{g}) + \overline{M}_h = 0$$

donde se ha separado el cálculo en la componente del momento de fuerzas asociada a la fuerza de gravedad sobre cada elemento dm_{vi} de fluido de nuestra porción arbitraria y la componente de momento de fuerzas asociada a la presión sobre los elementos de superficie correspondientes. El vector superficie dS es un vector perpendicular al elemento de superficie y dirigido hacia el interior de nuestra porción arbitraria de agua. De esta forma la expresión vectorial pdS representa el vector fuerza asociada a la presión sobre la superficie.

El primer término de la ecuación de momentos corresponde al momento de fuerzas asociado al peso actuando sobre el centro de masas de la porción de agua y la segunda componente es el Momento angular hidrostático Mh. Obtendremos el mismo resultado sobre el momento hidrostático para el caso de un objeto material de la misma forma y con la misma densidad, constante, del agua colocado en el mismo lugar en el interior del recipiente con agua en reposo : la superficie limitante es geométricamente la misma y el peso es el mismo que en el caso anterior; por tanto la distribución de fuerzas sobre este objeto es la misma. Mas aún, si cambiamos la densidad del objeto manteniendo su forma y su posición en el agua, las fuerzas de contacto que actúan sobre su superficie no cambiarán respecto del caso inicial y por tanto el momento hidrostático seguirá siendo

$$\overline{M}_h = \overline{r}_{agua}^{CM} \times (-m_{agua}\overline{g})$$

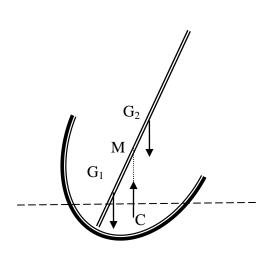
donde la masa m es la masa de agua desalojada por el prisma. Efectivamente el peso de esa masa actuando en la dirección contraria a la gravedad g es el empuje del que habla el principio de Arquímedes y la expresión anterior asocia un punto de aplicación a esta fuerza de empuje hidrostático situándola en el centro de masas del "objeto de agua". Vemos que este empuje es independiente del material del objeto y solo depende de su forma y posición en el agua. En cuanto al momento angular asociado a la gravedad, será ahora

$$\overline{M}_g = \overline{r_{objeto}}^{CM} \times (m_{objeto}\overline{g})$$

Note el lector que el momento de fuerzas asociado a la gravedad ahora depende de r^{CM}_{objeto} y no de r^{CM}_{agua} ; esta diferencia es para considerar que el objeto no tiene por que tener una densidad homogénea y constante como el agua. Si el objeto tuviese una densidad constante, entonces el centro de gravedad del objeto r^{CM}_{objeto} y el centro de empuje hidrostático del objeto r^{CM}_{agua} coinciden; en este caso los momentos angulares gravitatorio e hidrostático no están compensados, pero al coincidir el centro de gravedad y el centro de empuje hidrostático, esto hace que no haya un par de fuerzas actuando sobre el objeto y por tanto el objeto, inicialmente, no gira respecto de si mismo, si no que efectúa un desplazamiento sin giro al ascender o descender en el fluido. En cambio si la densidad del objeto no es homogénea entonces es posible que el centro de empuje y el centro de gravedad no coincidan y haya un par de fuerzas que haga girar el objeto respecto de su centro de masas.

Momento de carena.

Si echamos una canica en un vaso de agua, el nivel del agua asciende en el valor correspondiente al volumen de la canica. Esto es así por que el agua es un líquido incompresible: no se puede modificar apreciablemente su volumen por medios físicos. Debido al aumento de altura de la columna de agua en el vaso, la presión en el fondo aumenta; de modo que hay una modificación del campo de presiones p(x,y,z) en el vaso. Esta modificación de la presión depende de la relación entre el volumen de la canica y el del agua. Si el

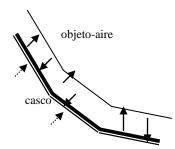


recipiente fuese una piscina olímpica el cambio en el nivel de la piscina debido a la caída de una canica sería inapreciable y el campo de presiones sería prácticamente el mismo. En el caso de un barco en el mar se puede asegurar que el ascenso del nivel del mar por efecto del barco es despreciable. Esto supone que el campo de presiones en el mar es el mismo con y sin barco.

El dibujo adjunto representa el perfil transversal de un barco en su longitud media y el eje de simetría medio. La flotación del barco se debe al empuje asociado al volumen de agua desalojada,

volumen que podemos ver en la porción de barco que hay debajo de la línea horizontal cortada que representa el nivel del mar estable. Sin embargo, además de que el barco flote en condiciones estables, también hace falta que sea estable, es decir, que si las condiciones de navegación inclinan el casco a un lado u otro el barco pueda recuperarse. Si aplicamos una fuerza para ladear el casco de un barco desde su posición normal podemos tener una situación como la del dibujo. Si eliminamos esta fuerza el barco buscará de nuevo su posición normal o se inclinará mas hasta caer dependiendo del momento de fuerzas asociado a la gravedad y a la presión sobre el casco. En cuanto a las

fuerzas de presión, nos fijamos a uno y otro lado de cada elemento de casco en el perfil del barco. Cuando el perfil es aire-aire, el momento de fuerzas asociado a la presión se anula prácticamente, ya que la superficie interior y la exterior son prácticamente paralelas, los elementos de superficie se pueden elegir de igual tamaño a ambos lados y la presión a ambos lados es prácticamente la misma.



En los elementos aire-agua, la zona en contacto con agua está sometida a la misma presión que en ese punto que si no estuviese el barco, ya que el campo de presiones no varía por la presencia del barco. Nos falta calcular el momento de fuerzas asociado a la presión del aire en contacto con el casco en esta zona interna del barco. La zona interior de aire se puede asociar a un "objeto-aire" limitado por una

superficie tan cercana como queramos a la zona interior del casco, aunque no la propia superficie del casco, y la superficie del nivel del mar. El dibujo representa una zona del casco y del "objeto-aire", muy próximos entre si. Las flechas continuas son las fuerzas que el aire hace sobre la superficie del objeto-aire y sobre el interior del casco. Las flechas punteadas son las fuerzas que la presión del agua hace sobre la parte externa del casco. El "objeto-aire" es una porción de fluido en equilibrio y por tanto respecto al centro de masas (C) de este "objeto-aire" el momento angular de fuerzas es cero. Se sigue que el momento de fuerzas correspondiente con la superficie a nivel del mar del "objeto-aire" cancela con el momento de fuerzas correspondiente con la superficie cercana al casco del "objeto-aire". Como estas últimas fuerzas sobre el "objeto-aire" son de igual intensidad y opuestas a las fuerzas de presión del aire sobre la superficie interna del casco, tenemos que el momento de fuerzas asociado a la superficie del nivel del mar es igual a la componente de momento que faltaba por calcular en el lado interno del casco. Podemos poner en fórmulas el proceso seguido:

$$\overline{M}_{casco}^{aire-agua} = \overline{M}_{casco}^{agua} + \overline{M}_{casco}^{aire}$$

$$\overline{M}_{objeto-aire}^{prox.casco} + \overline{M}_{objeto-aire}^{nivel-mar} + \overline{r}^{CM} \times m_{objeto-aire} = 0$$

$$\overline{M}_{casco}^{aire} = -\overline{M}_{objeto-aire}^{prox.casco}$$

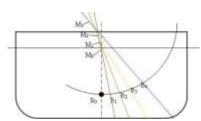
$$\rightarrow \overline{M}_{casco}^{aire-agua} = \overline{M}_{casco}^{agua} + \overline{M}_{objeto-aire}^{nivel-mar} + \overline{r}^{CM} \times m_{objeto-aire} = \overline{g}$$

en la 2^a expresión se ha generalizado el cálculo del momento angular del "objeto-aire" respecto de un punto cualquiera que no tiene por que ser el centro de masas de dicho objeto(r^{CM} representa la posición del centro de masas del objeto-aire). En la última expresión la suma de los momentos notados con M mayúscula en la parte derecha de la igualdad se aproximan mucho al momento angular de un "objeto-agua" limitado por la superficie del casco en contacto con el agua y la superficie del mar; excluyendo el propio casco de la nave y despreciando por pequeña la intersección entre la superficie del nivel del mar y el casco en $M^{nivel-mar}$ objeto-aire

$$\overline{M}_{casco}^{agua} + \overline{M}_{objeto-aire}^{nivel-mar} = \overline{M}_{objeto-agua} = r^{-CM} \times -m_{objeto-agua} \overline{g}$$

$$\rightarrow \overline{M}_{casco}^{aire-agua} = r^{-CM} \times (m_{objeto-aire} - m_{objeto-agua}) \overline{g} = \overline{M}_{carena}$$

donde la masa del objeto-aire es despreciable frente a la masa del objeto-agua. Este "objeto-agua" es justamente el agua desalojada por el barco del que habla del principio de Arquímedes. (r^{CM} representa la posición del centro de masas del objeto-aire que es la misma posición que para el objeto-agua, supuestas ambas densidades homogéneas). El momento de fuerzas calculado anteriormente se denomina momento de carena y está asociado al empuje hidrostático del mar sobre el barco. El centro de masas correspondiente se denomina centro de empuje o de carena. En el contexto del dibujo completo del barco, el momento de carena corresponde a la porción de agua desalojada entre el casco y el nivel de superficie y C es el centro de empuje correspondiente. Por otro lado el centro de gravedad G, que depende de la distribución de masa del barco, se sitúa en algún punto del eje de simetría del barco. Podemos ver que, dependiendo de la posición del centro de gravedad,



el par de fuerzas formado por el empuje y el peso tienden a normalizar la posición del barco, en el caso de *G1* y a volcarlo completamente en el caso *G2*. Existe también un punto intermedio *M* ,prolongación de la fuerza de empuje sobre el eje de simetría, tal que si el centro de gravedad está en ese punto, entonces el par de fuerzas es nulo y

el barco, por si mismo, no tiene tendencia a girar hacia ningún lado. Si repetimos la experiencia de inclinar el barco en varios ángulos y calculamos para cada ángulo la localización del centro de empuje C podemos ver que, para ángulos relativamente pequeños, los centros de empuje se van colocando aproximadamente sobre un círculo cuyo centro es precisamente el punto M, que recibe el nombre del metacentro y es un punto singular del barco. Por tanto la estabilidad del barco requiere que el centro de gravedad no esté por encima del metacentro del barco.

Movimiento de fluidos.

La presión en un fluido en movimiento.

En el siglo XVIII parecía evidente que las leyes de Newton estaban en el fundamento de toda la física. A nivel fundamental estas leyes se aplican a elementos de materia o partículas y por tanto es necesario aclarar que se entiende en nuestro caso por partícula de fluido. Desde el punto de vista matemático un elemento de fluido es un volumen de fluido tan pequeño como se quiera en todas sus dimensiones. Sobre esta partícula actuarán las fuerzas de presión del resto del fluido y de la gravedad; esto en las experiencias comunes sobre el movimiento de fluidos. La resultante de estas fuerzas determinará la aceleración que afecta a la partícula de fluido mediante la 2ª ley de Newton. Note el lector que en el caso de fluido en movimiento podemos seguir manteniendo las conclusiones sobre la presión presentadas en la sección de hidrostática, es decir, que la presión siempre actúa en la perpendicular a una superficie de contacto; sea este contacto entre el agua y otro material o entre dos partes del mismo fluido. Esto es así por que la resultante de las fuerzas asociadas a la presión y a la gravedad es una fuerza sobre una partícula de fluido que es un elemento de volumen. Es decir, la resultante es una fuerza distribuida en volumen, igual que lo es la fuerza de gravedad; en cambio la presión es señal de una fuerza distribuida en superficie. De este modo podemos reproducir el razonamiento hecho sobre la presión tomando un prisma elemental solidario al movimiento del fluido y que abate progresivamente dos de sus caras, eliminando en el límite de esta forma las fuerzas distribuidas en volumen y manteniendo el resultado sobre la presión ya señalado antes.

Una característica importante de algunos fluidos es que en su movimiento mantienen una densidad constante; mientras el fluido solo esté afectado por fuerzas clásicas y no por cambios de temperatura y/o composición química del fluido por ejemplo. El agua se considera un fluido incompresible, es decir, que mantiene su volumen aunque cambie su forma en las condiciones físicas aludidas; y por tanto su densidad se mantendrá constante. El aire puede ser comprimido o expandido mas fácilmente, pero estas acciones están asociadas normalmente a un cambio de su temperatura; sin embargo existe una margen experimental en que el aire puede considerarse incompresible y que se aclarará mas adelante. Se insiste otra vez en que en el análisis del movimiento de fluidos que se presenta aquí solo se considerará la influencia de fuerzas mecánicas, y no la influencia de los cambios de temperatura y/o composición química; influencia que también existe.

Líneas de corriente

Podemos refinar ahora las experiencias de Leonardo sobre la detección del movimiento del agua utilizando *partículas-test* sólidas. En el caso de fluidos que mantienen constante su densidad podemos utilizar como partícula-test un elemento de volumen de un material rígido, con la misma densidad del agua y que no experimente rozamiento con el agua. No podemos, físicamente, sustituir

un elemento de fluido por la partícula-test correspondiente que ocupe su lugar. Aunque ambos mantienen su volumen, el elemento de fluido puede cambiar su forma durante el movimiento, pero la partícula-test no. Sin embargo si consideramos partículas-test de un tamaño muy pequeño, en el límite, las fuerzas de presión y gravedad sobre esta partícula-test serán las mismas que sobre la partícula real de agua y por tanto el movimiento del agua será el mismo movimiento que el de la partícula-test.

Utilizando una gran cantidad de estas partículas se puede en principio medir el campo de velocidades u(x,y,z,t) de un fluido transparente en movimiento puesto en condiciones reproducibles de laboratorio; es decir, que si repetimos mas tarde la experiencia, obtendremos el mismo valor de u(x,y,z,t). Esto no es tan sencillo como parece, ya que el movimiento de un fluido puede estar afectado por turbulencias, vórtices o remolinos que pueden ser difíciles de controlar y predecir. El caso mas sencillo para el análisis del movimiento de un fluido es el caso de movimiento estacionario, es decir, el movimiento de nuestras partículas de test solo depende de las coordenadas de posición (x,y,z)y no del tiempo : u(x,y,z). Si registramos trayectoria en el fluido de una partícula test que parte de un punto x_0, y_0, z_0 ; entonces cualquier otra partícula-test que parta del mismo punto seguirá esta misma trayectoria. Desde el punto de vista mecánico esto es así por que sobre ambas partículas actúan las mismas fuerzas y parten de la misma situación inicial. Este es el determinismo de la mecánica clásica. Dibujando las trayectorias de todas las posibles partículastest obtenemos las líneas de corriente del fluido en condiciones estacionarias. En condiciones no estacionarias también se pueden definir las línea de corriente del campo para un instante dado $u(x,y,z,t_0)$; pero en este caso las líneas de corriente no están relacionadas con trayectorias de una partícula-test. La ecuación diferencial que sigue un elemento dl de estas líneas de campo es

$$\bar{u} \times d\bar{l} = 0 = (u_x, u_y, u_z) \times (dx, dy, dz) = 0$$

Como regla heurística, para una corriente de fluido que se mueve suavemente y sin turbulencias, estado de movimiento denominado régimen laminar; las líneas de corriente tienden a rodear suavemente los obstáculos o límites que dicha corriente va encontrando.

Análisis matemático de campos

Un campo, desde el punto de vista físico, es una zona del espacio en la que se distribuye alguna característica física que puede ser objeto de medida. Así tenemos un campo de velocidades, de presiones, densidades, un campo gravitatorio, un campo eléctrico....Matemáticamente se trata de funciones escalares o vectoriales que dependen de las tres coordenadas espaciales y, si el campo es no-estacionario, del tiempo : f(x,y,z,t). Una función vectorial equivale a tres funciones escalares en general distintas. En el análisis matemático de funciones de varias variables independientes son de la mayor importancia las integrales de superficie y de línea. Según la naturaleza del campo estas integrales se pueden relacionar con propiedades físicas importantes. En el caso de la hidrodinámica, la integral de superficie del campo de velocidades se relaciona directamente con la conservación de la masa,

como hemos visto, y la integral de línea está relacionada con el carácter rotacional del campo, es decir, con la *tendencia* del campo de velocidades a producir vórtices o remolinos. En el caso del campo electromagnético, la integral de superficie está relacionada con la carga eléctrica y la integral de línea con la inducción electromagnética. Los teoremas de la divergencia y del rotacional son, matemáticamente, condiciones necesarias para cualquier campo vectorial de comportamiento continuo

$$\oint \overline{f}(x,y,z,t) \bullet d\overline{S} = \oint \overline{\nabla} \bullet \overline{f}(x,y,z,t) dV \Rightarrow \overline{\nabla} \bullet \overline{f}(x,y,z,t) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \overline{f}(x,y,z,t) \bullet d\overline{S}}{\Delta v}$$
 teorema de la divergencia
$$\oint \overline{f}(x,y,z,t) \bullet d\overline{l} = \int \left[\overline{\nabla} \times \overline{f}(x,y,z,t) \right] \bullet d\overline{S} \Rightarrow \overline{\nabla} \times \overline{f}(x,y,z,t) \Big|_{\Delta \overline{S}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \overline{f}(x,y,z,t) \bullet d\overline{l}}{\Delta S}$$
 teorema del rotacional

El teorema de la divergencia transforma una integral del campo sobre una superficie cerrada en una integral de la divergencia del campo sobre el volumen definido por dicha superficie. El teorema del rotacional transforma una integral del campo sobre una línea cerrada en una integral de superficie sobre cualquier superficie limitada por dicha línea cerrada; como una pompa que empieza a salir de un pompero. Note el lector que estas integrales se evalúan sobre líneas, superficies y volúmenes, en un instante t el mismo para todos los puntos del espacio afectados. Es decir, se evalúan simultáneamente en todos los puntos del espacio afectados. Note el lector que los propios teoremas sirven para definir cuantitativamente la divergencia y el rotacional¹ de un campo, y que la invarianza frente a cambios de sistemas de coordenadas de volúmenes, superficies y producto escalar supone necesariamente el carácter invariante de la divergencia frente a cambios de sistema de coordenadas. Sobre el carácter vectorial de los elementos de superficie planos (dS) el lector puede consultar el apéndice matemático. La dirección de los vectores dS en las integrales es siempre perpendicular a la superficie y el sentido es : 1-Para una superficie cerrada este sentido es hacia el exterior del volumen delimitado: 2-Para una superficie abierta este sentido depende según la regla de la rosca de la tuerca o de la mano derecha del sentido de circulación de dl en la integral de línea correspondiente. Note el lector que la definición dada de divergencia y rotacional introduce cierta generalización ya que solo se necesita que las correspondientes integrables; funciones sean no necesariamente diferenciables. Vemos que en el análisis matemático de campos adquiere relevancia el uso del operador gradiente en formas análogas al caso del álgebra vectorial. El rotacional de un campo se expresa como el producto vectorial del gradiente y el campo vectorial. La divergencia se expresa como el producto escalar del gradiente por el campo vectorial.

$$\begin{split} \overline{\nabla} &= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}); \\ \overline{\nabla} \bullet \overline{f} &= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \bullet \left(f_x, f_y, f_z \right) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \; ; \\ \overline{\nabla} \times \overline{f} &= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times \left(f_x, f_y, f_z \right) = (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}) \end{split}$$

¹ El subíndice del rotacional indica la componente de este en la dirección definida por ΔS y el sentido definido a partir del sentido de circulación de la integral de línea (regla de la rosca de la tuerca o de la mano derecha).

puesto que el lenguaje matemático de los campos depende del operador gradiente, el lector necesitará un uso ágil del álgebra de este operador; de la misma forma que en el caso de análisis de funciones de una variable se necesita utilizar la derivada de una función. Existe una regla sencilla para calcular la acción del operador gradiente sobre el producto de dos campos. La regla consiste en aplicar la propiedad de la derivada de un producto de funciones que equivale a considerar, alternativamente, una y otra función constantes de cara a la derivación y sumar los resultados

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial}{\partial x}(f_p g + fg_p) = f_p \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}g_p = f \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}g$$

los valores afectados por el subíndice *p* no deben considerarse como variables, sino como valores numéricos evaluados en el punto de derivación correspondiente. Descomponiendo el producto en una suma similar a la anterior, lo siguiente que debemos hacer es utilizar las reglas habituales del álgebra vectorial, incluyendo el producto mixto y el doble producto vectorial :

para cualesquiera vectores $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

$$\overline{A} \bullet (\overline{B} \times \overline{C}) = (\overline{A} \times \overline{B}) \bullet \overline{C} = (\overline{C} \times \overline{A}) \bullet \overline{B} \qquad producto \quad mixto$$

$$\overline{A} \times (\overline{B} \times \overline{C}) = \overline{B}(\overline{A} \bullet \overline{C}) - \overline{C}(\overline{A} \bullet \overline{B}) \qquad doble \ producto \ vectorial$$

además el producto mixtorepresenta físicamente el volumen del paralelepípedo formado a partir de $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

.....y reordenar los términos siguiendo el álgebra vectorial asegurando que el operador gradiente no actúe derivando un término que se ha establecido como constante numérica.

$$\overline{\nabla}(fg) = \overline{\nabla}(f_p g + f g_p) = f_p \overline{\nabla} g + g_p \overline{\nabla} f$$

$$\overline{\nabla} \bullet (f \overline{g}) = \overline{\nabla} \bullet (f_p \overline{g} + f \overline{g}_p) = f_p \overline{\nabla} \bullet \overline{g} + \overline{g}_p \bullet \overline{\nabla} f$$

$$\overline{\nabla} \times (f \overline{g}) = \overline{\nabla} \times (f_p \overline{g} + f \overline{g}_p) = f_p \overline{\nabla} \times \overline{g} + (\overline{\nabla} f) \times \overline{g}_p$$

$$\overline{\nabla}(\overline{g} \bullet \overline{f}) = \overline{\nabla}(\overline{g}_p \bullet \overline{f} + \overline{g} \bullet \overline{f}_p) = \overline{g}_p \times (\overline{\nabla} \times \overline{f}) + (\overline{g}_p \bullet \overline{\nabla}) \overline{f} + \overline{f}_p \times (\overline{\nabla} \times \overline{g}) + (\overline{f}_p \bullet \overline{\nabla}) \overline{g}$$

$$\overline{\nabla} \bullet (\overline{f} \times \overline{g}) = \overline{\nabla} \bullet (\overline{f}_p \times \overline{g} + \overline{f} \times \overline{g}_p) = \overline{f}_p \bullet (\overline{g} \times \overline{\nabla}) + \overline{g}_p \bullet (\overline{\nabla} \times \overline{f}) = -\overline{f}_p \bullet (\overline{\nabla} \times \overline{g}) + \overline{g}_p \bullet (\overline{\nabla} \times \overline{f})$$

$$\overline{\nabla} \times (\overline{f} \times \overline{g}) = \overline{\nabla} \times (\overline{f}_p \times \overline{g} + \overline{f} \times \overline{g}_p) = (\overline{\nabla} \bullet \overline{g}) \overline{f}_p - (\overline{f}_p \bullet \overline{\nabla}) \overline{g} + (\overline{\nabla} \bullet \overline{f}) \overline{g}_p - (\overline{g}_p \bullet \overline{\nabla}) \overline{f}$$

Otra relación también válida en base al álgebra vectorial es

$$\overline{f} \bullet \left[\overline{\nabla} g \right] = \left[\overline{f} \bullet \overline{\nabla} \right] g$$

Un campo vectorial también puede representar el movimiento de una partícula: se puede escribir la velocidad de una partícula como v(x(t),y(t),z(t)) = v(t). Donde las funciones x(t),y(t),z(t) determinan la posición de la partícula en cada instante de tiempo. Por tanto las propiedades cinemáticas de una partícula : posición, velocidad, aceleración; se pueden representar mediante campos

vectoriales que solo dependen del tiempo. Así, si elegimos g=v(t) en la expresión del gradiente del producto escalar tendremos

$$\overline{v}(t) \times \left(\overline{\nabla} \times \overline{f}(x, y, z, t) \right) = \overline{\nabla} (\overline{v}(t) \bullet \overline{f}(x, y, z, t)) - (\overline{v}(t) \bullet \overline{\nabla}) \overline{f}(x, y, z, t)$$

ya que las derivadas parciales de v(t) respecto de las coordenadas espaciales (x,y,z) son nulas.

Por otro lado, si en la misma fórmula del gradiente del producto escalar elegimos f = g = u(x,y,z,t) tenemos

$$\overline{u}(x, y, z, t) \times \left(\overline{\nabla} \times \overline{u}(x, y, z, t)\right) = \frac{1}{2} \overline{\nabla} \left[\overline{u}(x, y, z, t)\right]^{2} - (\overline{u}(x, y, z, t) \bullet \overline{\nabla}) \overline{u}(x, y, z, t)$$

resultado que será utilizado mas adelante en el análisis del campo de velocidades de un fluido.

También podemos incluir en el álgebra del operador gradiente expresiones en las que aparecen productos de este operador por si mismo, lo que conduce a derivadas parciales de 2º orden. En este caso la aplicación del álgebra vectorial es mas directa

$$\overline{\nabla} \bullet \left[\overline{\nabla} f \right] = \left[\overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \right] f$$

$$\overline{\nabla} \times \left[\overline{\nabla} \times \overline{g} \right] = \overline{\nabla} \left[\overline{\nabla} \bullet \overline{g} \right] - \left[\overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \right] \overline{g}$$

$$\overline{\nabla} \bullet \left[\overline{\nabla} \times \overline{g} \right] = \left[\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \right] \bullet \overline{g} = 0$$

$$\overline{\nabla} \times \left[\overline{\nabla} f \right] = \left[\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \right] f = 0$$

$$\overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} = \overline{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}, - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

La anulación de la última expresión se debe a que las derivadas parciales cruzadas conmutan para cualquier par de variables si los campos correspondientes son continuos y derivables.

Para completar el carácter vectorial de operador gradiente, es necesario determinar las reglas de cambio de sistema de referencia. Si tenemos un sistema de coordenadas cartesianas (xyz), otro sistema de coordenadas alternativo $(\alpha\beta\gamma)$, que no tienen por que ser cartesianas, y un campo escalar $f(\alpha,\beta,\gamma,t)$, siempre podemos considerar el campo $f(\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z),\gamma(x,y,z),t)$ utilizando las funciones de transformación entre los dos sistemas coordenados. Podemos calcular la componente del gradiente en la dirección x utilizando la regla de la cadena para funciones compuestas

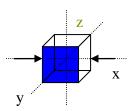
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \beta}, \frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)$$

lo que nos permite utilizar la siguiente expresión para el gradiente utilizando el álgebra de matrices

$$\overline{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \end{pmatrix}$$

Las coordenadas $(\alpha\beta\gamma)$ pueden ser cartesianas en distinta referencia (giradas y/o desplazadas) respecto de (xyz), o coordenadas esféricas, cilíndricas, etc, en la misma referencia que (xyz). El gradiente puede expresarse en distintas coordenadas, pero siempre como derivadas parciales de coordenadas cartesianas. Es decir, siempre como el lado izquierdo de la expresión anterior y a veces como el vector de derivadas parciales del lado derecho. Para una ampliación sobre esto consulte el apéndice de transformaciones.

2ª Ley de Newton para un elemento de fluido



El dibujo representa un volumen de fluido de forma cúbica en un tiempo dado. La materia contenida en este volumen está afectada por las fuerzas de contacto superficial derivadas de la presión y la fuerza de gravedad distribuida en volumen. Según el teorema del centro de masas de la mecánica, la acción de las fuerzas sobre la materia

contenida en el volumen de control en un instante dt generarán un cambio en la posición dr y en la velocidad dv de su centro de masas. En principio la materia fluida puede adoptar una forma distinta de la cúbica al final de este proceso, incluso cambiar de volumen y por tanto de densidad. Sin embargo creemos que tomando el límite de un elemento de volumen muy pequeño, la diferencia entre la velocidad del centro de masas y la velocidad del fluido es despreciable. El análisis de fuerzas en la dirección x sería así:

$$(p_i - p_d)dS_x + dm g_x = dm a_x; \Delta x = x_i - x_d \rightarrow \left(\frac{p_i - p_d}{x_i - x_d}\right) \Delta x dS_x + dm g_x = dm a_x$$

donde dm es la masa contenida en el elemento de volumen y es igual al producto de la densidad en ese punto y ese instante por el volumen. Los subíndices i y d hacen referencia a izquierda y derecha respecto al centro de coordenadas. El cociente entre paréntesis representa, en el límite en que Δx tiende a cero, la derivada parcial del campo de presiones p(x,y,z,t) respecto de la coordenada x en el punto x_0,y_0,z_0 . Por otro lado $\Delta x dS_x$ es el volumen del elemento de fluido dV, pero con signo negativo ya que $\Delta x < 0$. Si repetimos el planteamiento para los otros dos ejes y,z obtendremos conclusiones similares

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = \rho a_x; -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = \rho a_y; -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = \rho a_z \rightarrow$$

$$-\nabla p + \rho g = \rho a; \rho = \frac{dm}{dV} = \rho(x, y, z, t)$$

Para deducir esta ecuación diferencial hemos utilizado un sistema de coordenadas x,y,z en reposo local a un elemento de fluido, pero evidentemente la ecuación es válida en todos los sistemas de referencia inerciales posibles. En caso de utilizar un sistema de coordenadas no inercial, debemos introducir las fuerzas de inercia correspondientes, que son siempre fuerzas de volumen. Siguiendo la exposición hecha en [1] la ley de fuerzas para un sistema no inercial es

$$\rho \overline{a}_{A} = -\nabla p + \rho \overline{g} - \rho \overline{a}_{DI}(t) - \rho \overline{\alpha} \times \overline{r} - \rho \overline{w} \times (\overline{w} \times \overline{r}) - 2\rho \overline{w} \times \overline{v}_{A}$$

donde v_A y a_A son la velocidad y aceleración del elemento de fluido respecto al sistema de coordenadas no inercial; a_{DI} es la aceleración de desplazamiento entre el sistema de referencia no inercial y el inercial. Para una comprensión mas sencilla de los vectores implicados, el lector puede considerar un instante en que los dos sistemas de coordenadas involucrados en la expresión anterior : el inercial y el no-inercial, coinciden; es decir, la matriz de transformación correspondiente a dicho instante es la matriz identidad.

Anteriormente se ha introducido el campo de velocidades de un fluido a partir de medidas sobre partículas-test. Podemos expresar la velocidad de las expresiones anteriores, que se refiere a una partícula-test concreta, por medio del campo de velocidades u(x,y,z,t). Basta considerar que para nuestra partícula-test las coordenadas espaciales serán una función del tiempo : $u(x_i(t),y_i(t),z_{-i}(t),t)$, donde i designa una partícula concreta; de modo que tenemos, utilizando las reglas de derivación parcial y de función compuesta:

$$\begin{split} \frac{d\overline{v}_{A}}{dt} &= \frac{d}{dt}\overline{u}(x_{i}(t),y_{i}(t),z_{i}(t),t) = \frac{dx_{i}}{dt}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + \frac{dy_{i}}{dt}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} + \frac{dz_{i}}{dt}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{u}}{\partial t} \\ pero\ \overline{v}_{A} &= \left(\frac{dx_{i}}{dt},\frac{dy_{i}}{dt},\frac{dz_{i}}{dt}\right) = \overline{u}(x_{i},y_{i},z_{i},t)\ por\ la\ definición\ del\ campo\ de\ velocidades \\ y\ entonces & \frac{d\overline{v}_{A}}{dt} = \left(\overline{u}\bullet\overline{\nabla}\right)\overline{u} + \frac{\partial\overline{u}}{\partial t} \end{split}$$

ya que las derivadas parciales se evalúan en el punto (x_i,y_i,z_i) que ocupa el elemento de fluido en el instante t; con lo que la 2^a Ley de Newton expresada en términos del campo de velocidades u(x,y,z,t) es

$$\rho(\overline{u} \bullet \overline{\nabla})\overline{u} + \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \overline{g} - \rho \overline{a}_{DI}(t) - \rho \overline{\alpha} \times \overline{r} - \rho \overline{w} \times (\overline{w} \times \overline{r}) - 2\rho \overline{w} \times \overline{u}$$

Para el caso de un sistema de coordenadas inercial, la 2ª Ley de Newton, queda así:

$$\rho(\overline{u} \bullet \overline{\nabla})\overline{u} + \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\overline{\nabla}p + \rho \overline{g}; \quad (\overline{u} \bullet \overline{\nabla})\overline{u} = \frac{1}{2}\overline{\nabla}(u^2) - \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{2}\overline{\nabla}(u^2) + \overline{\nabla}p + \rho \overline{\nabla}V = \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) - \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$$

donde V representa el potencial gravitatorio, relacionado con la intensidad de campo gravitatorio g por la operación gradiente. Note el lector que si la ecuación dinámica anterior es de validez general, entonces sus soluciones generales serán muy complejas ya que debe incluir casos de movimiento

turbulento de fluidos. En el caso mas sencillo de un fluido en movimiento estacionario su campo de velocidades será u(x,y,z), es decir, no depende del tiempo; con lo que la derivada parcial correspondiente se anula. En condiciones de densidad constante podemos introducir la densidad dentro del gradiente así:

$$\overline{\nabla}(\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho V) = \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u})$$

Si integramos esta expresión a lo largo de una *línea de corriente*, cuyos elementos dr son paralelos al campo vectorial u(x,y,z) en cada punto

$$\int_{1}^{2} \overline{\nabla} (\frac{1}{2} \rho u^{2} + p + \rho V) \bullet d\overline{r} = \Delta_{linea-corriente} (\frac{1}{2} \rho u^{2} + p + \rho V)$$

$$\int_{1}^{2} \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) \bullet d\overline{r} = \int_{1}^{2} (\overline{u} \times d\overline{r}) \bullet (\overline{\nabla} \times \overline{u}) = 0 \quad (\overline{u} \ y \ d\overline{r} \ paralelos)$$

$$\Delta_{linea-corriente}(\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho V) = 0$$

ecuación válida para una línea de corriente de un fluido en movimiento estacionario y de densidad invariable. Si suponemos además que el campo de velocidades del fluido es $irrotacional^2$: $\nabla \times \bar{u} = 0$, entonces el resultado anterior es válido para cualquier trayectoria de integración elegida, es decir, para cualesquiera dos puntos en el fluido:

$$\Delta(\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho V) = 0$$

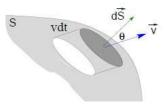
este resultado se conoce como Ecuación de Bernouilli.

Leyes de conservación.

El movimiento fluido se suele realizar a través de conducciones normalmente impermeables y que evitan la perdida de fluido. Consideremos el estado de todo el campo de velocidades en un instante t_0 determinado: $u(x,y,z,t_0)$. Consideremos los puntos en una superficie cerrada dentro del fluido en ese instante. El valor de u en los distintos puntos de la superficie nos informa del movimiento del fluido allí, de modo que permiten decir que, en un instante dt, un elemento de fluido sobre la superficie en el punto (x,y,z) se habrán desplazado $dr = u(x,y,z,t_0)dt$. Según sea

el valor de \boldsymbol{u} en el punto considerado , el desplazamiento de cada elemento

puede suponer *entrar* al interior de la superficie, *salir* al exterior de la superficie o *mantenerse* sobre la superficie. Vamos a dividir la superficie en pequeños elementos de superficie a los que vamos a asignar un



² Ver la sección sobre análisis matemático de campos.

valor dS y una dirección y sentido dado por la perpendicular a la superficie dS y sentido hacia afuera de la superficie dS. En este contexto la cantidad

$$d\overline{r} \bullet d\overline{S} = [\overline{u}(x, y, z, t_0) \bullet d\overline{S}]dt$$
 (1)

representa el volumen de fluido que ha entrado o salido *a través de la superficie* en el punto asociado a dS. Si u(x,y,z,t) y dS son perpendiculares no hay ni entrada ni salida de fluido. Si multiplicamos la expresión anterior por la densidad en el punto correspondiente tendremos la masa de fluido que ha entrado o salido de la superficie. Si integramos la expresión anterior en la variable dS tendremos la masa de fluido neta que ha entrado o salido del volumen limitado por la superficie S. Asignando a la masa saliente un valor positivo y a la entrante negativo; debido a la elección en la dirección del vector elemento de superficie dS, hacia el exterior del volumen cerrado limitado por S. Si en el volumen interior de la superficie S no puede haber procesos de creación o destrucción de masa, entonces la masa que sale o entra a través de S debe estar compensada con la disminución o aumento de la masa de fluido en el volumen limitado por S y en el mismo instante dt

$$\begin{split} \left[\oint \rho(x,y,z,t_0)\overline{u}(x,y,z,t_0)\bullet d\overline{S}\right] dt + \left[\oint \rho(x,y,z,t_0+dt) dV - \oint \rho(x,y,z,t_0) dV\right] &= 0 \rightarrow \\ \left[\oint \rho(x,y,z,t_0)\overline{u}(x,y,z,t_0)\bullet d\overline{S} + \oint \frac{\partial \rho}{\partial t}\bigg|_{t=t0} dV\right] dt \rightarrow \\ \oint \rho(x,y,z,t)\overline{u}(x,y,z,t)\bullet d\overline{S} + \oint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV &= 0 \end{split}$$

y según el teorema de la divergencia, podemos transformar la integral de superficie en una de volumen así

$$\oint \rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S} = \oint \overline{\nabla} \bullet \left[\rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \right] dV$$

y por tanto, combinando los dos resultados, y al ser la relación válida para cualquier volumen llegamos a la ecuación diferencial de continuidad.

$$\begin{split} \oint \overline{\nabla} \bullet \Big[\rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \Big] dV + \oint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV &= 0 \rightarrow \\ \overline{\nabla} \bullet \Big[\rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \Big] + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{split}$$

El planteamiento hecho para la conservación de la masa se puede ampliar fácilmente para otras magnitudes físicas sometidas también a principios de conservación. La materia que atraviesa la superficie cerrada, además de masa, también transporta impulso mecánico, impulso angular y energía. Si multiplicamos la expresión (1) anterior por la densidad y por la componente x de la velocidad del fluido, ambos en el punto correspondiente, tendremos la cantidad de movimiento en la dirección x que ha entrado o salido de la superficie. En este caso en el volumen interior de la superficie S si que hay procesos de creación o destrucción de impulso mecánico debidos a las fuerzas que actúan sobre el sistema : la presión distribuida sobre al superficie S y la gravedad distribuida en el volumen acotado por S. En este caso el impulso

mecánico del fluido que atraviesa S en la dirección x mas la modificación del impulso mecánico del fluido en la dirección x en dicho volumen, no cancelan; sino que debe ser igual al impulso mecánico en la dirección x generado por las fuerzas en el fluido acotado por S; todo evaluado en el mismo instante dt

$$\begin{split} \left[\oint \rho(x,y,z,t_0) u_x \overline{u}(x,y,z,t_0) \bullet d\overline{S} \right] dt + \\ \left[\oint \rho(x,y,z,t_0+dt) u_x(x,y,z,t_0+dt) dV - \oint \rho(x,y,z,t_0) u_x(x,y,z,t_0) dV \right] = \\ dt \left[-\oint p\overline{e}_x \bullet d\overline{S} + \oint \rho\overline{e}_x \bullet \overline{g} dV \right] \to \end{split}$$

$$\oint \left[\rho(x,y,z,t) u_x \overline{u}(x,y,z,t) + p \overline{e}_x \right] \bullet d\overline{S} + \oint \left[\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} - \rho \overline{e}_x \bullet \overline{g} \right] dV = 0$$

donde e_x es un vector unitario en la dirección positiva del eje de coordenadas x que utilizamos para proyectar las fuerzas sobre dicho eje. Aplicando nuevamente el teorema de la divergencia tenemos, para todas las componentes

$$\begin{split} &\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} - \rho \bar{e}_x \bullet \bar{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t) u_x \bar{u}(x, y, z, t) + p \bar{e}_x \right) = 0 \\ &\frac{\partial \rho u_y}{\partial t} - \rho \bar{e}_y \bullet \bar{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t) u_y \bar{u}(x, y, z, t) + p \bar{e}_y \right) = 0 \\ &\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} - \rho \bar{e}_z \bullet \bar{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t) u_z \bar{u}(x, y, z, t) + p \bar{e}_z \right) = 0 \end{split}$$

ecuaciones que expresan la conservación del impulso mecánico. La parte a la izquierda del signo "+" de las ecuaciones se puede poner fácilmente en forma vectorial. En la parte derecha, los argumentos sobre los que actúa la divergencia son vectores que se pueden organizar como columnas de una matriz de dos índices i,j así $(\delta_{ij}$ símbolo de kronecker, δ_{ij} =1 si i=j , =0 si no)

$$\begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{pmatrix} = (\tau_{ij}) = \mathbf{\tau}; \quad \tau_{ij} = \rho u_i u_j + p \delta_{ij}$$

y podemos expresar las ecuaciones utilizando el álgebra vectorial y de matrices como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \right] - \rho \overline{g}(x, y, z) + \overline{\nabla} \bullet \mathbf{\tau} = 0$$

$$\overline{\nabla} \bullet \mathbf{\tau} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \begin{bmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{bmatrix}$$

la matriz introducida no hace referencia a ningún cambio de coordenadas y tiene unidades de presión. Matemáticamente es un tipo de número compuesto denominado *tensor*. La expresión anterior supone una ampliación del concepto de divergencia, que se aplica no solo a vectores, sino también a tensores; lo mismo es aplicable al teorema integral de la divergencia. En este caso, la divergencia de un tensor es un vector. El lector no debe ver la exposición hecha como un mero juego matemático. El tensor introducido es un objeto de la

mayor importancia y veremos que el rozamiento interno en fluidos añade nuevos términos a este tensor. Las tensiones internas en un sólido elástico también se representan mediante un tensor similar; de hecho este es el origen físico de la palabra "tensor".

Sistema de ecuaciones para un fluido sin rozamiento interno.

Por supuesto los resultados encontrados en base a la 2ª Ley de Newton y en base a los principios de conservación deben ser *compatibles*. De modo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para la hidrodinámica de un fluido sin rozamiento interno

$$\rho\left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right) \overline{u} + \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\overline{\nabla} p(x, y, z, t) + \rho \overline{g}(x, y, z)$$

$$\overline{\nabla} \bullet \left[\rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t)\right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} - \rho \overline{e}_x \bullet \overline{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t) u_x \overline{u}(x, y, z, t) + p \overline{e}_x\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho u_y}{\partial t} - \rho \overline{e}_y \bullet \overline{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t) u_y \overline{u}(x, y, z, t) + p \overline{e}_y\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} - \rho \overline{e}_x \bullet \overline{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t) u_z \overline{u}(x, y, z, t) + p \overline{e}_z\right) = 0$$

Si hacemos el producto escalar de la 2ª ecuación por el campo de velocidades vectorial *u* y sumamos con la primera ecuación tenemos

$$\rho\left(\overline{u}\bullet\overline{\nabla}\right)\overline{u}+\overline{u}\left(\overline{\nabla}\bullet\left[\rho\overline{u}\right]\right)+\rho\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\overline{u}=-\overline{\nabla}p+\rho\overline{g}\to$$

$$\left(\rho\overline{u}\bullet\overline{\nabla}\right)\overline{u}+\overline{u}\left(\overline{\nabla}\bullet\left[\rho\overline{u}\right]\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\overline{u}\right]=-\overline{\nabla}p+\rho\overline{g}$$

particularizando para la componente x

$$(\rho u \bullet \overline{\nabla}) u_x + u_x (\overline{\nabla} \bullet [\rho u]) + \frac{\partial}{\partial t} [\rho u_x] = -[\overline{\nabla} p] \bullet e_x + \rho \overline{g} \bullet e_x$$

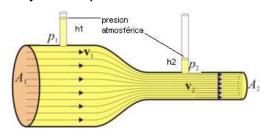
utilizando las relaciones del apéndice matemático tenemos

que nos lleva a la 3^a ecuación en la componente x, demostrando de esta manera la compatibilidad del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho u_x \right] - \rho \overline{g} \bullet \overline{e}_x + \nabla \bullet \left(\rho u_x \overline{u} + p \overline{e}_x \right) = 0$$

VISUALIZACIÓN y EJEMPLOS

Flujo incompresible en el Tubo de Venturi



La imagen representa una tubería que se estrecha, atravesada por agua en movimiento estacionario. Note el lector que el estrechamiento del tubo es progresivo y no abrupto, de modo que no provoque vórtices, turbulencias o rotaciones del fluido como se indicó en la introducción. Por tanto el campo de

velocidades se supone irrotacional. Las líneas del campo de velocidades se adaptan a la forma de la tubería y en estado estacionario representa la trayectoria que seguiría una partícula-test. Los tubos de medida de arriba son de un diámetro muy pequeño, en ellos el líquido está en reposo; una partícula-test nunca acaba en ellos. Estos tubos miden la presión según la expresión p_1 - p_{atm} - pgh_1 , p_2 - p_{atm} - pgh_2 , donde p_{atm} es la presión atmosférica y la suponemos aproximadamente igual en los puntos señalados en el dibujo. En rigor en esos puntos la presión atmosférica no es la misma debido a la altura de la correspondiente columna de aire, pero debido a la baja densidad del aire y al alto valor de la presión atmosférica la aproximación está justificada.

Según el dibujo la altura de las correspondientes columnas h_1,h_2 respecto al borde del tubo es distinta y por tanto las presiones p_1,p_2 son distintas. Si suponemos que el fluido mantiene constante su densidad se puede aplicar la ecuación de *Bernoulli* entre dos puntos cualesquiera del fluido

$$\Delta(\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho V) = 0$$

Por otra parte, si tomamos una superficie cerrada de integración igual al lateral del tubo y sus secciones transversales de área A1 y A2, la ecuación de conservación de la masa se transforma en

$$\oint \rho(x,y,z,t)\overline{u}(x,y,z,t) \bullet d\overline{S} = \oint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 = \rho \left[\int \overline{u}(x,y,z,t) \bullet d\overline{A}_1 - \int \overline{u}(x,y,z,t) \bullet d\overline{A}_2 \right]$$

ya que la densidad es una constante y en el lateral del tubo el campo de velocidades es perpendicular a la superficie y por tanto no hay flujo de fluido por esta superficie. Si suponemos la velocidad del fluido es aproximadamente la misma en todos los puntos de una sección transversal entonces la relación anterior se transforma en

$$\rho(u_2 A_2 - u_1 A_1) = 0 \rightarrow u_2 A_2 = u_1 A_1$$

dado que las velocidades son perpendiculares a las superficies en A₁ y A₂. Aplicando la ecuación de *Bernouilli* entre dos puntos cualquiera a ambos lados del estrechamiento tenemos

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 + \rho V_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_2 + \rho V_2 = \frac{1}{2}\rho u_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 + p_2 + \rho V_2$$

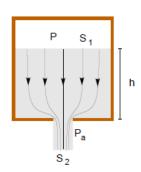
$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] = p_2 - p_1 + \rho \left(V_2 - V_1\right)$$

El potencial gravitatorio se puede tomar V = gh en este caso, y el origen de alturas h puede ser el eje central del tubo. El cambio de potencial gravitatorio a ambos lados es un valor *acotado* proporcional a la diferencia entre la *raíz cuadrada* del área A_1 y la raíz cuadrada del área A_2 ; de modo que si la relación de superficies A_1/A_2 y la velocidad del fluido u_1 son relativamente grandes, deben ser esencialmente la presión y el término asociado a la velocidad los que balanceen la ecuación anterior:

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \approx p_2 - p_1$$

dado que $A_1 > A_2$ resulta que $p_1 > p_2$, tal como indica el dibujo.

Velocidad de salida del fluido de un depósito



La imagen adjunta representa un depósito de fluido con un área transversal S_1 . En la zona sin fluido hay aire a presión P. El fluido sale por el agujero del fondo de área S_2 con una presión igual a la presión atmosférica P_a . Tal como se hace el planteamiento, el movimiento de este fluido no es estacionario y no se verifica $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$ para cualquier

punto (x,y,z); pero si el orificio de salida es relativamente pequeño, la caída del nivel de fluido se puede considerar

relativamente lenta de modo que la parcial respecto al tiempo del campo de velocidades se puede despreciar. Podemos ver esto aplicando la conservación de la masa a una superficie cerrada definida por la superficie del depósito y las áreas S_1 en la superficie del fluido y S_2 en la salida

$$u_2 S_2 = u_1 S_1 \quad S_1 \implies S_2 \rightarrow u_1 \approx 0 \rightarrow \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \approx 0$$

Otra situación posible es el caso en que el fluido evacuado se compensa llenando el depósito de modo que la altura h se mantenga constante. Por otra parte, el estrechamiento brusco S_2 puede producir turbulencias, salvo que el movimiento del fluido sea relativamente lento.

En estas condiciones podemos aplicar la ecuación de Bernouilli para un punto en la superficie del líquido y otro en el agujero de salida y calcular la velocidad de salida del fluido

$$p + \rho gh = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_{atm} \rightarrow u_2 = \sqrt{2\frac{p - p_{atm}}{\rho} + 2gh}$$

Si la presión interna p es muy pequeña es posible que la velocidad de salida del fluido se anule y el fluido se mantenga en equilibrio hidrostático. Esto es justamente lo que ocurre en la experiencia de Torricelli con $p\approx0$

$$u_2 = 0 \rightarrow 2 \frac{p - p_{atm}}{\rho} + 2gh = 0 \rightarrow p_{atm} = p + \rho gh$$

Por otra parte, el flujo de salida es similar al que cae de un grifo casero. El lector puede comprobar que el chorro se va haciendo mas estrecho al caer. Si recurrimos otra vez a la ecuación de Bernouilli para dos puntos, arriba y abajo del chorro

$$\frac{1}{2}\rho {u_{arriba}}^{2} + p_{atm} + \rho V_{arriba} = \frac{1}{2}\rho {u_{abajo}}^{2} + p_{atm} + \rho V_{abajo}$$

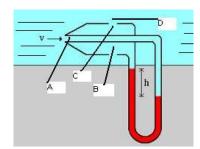
donde aproximamos que todo el chorro está a la presión atmosférica por razones que se discutieron en el caso del tubo de Venturi. Dado que el potencial gravitatorio V es superior arriba que abajo, la velocidad arriba debe ser menor que abajo. Aproximando la ley de conservación de la masa para la correspondiente superficie de integración formada por las secciones horizontales S_{arriba} , S_{abajo} y la superficie lateral del chorro

$$u_{arriba}S_{arriba}\approx u_{abajo}S_{abajo}; u_{arriba}\!<\!u_{abajo}\!\rightarrow\!S_{arriba}\!>\!S_{abajo}$$

Sin embargo el cálculo se trata de una aproximación ya que as líneas de corriente en el chorro no son perpendiculares a las secciones horizontales S_{arriba} , S_{abajo} .

El resultado sobre la velocidad de salida del fluido es aplicable en caso de que el agujero de evacuación no esté en el fondo del depósito, sino a una lado. En este caso *h* representa la altura entre la superficie del fluido y el agujero de evacuación.

Tubo de Pitot



El dispositivo de la imagen forma un tubo abierto en las zonas A,ByC. Cuando el líquido interno del tubo coloreado en rojo, que puede ser mercurio, está en equilibrio aparece una diferencia de alturas en las dos ramas del codo. Esto se debe a diferencia de presiones en las ramas A y B-C del tubo. En la rama B-C del tubo el fluido (en azul) está en reposo dentro del tubo a la presión P_B , aproximadamente

igual a $P_{\rm C}$, que debe ser la misma que fuera del tubo, debido a la situación estática dentro del tubo. Por otra parte, en la rama A el fluido (azul) también está en reposo. Si el tubo es suficientemente "aerodinámico" y no provoca turbulencias en la corriente, que suponemos estacionaria; entonces podemos aplicar el teorema de Bernouilli así: $p_{\scriptscriptstyle A}=\frac{1}{2}\rho u^2+p_{\scriptscriptstyle B}$ donde despreciamos el

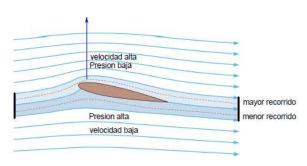
efecto de la gravedad y suponemos que la velocidad del fluido es la misma en toda la sección recta del tubo, tal como hicimos en el tubo de Venturi. La

ecuación anterior relaciona dos puntos: el punto A y otro punto exterior al tubo como puede ser el D. La diferencia de presiones Pa-Pb se puede aproximar por la diferencia de alturas del fluido rojo; de modo que una medida de esta altura equivale a una medida de la velocidad del fluido

$$p_A - p_B = \rho_p gh = \frac{1}{2} \rho u^2 \rightarrow u = \sqrt{2 \frac{\rho_p}{\rho} gh}$$

donde ρ_p es la densidad del fluido rojo del tubo de pitot y ρ es la densidad del fluido que queremos medir. El tubo de pitot se utiliza en aviones para medir la velocidad del aire.

Sustentación



La imagen adjunta representa, en una vista de perfil, las líneas de una corriente estacionaria de aire sorteando un objeto sólido con forma de ala. Note el lector que el campo de velocidades del aire se ha dibujado con el criterio heurístico señalado antes para una corriente de fluido que se mueve suavemente y

sin turbulencias en régimen laminar. Las líneas de corriente tienden a rodear suavemente los obstáculos o límites que dicha corriente va encontrando. Por otro lado, experimentalmente existe un margen en que el aire se comporta como un fluido incompresible de densidad constante en relación al movimiento de sus corrientes. Podemos analizar la conservación de la masa en un tubo de corriente limitado por los dos segmentos negros de forma análoga a como se hizo en el caso del tubo de Venturi. Vemos en la imagen el tubo dividido en dos partes. La parte inferior formada por las líneas de corriente que pasan por debajo del ala y la parte superior formada por las líneas de corriente que pasan por encima del ala. Imaginemos en el instante t hay una serie de partículas-test alineadas con el segmento negro de la izquierda. Después de cierto tiempo estas partículas-test deben llegar simultánemente alineadas con el segmento negro de la derecha. La conservación de la masa exige esto para un flujo estacionario e incompresible. De lo contrario habría acumulación o pérdida de masa en el interior del tubo y el comportamiento no sería estacionario. Evidentemente, dado que las líneas superiores del tubo recorren una distancia mayor que las líneas inferiores, para que las partículas-test lleguen al mismo tiempo la velocidad del aire debe ser mayor por encima que por debajo del ala.

Podemos hacer una aplicación de la ecuación de Bernouilli tomando dos líneas de corriente que en la zona del segmento de la izquierda estén muy cercanas una a la otra, pero que en la zona del ala acaben separándose: una por la parte superior del ala y otra por la parte inferior. Por tanto para un punto justo sobre el ala y para otro justo debajo del ala tenemos, despreciando el término gravitatorio asociado al grosor del ala

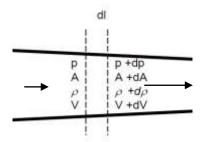
$$\frac{1}{2}\rho u_{\sup}^{2} + p_{\sup} = \frac{1}{2}\rho u_{\inf}^{2} + p_{\inf}$$

lo que implica una mayor presión en la parte inferior del ala que en la parte superior, y por tanto aparece una fuerza en sentido ascendente.

El ángulo del ala respecto a la corriente de aire es importante en la dinámica, de modo que si el ángulo de ataque es muy grande se pueden generar vórtices o remolinos de aire en la parte superior del ala que actúan en detrimento del empuje ascendente. En casos extremos el avión cae por pérdida de este empuje y se dice que "ha entrado en pérdida"; ha perdido el empuje ascendente y es una situación muy difícil de controlar. Si el ángulo del ala es muy paralelo a la corriente de aire el empuje ascendente depende de que dicha corriente sea lo suficientemente rápida, en caso contrario un avión puede compensarlo aumentando la velocidad respecto al viento al acelerar sus motores.

Por último, es posible que la velocidad del aire en la parte superior del ala llegue a la velocidad del sonido y en este caso el comportamiento dinámico del aire se muestra como un "muro" para el avión denominado barrera del sonido. Muro que es posible superar, generando el avión en el proceso ondas de choque. Cuando las corrientes de aire sobre el ala se mueven próximas a la velocidad del sonido es cuando la hipótesis de incompresibilidad en la dinámica de las corrientes de aire deja de tener validez y se habla de flujos supersónicos; con un comportamiento físico diferente. El diseño de las alas de los aviones supersónicos suele ser en forma de triángulo y menos gruesas que las del resto de los aviones.

Flujo compresible. Movimiento subsónico y supersónico.



En el caso del tubo de Ventura vimos el caso de una corriente de fluido incompresible atravesando un estrechamiento y las consecuencias derivadas del principio de conservación de la masa y de la ecuación de Euler. En este caso vamos a suponer un fluido compresible moviéndose en régimen estacionario que puede modificar su densidad a medida que circula por una tubería de sección

variable como representa el dibujo. Debido al carácter estacionario, la cantidad de masa que entra desde la izquierda debe ser la misma que sale por la derecha en cualquier instante de tiempo. El principio de conservación de la masa permite encontrar una relación entre las variaciones de las magnitudes afectadas : densidad ρ , velocidad v y área de la sección del tubo A

$$\rho vA = (\rho + d\rho)(v + dv)(A + dA) \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

por otro lado, podemos integrar la ecuación de Euler sobre un elemento de línea de corriente *dl.* Si despreciamos el término asociado a la gravedad tenemos

$$\frac{1}{\rho}\nabla p + \bar{a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\rho}\nabla p + \bar{a}\right) \bullet d\bar{l} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{\rho} + vdv = 0$$

Eliminando ρ de las ecuaciones anteriores tenemos

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{v \, dv}{\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}}$$

Si consideramos que el tubo está aislado adiabáticamente, o la velocidad del fluido es tan grande que apenas hay pérdida de calor en el contacto con las paredes, entonces podemos suponer que cada unidad de masa del fluido que se mueve en el tubo sigue un *proceso adiabático o isentrópico*. Para el caso en que el fluido se aproxime a un gas ideal, existe una constante K del proceso adiabático que verifica

$$p = K\rho^{\gamma} \Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = K\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma p\rho^{-\gamma}\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho} = c^{2}; \quad \gamma = \frac{C_{p}}{C_{v}}$$

donde c es la velocidad del sonido como se vio en [2] y γ es una constante igual a la división entre las capacidades caloríficas del fluido a presión constante y a volumen constante. Sustituyendo este último resultado en la penúltima ecuación tenemos

$$\begin{array}{c|c}
\hline
A \\
\hline
\rho_A = \rho_1 \\
\hline
I_A = I_1 \\
\hline
V_1 = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
\hline
B \\
\rho_2 = \rho_B \\
\hline
I_2 = I_B \\
\hline
V_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
\hline
A \\
A \\
\hline
A \\
\hline
\end{array} = \begin{pmatrix} v^2 \\ c^2 - 1 \end{pmatrix} \frac{dv}{v}$$

En el caso incompresible del tubo de Venturi un estrechamiento del tubo dA < 0, conduce a un aumento de la velocidad del fluido dv>0 y un ensanchamiento a una disminución de la velocidad. En el caso compresible descrito por la ecuación anterior esto sigue siendo cierto, pero solamente si el gas se mueve a una velocidad inferior a la del sonido v<c. Si el gas se mueve a una velocidad superior a la del sonido, entonces un estrechamiento del tubo conduce a una disminución de la velocidad y un ensanchamiento del tubo conduce a un aumento de la velocidad. Este aumento de velocidad en el flujo se puede conseguir efectivamente y se utiliza en las toberas para la propulsión de cohetes. El dibujo representa un diseño de tobera. En la parte A se encuentra el motor donde se realiza la reacción química del carburante que genera gases en régimen subsónico, pero a medida que avanzan por el estrechamiento llegan a alcanzar, en la parte mas estrecha, la velocidad del sonido. A partir de aquí el flujo entra en régimen supersónico y sigue aumentando su velocidad a medida que avanza por el ensanchamiento.

Equilibrio Geostrófico

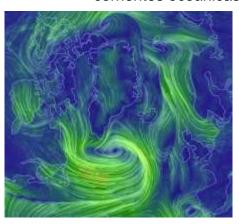
Si en un fluido, como el aire, hay una diferencia de presiones entre dos puntos, normalmente el fluido se mueve de la zona de mayor presión a la de menor. En un sistema de coordenadas no inercial, como la tierra, este movimiento afecta a la componente dinámica de *Coriolis*, que produce una desviación en el camino recto desde la zona de alta presión a la de baja presión. A medida que el fluido se mueve aumenta su velocidad y por tanto también la desviación por efecto Coriolis, de modo que es posible que se llegue a un equilibrio entre la velocidad

del fluido u y el gradiente de presión que resulte en una aceleración nula del fluido respecto del sistema de coordenadas no inercial : $\nabla p + 2\rho w \times u = 0$ donde hemos despreciado los términos asociados a la aceleración centrífuga y la gravedad. Si hacemos el producto escalar por la velocidad del fluido tenemos

$$\overline{u} \bullet \nabla p + \overline{u} \bullet (2\rho \overline{w} \times \overline{u}) = 0 \rightarrow \overline{u} \bullet \nabla p = 0$$

y por tanto, en esta situación de equilibrio que hemos postulado, el viento se mueve perpendicularmente al gradiente de presión, es decir, el viento se mueve paralelamente a las superficies de presión constante o *isobaras*. Este resultado se comprueba experimentalmente con cierta precisión en casos en que el radio de curvatura de las líneas de corriente es alto; cuando esto no es así, como en el caso del viento cercano al ojo de un huracán, la aproximación del viento geostrófico deja de ser útil.

Si imaginamos un centro de bajas presiones en el hemisferio norte de la tierra, dado que el gradiente de presión se dirige hacia las zonas de mayor presión, y teniendo en cuenta la dirección del giro de la tierra w, la ecuación de equilibrio geostrófico predice un movimiento de giro del aire en sentido anti-horario. En el caso de un centro de altas presiones el sentido de giro sería horario, ya que cambia de signo el gradiente de presión. Al comparar el sentido de giro estamos suponiendo un reloj de agujas sobre la superficie de la tierra. Podemos hacer el transporte paralelo de los vectores a un centro de presión similar de las antípodas y las ecuaciones se seguirán manteniendo. Salvo que un reloj en la superficie de las antípodas gira en sentido contrario a nuestro reloj inicial, y por eso el sentido de giro del aire alrededor de los centros de bajas y altas presiones en el hemisferio norte y en el hemisferio sur son opuestos. Un caso extremo de centro de bajas presiones son las corrientes en chorro polares. Las zonas polares se comportan como centros de baja presión de aire debido a su baja temperatura. Son corrientes de aire que circulan de oeste a este tanto al norte como al sur alrededor de las zonas polares. Un avión comercial en la dirección Tokio-Los Angeles, (oeste-este) puede reducir su tiempo de vuelo en 30 minutos en una ruta que aproveche el viento de cola de la corriente de chorro respecto de la ruta geodésica de mínima distancia o del círculo máximo entre dos puntos. Estas corrientes también se generan en otros planetas, como es el caso de Júpiter, conformado su imagen en bandas característica. El equilibrio geostrófico también se presenta en algunas corrientes oceánicas.



El equilibrio geostrófico se suele considerar una primera aproximación válida para el viento real. Sin embargo existen factores adicionales a tener en cuenta como la fricción del viento sobre la superficie. Debido al proceso de calentamiento global se ha podido constatar en Noviembre de 2014 que el centro de bajas presiones en el hemisferio norte asociado normalmente al polo norte geográfico se ha desplazado a *Groenlandia*. Esto supone una relocalización de la corriente de chorro alrededor de Groenlandia y un cambio en el comportamiento del clima del que seremos testigos. La imagen adjunta muestra la situación.

El golpe de ariete



La imagen representa dos depósitos de agua conectados por una tubería de sección constante con una llave de paso en B. Si el agua fluye por la tubería y cerramos la llave de paso, entonces es preciso que todo el líquido de la tubería pase a estar en reposo. Esto supone un cambio en el

impulso mecánico del agua que podemos estimar por $mv = \rho SLv$, siendo m la masa de líquido en el tubo, ρ la densidad del agua S la sección recta del tubo, L la longitud del tubo y L la velocidad del líquido antes de cerrar la llave. Este cambio necesita de una fuerza que debe proceder de una sobre-presión en la válvula. Si el cierre de la llave se realiza en un tiempo L0 durante el que actúa una sobre-presión media L1/2, donde L2/2 representa el L2/2 máximo de sobre-presión en el proceso tenemos

$$\frac{\Delta p}{2}ST = \rho SLv \Rightarrow \Delta p = 2\frac{\rho Lv}{T}$$

Sin embargo, si el cierre de la válvula es brusco la ecuación anterior resulta en una sobre-presión máxima infinita, lo cual no es aceptable. En la práctica, si se cierra bruscamente la tubería aparece el fenómeno del *golpe de ariete* que resulta en una especie de "eco de presión" que puede dañar la instalacion. La física de este caso pasa por considerar ondas de presión propagándose a través del agua y el tubo. La sobrepresión en B es una alteración del campo de presiones y de las tensiones en el tubo metálico que se propagan como ondas elásticas llegando hasta A y rebotando para volver a B. Este es el origen de la sensación de eco cuando se experimenta el fenómeno. Si llamamos c a la velocidad de propagación de esta onda podemos expresar la ecuación anterior como

$$\Delta p = \frac{\rho 2Lv}{T} = \frac{\tau}{T} \rho c v$$

donde τ es el tiempo que tarda la onda de presión/tensión en retornar a la llave de paso en B. Aparecen dos casos

 $1-T > \tau$, en este caso el cierre de la llave se considera lento y es válida para la sobre-presión la fórmula

$$\Delta p = 2 \frac{\rho L v}{T}$$

2-T $\leq \tau$, en este caso, correspondiente al golpe de ariete la sobrepresión máxima es

$$\Delta p = \rho c v$$

ya que el proceso de frenado del agua en el tubo no puede ser inferior a τ segundos.

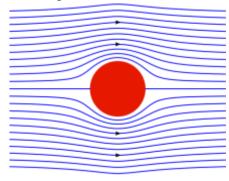
Cavitación y Sono-Luminiscencia

En fluidos sometidos a fuertes cambios de presión, si dicha presión está cercana a la presión de vapor se suelen formar burbujas de vapor. Estas burbujas se muevan hacia zonas de mayor presión implosionando y generando ondas de choque que pueden dañar la superficie de los metales. Estas burbujas necesitan de algún agente donde formarse, como superficies metálicas, impurezas en el fluido, etc. La temperatura es un factor determinante para el fenómeno de la cavitación, ya que la presión de vapor depende de la temperatura. La cavitación es una causa típica de la erosión o corrosión de las hélices que impulsan los barcos modernos. Un flujo que circule a gran velocidad por una arista afilada está sometido a fuertes cambios de presión, debido a la relación entre la curvatura de líneas de corriente y gradientes de presión, lo que facilita la aparición de cavitación.

Por otra parte, si las burbujas formadas en la cavitación se ven afectadas por ondas ultrasónicas, es decir, ondas asociadas a rápidos cambios de presión en el fluido; entonces si las ondas son suficientemente intensas es posible inducir un rápido colapso de la burbuja de cavitación generándose destellos luminosos al final del colapso. Se supone que en el final del colapso parte de la burbuja se convierte en plasma electrónico a temperaturas locales de 20.000 Kelvin y que al recombinarse con los átomos se genera el destello.

PARADOJA DE D'ALEMBERT

Todos conocemos por experiencia que debemos vencer una resistencia si queremos movernos en contra del viento. Cualquiera que haya utilizado una bicicleta sabe por experiencia el efecto de *arrastre* debido al viento. Al moverse a favor del viento el ciclista reduce su esfuerzo y al moverse en contra el ciclista debe aumentar su esfuerzo para mantener una velocidad dada. Sin embargo en 1752 el matemático y físico *Jean le Rond D'Alembert* realizó un



estudio sobre este problema, basado en hipótesis aparentemente generales, que concluye necesariamente (matemáticamente) en la inexistencia de la fuerza de arrastre.

La imagen representa un cilindro moviéndose a velocidad constante visto de perfil y las líneas de corriente de un flujo laminar y estacionario que lo rodean. Las hipótesis que utilizaremos son: fluido *incompresible*, campo de

velocidades *irrotacional* y *rozamiento nulo* ; tanto el rozamiento interno del fluido (viscosidad) como del fluido contra el cilindro.

Teoría del flujo potencial

Si el campo de velocidades de un fluido es *irrotacional*, entonces es posible encontrar un campo escalar de modo que el campo de velocidades es igual al gradiente de este campo escalar. Esto es una consecuencia inmediata del teorema del rotacional

$$\begin{split} & \oint \overrightarrow{u}(x,y,z,t) \bullet d\overrightarrow{l} = \int\limits_{1}^{2} \overrightarrow{u}(x,y,z,t) \bullet d\overrightarrow{l} + \int\limits_{2}^{1} \overrightarrow{u}(x,y,z,t) \bullet d\overrightarrow{l} = \int \left[\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{u}(x,y,z,t) \right] \bullet d\overrightarrow{S} = 0 \\ & \int\limits_{1}^{2} \overrightarrow{u}(x,y,z,t) \bullet d\overrightarrow{l} = \int\limits_{1}^{2} \overrightarrow{u}(x,y,z,t) \bullet (d\overrightarrow{l}') = \varphi(x_{2},y_{2},z_{2},t) - \varphi(x_{1},y_{1},z_{1},t) \end{split}$$

si el rotacional es nulo, entonces la integral sobre cualquier línea cerrada del campo de velocidades se anula también. Descomponiendo esta integral en función de dos puntos arbitrarios 1 y 2 de la línea de integración, tenemos que el valor de estas integrales parciales no dependen de la trayectoria entre 1 y 2, y por tanto solo pueden depender de los puntos inicial y final. Si expresamos el resultado anterior en términos diferenciales

$$\begin{split} \overline{u}(x,y,z) \bullet d\overline{l} &= d\varphi(x,y,z) \to \left(u_x,u_y,u_z\right) \bullet \left(dx,dy,dz\right) = d\varphi(x,y,z) \to \\ \overline{u}(x,y,z) &= \overline{\nabla} \varphi \end{split}$$

Por otra parte, según el álgebra expuesta en la sección de análisis matemático tenemos

$$\overline{\nabla}\times\overset{-}{u}(x,y,z,t)=\overline{\nabla}\times\left(\overline{\nabla}\varphi(x,y,z,t)\right)=\left(\overline{\nabla}\times\overline{\nabla}\right)\varphi=0$$

de acuerdo con la condición de rotacional nulo. Por tanto necesariamente todo campo de velocidades irrotacional se puede poner como el gradiente de una función escalar ϕ denominada potencial.

Por otro lado, si el fluido es incompresible, entonces la ley de conservación de la masa indica que la divergencia del campo de velocidades debe ser nulo, y por tanto la función potencial φ debe cumplir lo siguiente

$$\overline{\nabla} \bullet \left[\rho \overline{u}(x, y, z, t) \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \ \rho = cons \tan t e \to \overline{\nabla} \bullet \overline{u}(x, y, z, t) = 0$$

$$\overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \varphi(x, y, z, t) = \left[\overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \right] \varphi(x, y, z, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x, y, z, t) = 0$$

que es la ecuación diferencial de *Laplace*. De modo que el potencial φ verifica condiciones matemáticas análogas al campo electrostático y es posible elegir para φ campos similares. Pero a diferencia del campo electrostático, en nuestro caso no existen fuentes ni sumideros del campo (cargas), de modo que las soluciones análogas admisibles en nuestro caso corresponden a *campos de tipo dipolar* con una carga total nula en cada punto del espacio.

Ecuaciones de Euler sin viscosidad para flujo potencial

En la sección sobre la 2ª Ley de Newton aplicada a un fluido obtuvimos el siguiente resultado

$$\frac{\rho}{2}\overline{\nabla}(u^2) + \overline{\nabla}p + \rho\overline{\nabla}V = \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) - \rho\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$$

incluyendo las condiciones de rotacional nulo, flujo potencial y densidad constante/incompresibilidad tenemos, despreciando el término gravitatorio

$$\overline{\nabla} \left[\frac{\rho}{2} (u^2) + p + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = 0$$

y por tanto el interior del corchete debe ser una cantidad que no cambia con las coordenadas espaciales (x,y,z) y a lo sumo depende del tiempo

$$\frac{\rho}{2}(u^2) + p + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t)$$

Movimiento suave del cilindro en la corriente

Suponemos que el cilindro se mueve con velocidad constante v (v_x , v_y , v_z) respecto de un sistema de coordenadas inercial. Este movimiento no produce turbulencias (irrotacional) de modo que las líneas de corriente se van adaptando suavemente a la nueva posición del cilindro y un observador moviéndose con el cilindro observará siempre el mismo campo de velocidades del fluido. Esto significa matemáticamente que, respecto de nuestro sistema de coordenadas, el campo de velocidades en un instante t corresponde a un desplazamiento del campo de velocidades existente en t=0:

$$\overline{u}(x, y, z, t) = \overline{u}(x', y', z', 0) = \overline{u}(x - v_x t, y - v_x t, z - v_x t, 0) \rightarrow$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial v'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} = -(\overline{v} \bullet \overline{v}) \overline{u}$$

donde hemos aplicado la regla de la cadena de derivadas para funciones compuestas. Por otra parte, en la sección de análisis matemático vimos la siguiente relación

 $\overline{v}(t) \times (\overline{\nabla} \times \overline{f}(x, y, z, t)) = \overline{\nabla}(\overline{v}(t) \bullet \overline{f}(x, y, z, t)) - (\overline{v}(t) \bullet \overline{\nabla}) \overline{f}(x, y, z, t)$

en nuestro caso v(t) = v = constante y f = u. Aplicando la condición de rotacional nulo y flujo potencial la ecuación de la derivada parcial anterior queda así

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\nabla} \phi + \overline{\nabla} (v \bullet u) = 0 \longrightarrow \overline{\nabla} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \bullet u \right] = 0$$

ya que se puede conmutar la derivada parcial temporal con el gradiente, ya que afectan a variables independientes. De nuevo, el interior del corchete no depende de las coordenadas (x,y,z) y como mucho depende del tiempo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{v} \bullet \bar{u} = g(t)$$

y por tanto, eliminando la parcial respecto al tiempo de la ecuación de Euler presentada antes tenemos

$$\frac{\rho}{2}(u^2) + p - \rho(\overline{v} \bullet \overline{u}) = f(t) - \rho g(t) \rightarrow p = \rho(\overline{v} \bullet \overline{u}) - \frac{\rho}{2}(u^2) + h(t)$$

donde h(t) es la función del tiempo correspondiente.

Por otro lado, para un observador solidario al cilindro móvil las líneas de corriente del fluido no pueden finalizar ni nacer de la superficie del cilindro. El cilindro no es ni fuente ni sumidero para el fluido. Por tanto si este observador inercial aplicada la ley de conservación de la masa para una <u>superficie fija</u> que coincida con la superficie del cilindro encontrará que la masa que atraviesa un elemento de superficie en el instante dt debe ser igual a cero

$$d\overline{r} \bullet d\overline{S} = [\overline{u}(x, y, z, t_0) - \overline{v}) \bullet d\overline{S}]dt = 0$$
 (1)

donde se ha introducido la *velocidad relativa* con la que el observador aprecia el campo de velocidades del fluido. Si *n* es un vector unitario normal a la superficie del cilindro el resultado se expresa así:

$$\stackrel{-}{n} \bullet \stackrel{-}{u}(x, y, z, t) = \stackrel{-}{n} \bullet \stackrel{-}{v}$$

En la imagen al principio de esta sección el lector puede ver en el centro una línea de corriente que se mantiene recta hasta la superficie del cilindro. En este punto los vectores n,u,v tienen la misma dirección. Si aplicamos el resultado anterior tenemos que en este punto los vectores velocidad u,v coinciden. Por tanto, visto desde el observador inercial que se mueve con el cilindro el fluido en este punto está permanentemente en reposo relativo. Por ser inercial el observador puede aplicar directamente la ecuación de Bernouilli y ver que en

dicho *punto de remanso* (*stagnation point*) existe un máximo de presión; lo cual debe ser cierto también para cualquier otro observador inercial.

Cálculo del arrastre

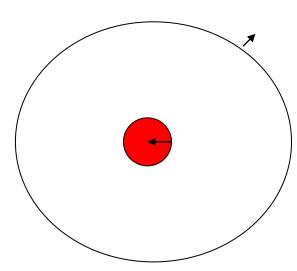
A partir de la presión calculada antes, la fuerza del fluido sobre el cilindro se expresa mediante

$$\overline{F} = -\oint p d\overline{S} = \oint \left[\frac{\rho}{2} (u^2) - \rho (\overline{v} \bullet \overline{u}) - h(t) \right] d\overline{S} = \oint \left[\frac{\rho}{2} (u^2) - \rho (\overline{v} \bullet \overline{u}) \right] d\overline{S} - h(t) \oint d\overline{S}$$

$$\overline{F} = \rho \oint \left[\frac{1}{2} (u^2) - (\overline{v} \bullet \overline{u}) \right] d\overline{S}$$

la función h(t) no depende de las coordenadas (x,y,z) y se puede sacar de la integral. La integral de los elementos vectoriales de superficie es cero³. Podemos analizar la expresión anterior en la componente x multiplicando por un vector unitario en esta dirección

$$\overline{F} \bullet \overline{e}_x = \rho \oint \left[\frac{1}{2} (u^2) - (\overline{v} \bullet \overline{u}) \right] \overline{e}_x \bullet d\overline{S}$$



vamos a utilizar el teorema de la divergencia sobre la expresión anterior. Para ello se necesita un volumen acotado por una superficie; sin embargo vamos a llevar el teorema al límite eligiendo como volumen todo el volumen ocupado por el fluido, limitado por la superficie del cilindro y una superficie exterior tan alejada del cilindro como queramos. Como vimos, el campo de velocidades es de tipo *dipolar*, lo cual supone que , en la superficie lejana es proporcional a r^3 , siendo r la distancia al cilindro, mientras que los elementos de superficie son proporcionales a r^2 . Esto

hace que la contribución de la superficie lejana sea tan pequeño como queramos. Por tanto, aplicando el teorema de la divergencia al primer sumando de la integral anterior

$$-\oint \frac{1}{2} (u^2) \overline{e}_x \bullet d\overline{S} = \oint \overline{\nabla} \bullet \left[\frac{1}{2} (u^2) \overline{e}_x \right] dV$$

y utilizando las relaciones de la sección de análisis matemático

$$\overline{\nabla} \bullet \left[\frac{1}{2} (u^2) \overline{e}_x \right] = \frac{1}{2} \overline{\nabla} u^2 \bullet \overline{e}_x = \frac{1}{2} \left[2 (\overline{u} \bullet \overline{\nabla}) (\overline{u} \bullet \overline{e}_x) \right] = (\overline{u} \bullet \overline{\nabla}) (\overline{u} \bullet \overline{e}_x)$$

³ El lector puede comprobarlo multiplicando la integral escalarmente por un vector constante y aplicando el teorema de la divergencia.

podemos añadir un sumando de valor nulo incluyendo la condición de incompresibilidad y aplicar de nuevo las relaciones citadas de esta forma

$$(\stackrel{-}{u} \bullet \stackrel{-}{\nabla})(\stackrel{-}{u} \bullet \stackrel{-}{e_x}) + (\stackrel{-}{u} \bullet \stackrel{-}{e_x})(\stackrel{-}{\nabla} \bullet \stackrel{-}{u}) = \stackrel{-}{\nabla} \bullet [(\stackrel{-}{u} \bullet \stackrel{-}{e_x}) \stackrel{-}{u}]$$

con lo que la integral correspondiente es

$$-\oint \frac{1}{2} (u^2) \overline{e}_x \bullet d\overline{S} = \oint \overline{\nabla} \bullet \left[\frac{1}{2} (u^2) \overline{e}_x \right] dV = \oint \overline{\nabla} \bullet \left[\overline{u} \bullet \overline{e}_x \right) \overline{u} dV = \oint \left(\overline{u} \bullet \overline{e}_x \right) \overline{u} \bullet d\overline{S}$$

donde hemos vuelto a utilizar el teorema de la divergencia. Con lo que la expresión de la componente *x* de la fuerza es

$$\overline{F} \bullet \overline{e}_x = \rho \phi \left[\left[\overline{u} \bullet \overline{e}_x \right) \overline{u} \bullet \overline{n} \, dS - \left[\overline{v} \bullet \overline{u} \right] \overline{e}_x \bullet \overline{n} \, dS \right] = \rho \phi \left[\left[\overline{u} \bullet \overline{e}_x \right) \overline{u} \bullet \overline{n} - \left[\overline{v} \bullet \overline{u} \right] \overline{e}_x \bullet \overline{n} \right] dS$$

donde el vector n es unitario y es la parte vectorial del vector elemento de superficie dS. Aplicando la condición de que las líneas del campo de velocidades no entran ni salen del cilindro y factorizando tenemos

$$(\overline{u} \bullet \overline{e}_x) \overline{u} \bullet \overline{n} - (\overline{v} \bullet \overline{u}) \overline{e}_x \bullet \overline{n} = (\overline{u} \bullet \overline{e}_x) \overline{v} \bullet \overline{n} - (\overline{v} \bullet \overline{u}) \overline{e}_x \bullet \overline{n} = [\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{e}_x)] \bullet \overline{n}$$

Si multiplicamos la expresión anterior por v_x y sumamos para todas las componentes tenemos

$$\overline{F} \bullet \overline{e}_{x} v_{x} + \overline{F} \bullet \overline{e}_{y} v_{y} + \overline{F} \bullet \overline{e}_{z} v_{z} = \overline{F} \bullet \overline{v} = \rho \phi \left[\overline{u} \times (\overline{v} \times v_{x} \overline{e}_{x}) + \overline{u} \times (\overline{v} \times v_{y} \overline{e}_{y}) + \overline{u} \times (\overline{v} \times v_{z} \overline{e}_{z}) \right] \bullet \overline{n} dS$$

y aplicando las propiedades asociativas del producto escalar y del producto vectorial tenemos

$$\overline{F} \bullet \overline{v} = \rho \phi \left[\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{v}) \right] \bullet \overline{n} \, dS = 0$$

como resultado, el fluido no ejerce ninguna fuerza de arrastre en la dirección del movimiento del cilindro, en contra de la experiencia. Si el desarrollo hecho es consecuencia necesaria, o muy probable, de las hipótesis básicas, entonces hay alguna hipótesis que no es correcta. ¿Cuál es?.

Pese a ser un resultado notable, la paradoja de D´Alembert tuvo un efecto negativo en el desarrollo de la mecánica de fluidos debido a que nadie supo dar con una solución satisfactoria, bién sea en el dominio matemático o en el dominio experimental, durante mas de 150 años. Esto desprestigió durante largo tiempo la disciplina hasta que a principios de siglo el desarrollo de la aeronáutica introdujo nuevas ideas de la mano de *Ludwig Prandtl*. Sin embargo el daño aún se deja sentir en los planes de estudios universitarios en una materia que debería estar a la altura del Electromagnetismo o la Termodinámica y que integra como ninguna otra la base de las matemáticas superiores.

ONDAS SUPERFICIALES EN EL AGUA



Imaginemos una piscina con agua en calma a la que lanzamos un objeto pesado que al caer provoca ondas en la superficie del agua. Las ondas generadas parecen moverse desde el lugar de impacto hacia el exterior. En el impacto, el objeto impactante imprime una velocidad al agua durante el proceso de desalojo. Este movimiento del agua provoca una hondonada en

la zona de impacto durante un cierto tiempo, y no se transmite a toda la masa líquida como en el caso de las ecuaciones de Saint-Venant (mas adelante), sino que se trata solo de un fenómeno superficial. En estas circunstancias las "montañas de agua" no duran mucho y la gravedad obliga a un reflujo del agua evacuada hacia la zona de impacto que está a menor nivel, reflujo que acabará por elevar el nivel de la superficie del agua relativamente al entorno próximo repitiendo de nuevo el proceso. Si esparcimos unas partículas-test como bolitas de poliuretano sobre la superficie del agua podemos ver que se mueven oscilando respecto de un punto medio en la vertical y también en la línea horizontal que pasa por el origen de la onda; revelando así el movimiento del agua en este fenómeno.

Existe un dispositivo de laboratorio, la *cubeta de ondas*, en la que se utilizan ondas superficiales de agua para mostrar comportamientos típicamente ondulatorios con son la *reflexión*, *refracción*, *interferencia* y *difracción*. Estos fenómenos se explican tradicionalmente en base al *principio de Huygens*, pero este principio requiere un *comportamiento lineal de las ondas* en el sistema. Esto significa que si sobre un sistema puedo reproducir dos procesos ondulatorios independientes, también puedo reproducir un proceso ondulatorio que sea, matemáticamente, la suma de los procesos. Las ecuaciones aplicables en este contexto son :

$$\rho(\overline{u} \bullet \overline{\nabla})\overline{u} + \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\overline{\nabla}p + \rho \overline{g}$$
$$\overline{\nabla} \bullet \overline{u} = 0$$

La primera corresponde a la ecuación de Euler y la segunda a la conservación de masa de un fluido incompresible. Supongamos que tenemos dos soluciones de estas ecuaciones que especifican el campo de velocidades y de presiones del fluido : (\boldsymbol{u}_1,p_1) y (\boldsymbol{u}_2,p_2) . Si la ecuación de Euler fuese lineal, entonces las funciones $(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\,p_1+p_2)$ serían también solución; pero vemos claramente que esto no es posible debido que el primer término introduce el valor no compensado siguiente

$$\rho(\overline{u_1} \bullet \overline{\nabla})\overline{u_2} + \rho(\overline{u_2} \bullet \overline{\nabla})\overline{u_1}$$

En cambio la ecuación de conservación de la masa es claramente lineal, si u_1 y u_2 verifican esta ecuación, entonces u_1+u_2 también lo hace.

Si el sistema de ecuaciones anterior puede describir ondas compatibles con el principio de Huygens, entonces debe haber alguna aproximación lineal posible para la ecuación de Euler. Evidentemente la primera alternativa es considerar que para el caso de las ondas superficiales el término no-lineal es

cuantitativamente despreciable en la ecuación de Euler, de modo que tenemos el sistema lineal

$$\rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\overline{\nabla} p + \rho \overline{g}$$

$$\overline{\nabla} \bullet \overline{u} = 0$$

la eliminación del término no lineal es compatible con un *flujo irrotacional*, de modo que podemos considerar que el campo de velocidades deriva del gradiente de una función potencial $\varphi(x,y,z,t)$

$$\overline{\nabla} \left[\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho \, gz \right] = 0$$

$$\overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\overline{u} = \overline{\nabla} \varphi$$

la primera ecuación supone que el argumento del gradiente es una función del tiempo

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho \, gz = f(t)$$

y redefiniendo el potencial ϕ convenientemente tenemos una simplificación equivalente

$$\varphi \to \varphi + \int f(t)dt \to \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho gz = 0$$

para un punto en la superficie del agua coordenadas x,y fijas la coordenada z será una función del tiempo $z_s(t)$ y la ecuación anterior será una función del tiempo

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \bigg|_{s} + p_{s}(t) + \rho g z_{s}(t) = 0$$

dado que podemos considerar que la presión atmosférica en la superficie del agua tiene una variación despreciable en la expresión anterior, podemos considerarla constante. Derivando en el tiempo y teniendo en cuenta que la derivada de $z_{\rm s}$ es la velocidad del fluido en la dirección vertical , y que esta componente de la velocidad deriva del potencial φ tenemos en total

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{s} \right] + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{s} = 0$$

$$\nabla^{2} \varphi = 0$$

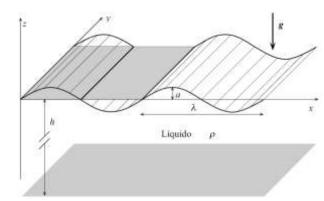
es decir, la ecuación diferencial del potencial (ecuación de *Laplace*) y una condición de contorno que debe cumplir. Note el lector que la condición de contorno también es lineal sobre el potencial de corriente φ .

La solución mas sencilla para el sistema anterior es una *onda* desplazándose en el eje *x* cuya forma funcional es (ver sección sobre Laplaciano en [3])

$$\varphi = f(z)\cos(kx - wt)$$

que introducida en la ecuación de Laplace determina f(z) por medio de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$



dado que para valores de z negativos, es decir en la dirección del fondo, la amplitud de la onda debe disminuir tenemos

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx - wt)$$

y la condición de contorno es

$$\frac{d}{dt} \left[wAe^{kz_s} \sin(kx - wt) \right] + gkAe^{kz_s} \cos(kx - wt) = 0$$

$$wk \frac{dz_s}{dt} Ae^{kz_s} \sin(kx - wt) - w^2 Ae^{kz_s} \cos(kx - wt) + gkAe^{kz_s} \cos(kx - wt) = 0$$

$$\frac{dz_s}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{zs} = kAe^{kz_s} \cos(kx - wt) \Rightarrow$$

$$wk^2 Ae^{kz_s} \sin(kx - wt) - w^2 + gk = 0$$

en las condiciones de aproximación $wk^2A \ll w^2$ o $kA \ll w/k$, es decir, la

$$w = \sqrt{gk} \implies c = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi}\lambda}$$

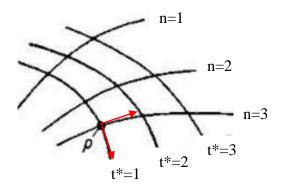
velocidad del fluido (kA) es mucho menor que la velocidad de la onda tenemos

con lo que las ondas de longitud de onda mayor se mueven mas rápido, que las de menor longitud de onda. En general si la frecuencia de la onda es una función no lineal de la longitud de onda se dice que el medio de propagación de las ondas es dispersivo o que la propagación de ondas está sometida a dispersión.

A medida que se consideran longitudes de onda menores hay que considerar el efecto de la tensión superficial, que llega a hacerse preponderante (ondas de capilaridad).

Finalmente el lector puede comprobar que la condición inicial que hemos tomado prescindiendo del término no lineal en la ecuación de Euler supone considerar que la velocidad de la onda es mucho mayor que la velocidad del fluido.

SISTEMA DE COORDENADAS INTRÍNSECO DE UNA CORRIENTE ESTACIONARIA.



En una corrientes estacionaria las líneas de corriente son curvas fijas que no cambian con el tiempo. Esto nos permite utilizarlas en un sistema de coordenadas que sea intrínseco a la corriente. Si en la imagen adjunta las curvas nombradas con el parámetro *u* corresponden a líneas de corriente, siempre podemos crear otro conjunto de líneas *v* que sean perpendiculares a las líneas de

corriente. Si el flujo de corriente presenta simetría plana, esto sería suficiente. En caso contrario, podemos crear otro conjunto de líneas coordenadas w que sean perpendiculares a las líneas u y v en los puntos de cruce correspondientes. Parametrizando convenientemente estas líneas tendríamos un sistema de coordenadas ortogonal, tal como se explica en el apéndice, definido por la propia corriente estacionaria. El sistema de coordenadas planteado está mas cercano a nuestros conocimientos teóricos de lo que pudiese parecer. Recordemos que las líneas de corriente estacionarias son en realidad trayectorias de partículas de fluido. Como tales podemos introducir la 2^a Ley de Newton con las componentes de la aceleración en función de la curva trayectoria : aceleración tangencial y aceleración normal, perpendicular a la anterior (R es la curvatura de la trayectoria):

$$\rho\left(\frac{dv}{dt}\bar{t} + \frac{v^2}{R}\bar{n}\right) = -\nabla p + \rho\bar{g} - \rho\bar{a}_{DI}(t) - \rho\bar{\alpha}\times\bar{r} - \rho\bar{w}\times\left(\bar{w}\times\bar{r}\right) - 2\rho\bar{w}\times\bar{u}$$

donde hemos utilizado la expresión para un sistema de coordenadas no inercial genérico. El desplazamiento elemental de una partícula de fluido se puede expresar por tdt^* , siendo t el vector unitario tangente a la línea de corriente en el punto en que se encuentra la partícula de fluido y vdt un pequeño desplazamiento en la dirección t. Prescindiendo de los efectos no inerciales y de la gravedad, si multiplicamos la expresión anterior por este desplazamiento de la partícula de fluido tenemos

$$\rho \left(\frac{dv}{dt}\dot{t} + \frac{v^2}{R}n\right) \bullet \dot{t}vdt = \rho v \frac{dv}{dt}dt = \rho v dv = -(\nabla p) \bullet \dot{t}vdt = -dp$$

e integrando sobre la línea de corriente correspondiente

$$\int_{A}^{B} v dv + \int_{A}^{B} \frac{dp}{\rho} = 0 = \frac{1}{2} \left(v_{B}^{2} - v_{A}^{2} \right) + \int_{A}^{B} \frac{dp}{\rho} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t^{*}} \left(\frac{1}{2} v^{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$

ecuación que es de interés en *fluidos <u>compresibles</u> barotrópicos*, es decir, aquellos en los que la densidad es variable pero únicamente depende de la presión.

Si multiplicamos ahora la 2ª Ley de Newton por el vector *n* tenemos

$$\rho \frac{v^2}{R} = -(\nabla p) \bullet \vec{n} = -\frac{\partial p}{\partial n}$$

dado que el lado izquierdo de la ecuación es positivo, la variación de presión en la dirección del vector normal debe ser negativa. Dado que el vector normal apunta hacia la posición del radio de curvatura de la línea de corriente, tenemos que la presión en un fluido debe disminuir en la dirección del radio de curvatura de una línea de corriente. Este resultado predice claramente que en el caso de corrientes circulares como remolinos, huracanes....en todos los casos el centro del vórtice tiene una presión menor que los alrededores. En otro caso, el lector puede recuperar la imagen del flujo de sustentación sobre un perfil de ala y comprobar que el presente resultado esta de acuerdo con la existencia de una mayor presión debajo del ala que encima a la vista de la curvatura de las líneas de corriente.

Si multiplicamos escalarmente por el vector *binormal* \boldsymbol{b} , definido como el producto vectorial de \boldsymbol{t} y \boldsymbol{n} , tenemos que la presión en las cercanías de un punto dado no se modifica en la dirección del vector binormal

$$\rho(\frac{dv}{dt}\bar{t} + \frac{v^2}{R}\bar{n}) \bullet (\bar{t} \times \bar{n}) = 0 = -(\nabla p) \bullet \bar{b} = -\frac{\partial p}{\partial b}$$

En el desarrollo se han utilizado derivadas parciales respecto de los parámetros t^* ,n,b. Estos parámetros representan las coordenadas de un punto en el sistema de coordenadas intrínseco de la corriente, de modo que un valor numérico determinado del par (n,b) determina una única línea coordenada t, es decir, una línea de corriente. Los vectores t,n,b, correspondientes al triedro intrínseco de Frenet, forman una base local ortogonal, comentada en el apéndice, asociada al sistema de coordenadas intrínseco de una corriente estacionaria. Las líneas coordenadas de este sistema se pueden definir por las ecuaciones

$$d\vec{r} \times \vec{t} = 0$$
: $d\vec{r} \times \vec{n} = 0$: $d\vec{r} \times \vec{b} = 0$:

Ampliación del contexto de uso del sistema de coordenadas intrínseco

Hemos utilizado el sistema de coordenadas intrínseco para un fluido en movimiento estacionario, de modo que las propias líneas de corriente formen parte de un sistema de coordenadas estable. Sin embargo todavía es posible utilizar este contexto para fluidos en movimiento no estacionario siempre que las líneas de corriente no cambien con el tiempo. De esta forma, una partícula de fluido circula siempre por una línea de corriente determinada, y en un punto dado la velocidad del fluido puede cambiar con el tiempo. Podemos re-escribir las ecuaciones de Euler en este nuevo contexto así

$$\rho(\frac{dv}{dt}\bar{t} + \frac{v^2}{R}n) = \rho\left[(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t^*})\bar{t} + \frac{u^2}{R}n\right] = -\nabla p + \rho\bar{g}; \quad \bar{u} = u(t^*, n, b, t)\bar{t}$$

donde hemos expresado la derivada en el tiempo de la velocidad de la partícula en términos del campo de velocidades, teniendo en cuenta que la partícula solo puede moverse por la línea coordenada que le corresponde, es decir, los parámetros n,b permanecen constantes y solo varía t^* . Las componentes intrínsecas son

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t^*}) = -\frac{\partial p}{\partial t^*} + \rho \overline{g} \bullet \overline{t}$$
$$\rho \frac{u^2}{R} = -\frac{\partial p}{\partial n} + \rho \overline{g} \bullet \overline{n}$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial b} + \rho \overline{g} \bullet \overline{b}$$

si tengo un desplazamiento en uno de los ejes coordenados, por ejemplo $t \partial t^* y$ multiplico escalarmente por g, el producto será igual al módulo de g multiplicado por la proyección de $t \partial t^*$ sobre la vertical es decir, la variación de altura correspondiente (h)

$$-\overline{g} \bullet \overline{t} dt^* = g dh \Rightarrow \overline{g} \bullet \overline{t} = -g \frac{\partial h}{\partial t^*}$$

haciendo lo mismo con las componentes \mathbf{n} y \mathbf{b} y sustituyendo en las componentes de la ecuación de Euler tenemos

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g h \right] = 0$$

$$\rho \frac{u^2}{R} + \frac{\partial}{\partial n} [p + \rho g h] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} [p + \rho g h] = 0$$

Ecuaciones de Saint Venant

Las canalizaciones de agua al aire libre, como pueden ser los mismos ríos, pueden aproximarse mediante tramos aproximadamente rectos y de pendiente constante. Para uno de estos tramos, en el contexto precedente, podemos suponer que el radio de curvatura (R) de las líneas de corriente es los bastante grande como para despreciar el término correspondiente, de modo que tenemos

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g h \right] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial n} [p + \rho g h] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial b} [p + \rho g h] = 0$$

las dos últimas ecuaciones nos dicen que para los puntos de una superficie S^{\perp} perpendicular a las líneas de corriente la función p+pgh depende solo de la superficie y del tiempo

$$p + \rho g h = f(t^*, t)$$

Si suponemos que el flujo es aproximadamente potencial e irrotacional, la ecuación de Bernouilli obliga a que en las superficies S[⊥] la velocidad del fluido sea la misma.

En canalizaciones al aire libre el nivel del agua puede cambiar debido a crecidas que se propagan através de la red de canalizaciones. Podemos plantear la ley de conservación de la masa para un tubo de corriente limitado por dos superficies S[⊥] separadas una distancia dt*, ocupando cada superficie una sección completa del canal, es decir, desde el fondo del canal hasta la superficie del agua:

$$\oint \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S} = \frac{\partial}{\partial t} \oint dV \Rightarrow \frac{\partial uS \perp}{\partial t^*} dt^* = \frac{\partial}{\partial t} (S \perp dt^*) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t^*} [uS \perp] = \frac{\partial S \perp}{\partial t}$$

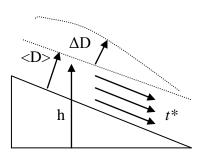
para un canal de sección homogénea, la superficie S^{\perp} desde el fondo hasta el nivel del agua solo depende de la profundidad D entre el fondo la superficie

$$S \perp = S \perp (D(t^*,t)) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t^*} S \perp + u \frac{\partial S \perp}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial t^*} = \frac{\partial S \perp}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial t}$$

los cambios de profundidad D se pueden reinterpretar como cambios de presión hidrostática multiplicando la expresión anterior por $\rho g \cos(\varphi)$:

$$\rho g \cos(\varphi) \frac{S \perp}{\partial S \perp / \partial D} \frac{\partial u}{\partial t^*} + u \rho g \cos(\varphi) \frac{\partial D}{\partial t^*} = \rho g \cos(\varphi) \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \rho g \cos(\varphi) \frac{S \perp}{\partial S \perp / \partial D} \frac{\partial u}{\partial t^*} + u \frac{\partial p}{\partial t^*} = \frac{\partial p}{\partial t}$$
$$\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial t^*} + u \frac{\partial p}{\partial t^*} = \frac{\partial p}{\partial t}; \qquad c^2 = g \langle D \rangle \cos(\varphi)$$

donde se $<\!D\!>$ representa la profundidad media del canal y φ es el ángulo del fondo del canal con la horizontal. Con esta interpretación aproximamos la dinámica por la estática, es decir es una <u>aproximación cuasiestática</u> a la dinámica del sistema. Finalmente tenemos el sistema de ecuaciones de *Saint-Venant*



$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g h \right] = 0$$

$$\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial t^*} + u \frac{\partial p}{\partial t^*} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

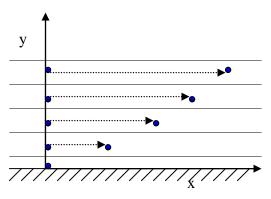
aunque la propagación de crecidas en canales, o incluso tsunamis es un proceso ondulatorio descrito por estas ecuaciones, debido a la aproximación cuasiestática no pueden aplicarse

al caso de ondas superficiales similares a las que se forman en la superficie del agua de un estanque al tirar una piedra. Solo se conocen soluciones basadas en cálculo numérico para el sistema de ecuaciones anterior.

El sistema de ecuaciones anterior no tiene en cuenta el efecto de rozamiento entre el agua y el fondo del canal. En la siguiente sección veremos que este efecto se puede incluir mediante un término adicional en la primera ecuación de Saint Venant de la forma $+\eta \overline{\nabla}^2 \overline{u}$

VISCOSIDAD

En el movimiento fluido presentado hasta ahora no hemos considerado la existencia de un rozamiento interno entre partículas de fluido o líneas de corriente vecinas. Los apuntes de Leonardo señalan que en la corriente de un



río el agua cercana a la superficie se mueve a mayor velocidad que el agua del fondo. Podemos replicar este comportamiento en el laboratorio para otros fluidos como distintos tipos de aceite. Podemos llegar en el laboratorio a establecer corrientes estacionarias de fluidos incompresibles y de densidad constante con una distribución de velocidades que no se ajusta a la ecuación de Bernouilli. La imagen

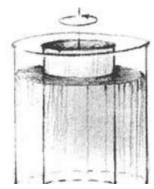
adjunta representa el movimiento de partículas-test en el perfil vertical de una corriente estacionaria en *movimiento laminar* de un fluido viscoso que se mueve en la dirección positiva del eje x. El eje x representa también un límite de la corriente fluida, un fondo de tubo o de recipiente que contiene la corriente. La imagen representa la posición de las partículas-test en el instante t_0 sobre el eje y; en el instante posterior t_1 la posición de cada partícula sobre el eje x muestra la diferente velocidad de cada capa o lámina de fluido. Vemos también la adherencia del fluido viscoso a los límites del recipiente ya que la partículatest del fondo no se mueve. Las capas o láminas de un fluido viscoso en contacto con los límites que contienen el movimiento de dicho fluido se denominan *capas límite* y se caracterizan por estar, en condiciones de movimiento laminar no turbulento, en reposo relativo respecto a dichos límites. Para explicar este movimiento acudimos a la idea de rozamiento interno. Una lámina está sometida a dos rozamientos:

1-En la superficie superior la capa superior tiende a arrastrarla en su movimiento.

2-En la superficie inferior la capa inferior tiende a frenar el movimiento que se generaría según el punto anterior.

En la capa límite estas dos tendencias se compensan de modo que queda en reposo relativo.

Flujo de Couette



La imagen representa un recipiente y un cilindro interno que puede girar según el eje señalado. El espacio entre ellos contiene un fluido viscoso. Si el cilindro empieza a girar, la capa límite de fluido en contacto con el cilindro se moverá a su misma velocidad, mientras que la capa límite en contacto con la superficie del recipiente permanecerá en reposo. De esta forma aparecerá en el fluido una distribución de velocidades debida a la viscosidad del fluido. La función de distribución puede ser compleja, pero podemos simplificar las cosas

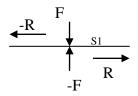
haciendo que el radio del cilindro y el del recipiente sean sensiblemente parecidos. De este modo el fluido ocupa una pequeña capa sobre la que podemos aproximar una distribución lineal de la velocidad a lo largo de la coordenada radial (en cilíndricas). Para hacer girar el cilindro a cierta velocidad constante, tendremos que aplicar cierto par de fuerzas que compense el momento de fuerzas generado por la resistencia viscosa del fluido. En base a este equilibrio y a la simetría cilíndrica del sistema podemos medir la fuerza de contacto viscoso tangente a la superficie entre el fluido y el cilindro y obtener lo siguiente

$$\frac{dF}{dS} = \eta \, \frac{\Delta u}{\Delta r}$$

donde dS es un elemento de superficie del cilindro y dF es la fuerza de rozamiento debida al contacto viscoso sobre dicha superficie del cilindro; Δu es la velocidad relativa del elemento dS del cilindro respecto a la superficie del recipiente y Δr es la distancia radial entre la superficie del cilindro y el recipiente. El factor de proporcionalidad η se denomina viscosidad dinámica y es propio de cada fluido. Si tomamos la distribución de velocidades del fluido en el dispositivo de Couette en un plano horizontal y consideramos que el radio del sistema es muy grande, en una pequeña porción angular la distribución de velocidades mantendrá la misma dirección de forma análoga al primer dibujo, de modo que para el caso de fluido moviéndose en una única dirección sobre el eje x tenemos

$$\frac{dF_x}{dS_y} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

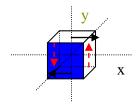
donde hemos introducido con la derivada parcial el paso al límite para el caso



de una lámina de fluido infinitamente delgada, es decir, una superficie matemática en el fluido. En el caso de la presión también se hizo un paso al límite hacia una distribución de fuerza en superficie. En el dibujo adjunto S1 es una superficie imaginaria paralela a una lámina en un fluido viscoso. La presión corresponde a las fuerzas F que una parte del sistema ejerce sobre la otra

y la viscosidad corresponde con las fuerzas R de rozamiento entre una y otra parte del sistema. En ambos casos se representa la acción y la reacción entre los subsistemas separados por la superficie. Tanto la presión como la viscosidad corresponden a fuerzas distribuidas en superficie.

Elemento de fluido en una corriente viscosa laminar. Ecuación de Navier-Stokes



El dibujo muestra un elemento de fluido de forma cúbica en nuestra corriente laminar en el eje x afectado por el rozamiento con la capa superior e inferior. Vemos que aparece un par de fuerzas sobre el elemento. El efecto de este par en un fluido puede producir la deformación del mismo, adquiriendo una forma de romboide perdiendo en altura y ganando en velocidad, de forma similar al

estrechamiento del tubo de Venturi. Sin embargo también es posible que, si el elemento es muy pequeño, la viscosidad interna sea lo bastante fuerte como

para provocar un giro completo del elemento de volumen. Esto supondría la generación de un vórtice turbulento. En todo caso, la experiencia nos muestra que es posible el movimiento de un flujo viscoso en régimen estacionario y no turbulento. Por tanto debemos pensar que, a nivel de elemento de fluido, aparecen otro par de fuerzas, marcadas en rojo en el dibujo, que compensan el par de fuerzas presentado inicialmente; de modo que el movimiento del fluido pueda seguir un régimen laminar:

$$\frac{dF_{y}}{dS_{x}} = \eta \frac{\partial u_{x}}{\partial y}$$

Hasta ahora solo hemos estudiado el rozamiento viscoso en la dirección x sobre un elemento de superficie dS_y en la dirección positiva del eje y. Para un movimiento mas general, podemos igualmente estudiar el rozamiento viscoso en la dirección y sobre un elemento de superficie dS_x obteniendo

$$\frac{dF_{y}}{dS_{x}} = \eta \left(\frac{\partial u_{y}}{\partial x} + \frac{\partial u_{x}}{\partial y} \right)$$

es decir, se suman linealmente efectos debidos al gradiente de velocidad y a la condición de corriente laminar. Análogamente para la componente *dFx/dSy*

$$\frac{dF_x}{dS_y} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

Recordando la 2ª Ley de Newton para fluidos presentada anteriormente

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \right] - \rho \overline{g}(x, y, z) + \overline{\nabla} \bullet \mathbf{\tau} = 0$$

$$\overline{\nabla} \bullet \mathbf{\tau} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{pmatrix}$$

vemos que aparece un tensor. Para llegar a las fuerzas desde la fórmula anterior hay que hacer una integración en volumen y aplicando el teorema de la divergencia al caso de la divergencia del tensor tenemos

$$\int \overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{pmatrix} dV = \oint _S \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{pmatrix} \bullet d\overline{S} =$$

$$\oint \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix}$$

podemos incluir las fuerzas de viscosidad que hemos visto como *componentes* adicionales de este tensor

$$\mathbf{\tau} = \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p - \tau_{xx}^* & \rho u_y u_x - \tau_{xy}^* & \rho u_z u_x - \tau_{xz}^* \\ \rho u_x u_y - \tau_{yx}^* & \rho u_y u_y + p - \tau_{yy}^* & \rho u_z u_y - \tau_{yz}^* \\ \rho u_x u_z - \tau_{zx}^* & \rho u_y u_z - \tau_{zy}^* & \rho u_z u_z + p - \tau_{zz}^* \end{pmatrix}; \\ \boldsymbol{\tau}_{xx}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xy}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \boldsymbol{\tau}_{xz}^* = \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right);$$

La presentación hecha debe restringirse al caso de *fluidos viscosos incompresibles* y la 2ª Ley de Newton para fluidos incluyendo el tensor anterior se denomina *ecuación de Navier-Stokes* para un fluido viscoso incompresible.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \right] - \rho \overline{g}(x, y, z) + \overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p - \tau_{xx}^* & \rho u_y u_x - \tau_{xy}^* & \rho u_z u_x - \tau_{xz}^* \\ \rho u_x u_y - \tau_{yx}^* & \rho u_y u_y + p - \tau_{yy}^* & \rho u_z u_y - \tau_{yz}^* \\ \rho u_x u_z - \tau_{zx}^* & \rho u_y u_z - \tau_{zy}^* & \rho u_z u_z + p - \tau_{zz}^* \end{pmatrix} = 0$$

El tensor es simétrico : $\tau^*_{xy} = \tau^*_{yx}$; $\tau^*_{xz} = \tau^*_{zx}$; $\tau^*_{zy} = \tau^*_{yz}$; y lo es también en el caso de fluido compresible. Este es un resultado general de la *mecánica de los medios continuos* conocido como <u>teorema de tensiones de Cauchy</u> que se basa en el equilibrio local de momentos de fuerza asociado a las fuerzas distribuidas en superficie (presión y componentes viscosas) para un elemento de fluido.

Los términos diagonales τ^*_{xx} , τ^*_{yy} , τ^*_{zz} corresponden a las deformaciones: dilataciones o compresiones del elemento de fluido en cada uno de los ejes rectangulares. Son componentes similares al módulo de Young en sólidos, pero en este caso asociadas a componentes del rozamiento viscoso. Es posible deducir la forma general del tensor τ^* para fluidos compresibles basándonos en que las componentes de dicho tensor dependen linealmente de las derivadas parciales de las componentes de la velocidad y son simétricas. La forma de las componentes debe ser la siguiente

$$\tau_{ij}^* = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \left[\overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right] \delta_{ij}$$

evidentemente para un flujo incompresible la divergencia se anula. El lector puede pensar que, aparentemente, puede haber mas expresiones válidas con las condiciones elegidas, por ejemplo

$$\tau_{ij}^* = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] \delta_{ij}$$

Pero esta expresión no corresponde a un *tensor* ya que la ley de transformación de coordenadas de estas componentes no se ajusta a la transformación de coordenadas de un tensor. El *teorema de tensiones de Cauchy* establece también como debe ser la ley de transformación entre distintos sistemas de coordenadas de este tensor. Sabemos que la divergencia del campo de velocidades es un escalar, un escalar o número invariante en cambios de sistemas de coordenadas, que multiplicando al *tensor elemental* δ_{ij} (ver apéndice) resulta en otro tensor. Pero la derivada parcial introducida como factor de δ_{ij} en la segunda expresión del tensor no se transforma como un invariante, sino como la componente de un vector (gradiente), lo que invalida la expresión completa como tensor.

El coeficiente adicional η ' puede deducirse de la siguiente consideración física : imaginemos que el fluido se ve sometido a una compresión o expansión uniforme en todas sus dimensiones. En este caso tenemos

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \ y \ \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \dots 0$$

en este caso no hay deslizamiento relativo entre las distintas partes del fluido y por tanto no debe haber fricción, por lo que las componentes del tensor deben anularse en este caso. Rápidamente vemos, a través de las componentes diagonales τ^*_{ij} , la forma general del tensor viscosidad τ^*

$$\tau_{ii}^* = 2\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) + 3\eta' \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right] = 0 \Rightarrow \eta' = -\frac{2}{3}\eta \Rightarrow \quad \tau_{ij}^* = \eta \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\left[\nabla \bullet u\right]\delta_{ij}\right]$$

Utilizando las componentes generales del tensor se puede llegar a la siguiente forma de la ecuación de Navier-Stokes

$$\rho(\overline{u} \bullet \overline{\nabla})\overline{u} + \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\overline{\nabla}p + \rho \overline{g} + \eta \overline{\nabla}^2 \overline{u} + \frac{1}{3} \eta \overline{\nabla} [\overline{\nabla} \bullet \overline{u}]$$

la forma en que se ha introducido el factor 2/3 en el tensor, y 1/3 en la ecuación anterior, en base a consideraciones físicas sencillas, resulta tener limitaciones en la práctica. En concreto, en el caso de gases la fórmula anterior solo es válida para gases monoatómicos con 3 grados de libertad.

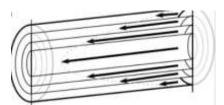
Descomponiendo el *Laplaciano* según lo expuesto en la sección de análisis matemático de campos tenemos

$$\rho \left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla} \right) \overline{u} + \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = - \overline{\nabla} p + \rho \overline{g} + \eta \left[\overline{\nabla} \left[\overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right] - \overline{\nabla} \times \left[\overline{\nabla} \times \overline{u} \right] \right] + \frac{1}{3} \eta \overline{\nabla} \left[\overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right]$$

Por tanto podemos deducir que, para corrientes incompresibles $(\overline{\nabla} \bullet \overline{u} = 0)$ e irrotacionales $(\overline{\nabla} \times \overline{u} = 0)$ la viscosidad no tiene efecto. También ocurre esto si el rotacional es una constante. Esto ocurre para un campo de velocidades similar al del giro de un sólido rígido de la forma $\overline{u} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, con ω constante. Este es el caso del problema del cubo con agua girando en equilibrio.

Flujo de Poiseuille y viscosidad en corrientes libres

El flujo de Poiseuille corresponde a un fluido viscoso e incompresible circulando



en régimen estacionario por una tubería recta. Podemos imaginar el fluido como una serie de láminas cilíndricas concéntricas. Si la viscosidad es homogénea y despreciando el efecto de la gravedad, entonces cada lámina se moverá con la misma velocidad; decreciendo la velocidad

desde el eje central del tubo hasta las paredes, donde la velocidad del fluido se anula por adherencia. Podemos utilizar resultados vistos en la sección sobre el sistema de coordenadas intrínseco de una corriente estacionaria e incluir el término correspondiente a la viscosidad en las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g h \right] = \eta \overline{\nabla}^2 u$$
$$\frac{\partial}{\partial n} [p + \rho g h] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial b} [p + \rho g h] = 0$$

si despreciamos el efecto de la gravedad (tubo estrecho) las dos últimas ecuaciones nos dicen que en una sección perpendicular al tubo determinada la presión es constante. En este caso la velocidad del fluido no es constante en dicha sección ya que el flujo no puede considerarse irrotacional. Además, en la primera ecuación, a lo largo de una línea de corriente no cambia la velocidad en este caso, por lo que tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial t^*} = \eta \overline{\nabla}^2 u; \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial b} = 0$$

También podemos resolver el sistema de ecuaciones anterior utilizando el sistema de coordenadas cilíndrico. Hacemos corresponder las líneas coordenadas z del sistema cilíndrico con las líneas coordenadas t^* , es decir, la dirección de las líneas de corriente. Por otra parte, en este caso en el sistema de coordenadas intrínseco el vector n no está bien definido, ya que las líneas de corriente son rectas y el radio de curvatura es infinito. En esta situación podemos elegir los vectores n y n de la base local del sistema de coordenadas a conveniencia mientras sean perpendiculares entre sí y al vector n de la base local del sistema de coordenadas cilíndrico. Esto nos permite escribir la primera ecuación utilizando el Laplaciano en coordenadas cilíndricas de esta forma

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

la velocidad de corriente siempre está en la dirección z y solo es función del radio al eje del tubo :u(r) y por tanto tenemos que la parcial de la presión es una función del radio: $\partial p/\partial z = f(r)$. Pero como vimos antes, *la presión* no puede variar en una sección recta, es decir, no varía con la coordenada r, esto nos dice que $\partial p/\partial z$ solo puede ser una constante del sistema. Con esto la ecuación diferencial queda

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$$

cuya solución es (R=radio del tubo desde su eje central)

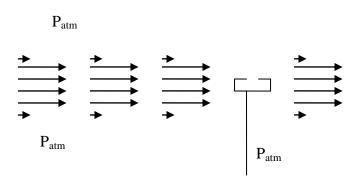
$$u = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2)$$

el signo menos se introduce por que si el flujo circula en el sentido de z creciente, entonces en ese mismo sentido la presión disminuye. Por otro lado,

dado que $\partial p/\partial z$ es constante tenemos que $\partial p/\partial z = -\Delta p/L$, con L= Δz y Δp el módulo de la diferencia de presiones entre dos puntos separados una distancia L sobre el tubo :

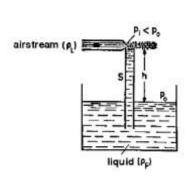
$$u = \frac{\Delta p}{4\eta L} \left(R^2 - r^2 \right)$$

Este caso del flujo de Poiuseuille tiene semenjanzas con el caso de una corriente libre de aire, como puede ser la generada por un ventilador o un secador de pelo. El campo de velocidades del chorro puede ser similar al dibujo



En los extremos superior e inferior del chorro la velocidad decrece rápidamente hasta llegar a las condiciones del aire en reposo que rodea al chorro. Este gradiente de velocidad está asociado a la *fricción viscosa* con el aire en reposo de los alrededores.

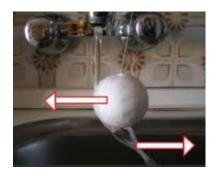
Para medir la presión en el chorro necesitamos un dispositivo similar a una pequeña caja con una abertura que colocamos paralela al flujo de aire. En el interior de la caja el fluido está en reposo y podemos medir la presión de esta forma; algo similar se utiliza en el *tubo de Pitot*. Comprobaremos que la presión es sensiblemente constante en todo el chorro e igual a la presión atmosférica del entorno. Presión constante es lo que se espera del caso del flujo de Poiseuille cuando la viscosidad es muy pequeña, como es el caso del aire.



La imagen adjunta representa un evaporador, un dispositivo que utiliza un chorro de aire actuado sobre la boca de un tubo parcialmente sumergido en fluido. El efecto del chorro paralelo a la boca del tubo es la ascensión del fluido por el tubo hasta que hace contacto con el chorro de aire y es transportado por él. El efecto del chorro sobre el aire que hay inicialmente en la parte superior del tubo es un arrastre por fricción. Esto hace que el tubo pierda aire y, según la ley de los gases ideales, que pierda

presión; lo que provoca la subida de fluido por el tubo. Esto a su vez empuja el aire del tubo hacia arriba, hacia el chorro.

Efecto Coanda



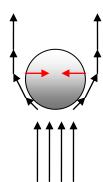
Cuando vimos el caso de la sustentación del ala de un avión hemos supuesto que la corriente tiende a seguir suavemente el contorno del ala. Este comportamiento resulta tener una base física denominada Efecto Coanda. La imagen muestra un chorro de un grifo casero y un péndulo con una bola de corcho blanco. Si acercamos la bola al chorro, resulta que la *viscosidad del agua* hace que el chorro se adhiera a la bola de corcho de modo que

sigue durante un tramo el contorno de dicho objeto, como podemos ver. La flecha de abajo indica la variación de cantidad de movimiento del chorro de agua, esto es la fuerza sobre una unidad de fluido en su movimiento en contacto con la bola. Debemos atribuir esta fuerza a la bola de corcho blanco



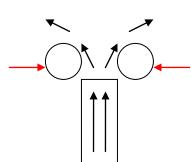
por medio de la viscosidad. La 3ª ley de Newton indica que a esta fuerza debe corresponder una reacción igual y en sentido contrario actuando sobre la bola de corcho, representada por la flecha superior. El resultado es similar a una fuerza atractiva entre la bola y el flujo de agua. Sin embargo este resultado depende de la forma que tenga el objeto. La imagen adjunta representa la misma experiencia con una cucharilla de plástico sujeta a modo de péndulo pero cayendo el chorro por el lado cóncavo de la cucharilla. En este caso las fuerzas de

acción y reacción son repulsivas y tienden a separar el chorro y la cucharilla; de modo que estos objetos solo permanecen juntos por la existencia de una fuerza externa representada por la varilla de la izquierda en contacto con la cuchara. En todo caso, sabemos que la curva en la corriente de agua está asociada a un gradiente de presión, como vimos al estudiar el sistema de coordenadas intrínseco del fluido. En el primer caso, la curva de la corriente indica que en la zona de contacto entre el chorro y la bola la presión es menor que la atmosférica, lo que es coherente con el hecho de que la bola tiende a pegarse al chorro. Esto también explica la separación de la cuchara en el segundo caso.



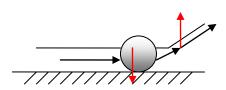
El fenómeno también se produce en el caso de un chorro de aire. El dibujo representa una corriente de aire, procedente de un secador de pelo por ejemplo, que actúa sobre una pequeña pelota de ping-pong. El chorro se adhiere a los laterales de la pelota por viscosidad y genera una fuerza sobre la pelota indicada por las flechas rojas. Esta fuerza es tal que tiende a estabilizar la pelota dentro del chorro, de modo que podemos mover el chorro y la pelota lo seguirá. De nuevo, la curvatura de las líneas de corriente indica que la zona donde está la pelota tiene una presión relativa menor que la presión exterior

atmosférica, lo que es coherente con que la pelota ocupe las zonas de menor presión. La presión también es superior abajo, donde el chorro no se ha dispersado todavía, lo que explica que la pelota se sustente y no caiga por su peso. Debido a que la viscosidad no actúa en general de forma simétrica la pelota girará sobre si misma y se producirá un *Efecto Magnus* adicional que hace que las dos ramas del flujo dejen de ser simétricas en un instante dado. El giro es variable de modo que el flujo en una de las rama se ve a veces



debilitado o intensificado a costa del de la otra rama. Si soplamos por un pequeño tubo sobre el espacio entre dos pelotas de ping-pong el efecto Coanda divide el flujo en dos ramas y generará la presiones y fuerzas correspondientes de modo que las dos pelotas tienden a juntarse. Esto estrecha el espacio ocupado por el flujo y si este es capaz de circular de forma incompresible y adherido al borde de las pelotas, entonces deberá aumentar la velocidad en el estrechamiento.

El efecto Coanda también se utiliza en coches de competición como los



Fórmula-1. El dibujo representa la parte trasera inferior de un coche en movimiento. Las flechas negras indican el movimiento del aire debajo del coche. La curva que hace la carrocería al final se denomina *difusor*. El efecto Coanda hace que el flujo se adhiera a este difusor, lo

cual provoca un par de fuerzas de acción-reacción pintadas en rojo sobre la rueda del coche y sobre el flujo de aire de salida. Vemos que el efecto sobre el coche es "pegarlo" al suelo; es decir, aumenta el agarre entre el neumático y el suelo, lo cual es ventajoso a la hora de tomar curvas a alta velocidad.

La adhesión del flujo de aire a las alas de un avión es también un resultado del efecto Coanda, creando el patrón de curvatura en las líneas de corriente que permite la sustentación. Note el lector que relativamente lejos, tanto por encima del ala como por debajo de ella, la presión del aire es la atmosférica. Este hecho combinado con la relación entre curvatura de líneas de corriente y gradiente de presiones (ver sección sobre sistema de coordenadas intrínseco de la corriente) nos dicen que la presión encima del ala es menor que la presión debajo de ella; lo que genera la sustentación.

Arrastre de objetos en una corriente

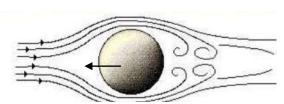
La fuerza de arrastre en la dirección de la corriente de un sólido que se mueve en el interior de un fluido sigue la siguiente <u>ley empírica</u>

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 C_a A$$

donde ρ es la densidad del fluido, v la velocidad relativa entre el sólido y el fluido. El valor de A es un área de referencia definida convencionalmente para los distintos objetos. Por ejemplo para una esfera sería el área de la esfera proyectada sobre un plano perpendicular a la corriente, para el ala de un avión sería la superficie del ala. Finalmente C_a es el coeficiente de arrastre que depende de la forma específica del objeto. La ecuación anterior se considera la definición matemática del coeficiente de arrastre.

CAPA LÍMITE

En la paradoja de D'Alembert vimos el caso de un cilindro moviéndose uniformemente en un corriente de potencial. Si se parte de una corriente incompresible, irrotacional y despreciando la viscosidad la consecuencia



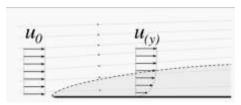
necesaria es que sobre el cilindro no actúa ninguna fuerza de arrastre debida a la corriente. Evidentemente es posible reproducir la experiencia anterior utilizando una corriente de aire y comprobar lo contrario: que

existe una fuerza de arrastre del fluido sobre el cilindro. Además se puede comprobar que para velocidades moderadas la corriente real no sigue la forma suave de la corriente de potencial sino que aparecen turbulencias en la parte trasera del cilindro.

Se suele considerar que el agua o el aire son fluidos de viscosidad despreciable. En principio el coeficiente de viscosidad de distintos fluidos puede medirse en el dispositivo de Couette, resultado en orden de magnitud para el aire 10^{-5} , para el agua 10^{-3} y para el aceite de oliva 10^{-1} . Según la teoría de la *Capa Limite*, incluso cuando la viscosidad es muy pequeña, junto a las paredes de los objetos rodeados por la corriente sigue siendo válida la *condición de adherencia* : la capa de fluido que está en contacto con la pared del objeto está adherida a dicha pared, es decir, en reposo relativo respecto a ella. En caso de pequeñas viscosidades, la velocidad del fluido puede ser considerablemente alta a distancias muy pequeñas de la pared del objeto, lo que supone aceptar *altos gradientes de velocidad* en la dirección normal a la superficie del objeto y por tanto, a través del coeficiente de proporcionalidad η , fuerzas de rozamiento debidas a viscosidad que no pueden ser despreciadas.

Esta región cercana a la superficie de los objetos y que puede soportar un alto gradiente en la velocidad del fluido debido a la condición de adherencia se llama capa límite. En la paradoja de D´Alembert, no se ha considerado el efecto de rozamiento viscoso de esta capa; sin embargo para el resto del fluido fuera de la capa límite son aplicables las condiciones de flujo potencial, irrotacional y sin viscosidad. La capa límite afecta a la corriente de potencial, en condiciones de movimiento laminar, aproximadamente como un "contorno efectivo" añadido al cilindro. Sin embargo existen condiciones que predicen fenómenos como la transición y el desprendimiento de la capa límite que provoca turbulencia en amplias zonas del fluido, como es el caso de la imagen anterior.

Podemos hacer una estimación del espesor de la capa límite para una placa en



<u>reposo</u> colocada paralelamente a la corriente. El dibujo representa esta placa y la variación de velocidad del fluido en la capa límite. Si suponemos que el espesor de la capa límite es muy pequeño, podemos aproximar linealmente la viscosidad por medio de la

velocidad del fluido en la frontera entre la capa límite y el flujo de potencial y la anchura de la capa $\boldsymbol{\delta}$

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} \approx \eta \frac{\Delta u}{\Delta y} \approx \eta \frac{u_0}{\delta} \to \Delta F = \eta \frac{u_0}{\delta} \Delta S$$

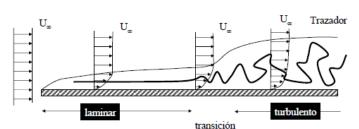
Esta expresión da el cambio en cantidad de movimiento de una cantidad de fluido que ha pasado a la zona de la capa límite correspondiente al espesor δ y superficie $\Delta S.$ Este valor se puede aproximar también por medio de la conservación de la cantidad de movimiento, presentado en otra sección en forma integral. El fluido afectado por viscosidad en la superficie de placa S, a lo sumo puede perder la cantidad de movimiento que tenía en la corriente de potencial. Si despreciamos cambios de presión sobre la superficie S de la capa límite, este valor máximo es

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} < \rho \, \delta \, S \, u_0 \left(\frac{u_0}{l} \right)$$

donde l es la distancia en el eje x desde el borde la placa. El resultado anterior también supone que el espesor de la capa límite δ es una función creciente de l. Para un elemento de superficie de placa ΔS , aplicando los resultados anteriores tendremos, aproximadamente

$$\Delta F = \eta \frac{u_0}{\delta} \Delta S < \rho \delta \Delta S u_0 \left(\frac{u_0}{l}\right) \Longrightarrow \delta = k \sqrt{\frac{\eta l}{\rho u_0}} = k \frac{l}{R}$$

donde *k* es una constante adimensional menor que la unidad y R el número de Reinolds. El resultado final es que el espesor de la capa límite depende de la raíz cuadrada de la distancia al borde de la placa, dependencia que está



representada en la imagen anterior. En la práctica el espesor de la capa límite en el caso de aire o agua es de décimas o centésimas de milímetro⁴, sin embargo a medida que nos alejamos del borde de la placa la capa

límite aumenta en espesor y superada cierta distancia llega a hacerse inestable, turbulenta como muestra el dibujo; lo cual se pone de manifiesto utilizando fluidos trazadores que revelan el comportamiento de la corriente por su color distintivo. Según los experimentos de laboratorio, la *zona de transición* comienza para R= 10⁻⁵ y la *zona turbulenta* para R =3*10⁻⁵; aún así, la corriente turbulenta de la capa límite sigue adherida a la placa y sigue habiendo una frontera bién definida entre la capa límite y la corriente de potencial.

Ecuaciones de Navier-Stokes para la capa límite

Partiendo de la ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible podemos introducir una serie de aproximaciones apropiadas a la física de la capa límite en el caso de la placa que venimos manejando. La simetría del caso permite

⁴ Para objetos de pequeñas dimensiones, como insectos o microorganismos en agua, esto supone un mayor rozamiento proporcionalmente a objetos mayores; ya que para una misma velocidad del agua el gradiente de velocidades es mayor en el caso de objetos pequeños con una capa límite mas delgada.

utilizar solamente dos coordenadas espaciales x,y de modo que la ecuación de Navier-Stokes y la de conservación de la masa quedan así en componentes

$$u_{x} \frac{\partial u_{x}}{\partial x} + u_{y} \frac{\partial u_{x}}{\partial y} + \frac{\partial u_{x}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial y^{2}} \right)$$

$$u_{x} \frac{\partial u_{y}}{\partial x} + u_{y} \frac{\partial u_{y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} u_{y}}{\partial y^{2}} \right)$$

$$\frac{\partial u_{x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y}}{\partial y} = 0$$

La dirección de la coordenada x es paralela a la placa, la dirección de la coordenada y es la perpendicular a la placa.

Las aproximaciones para la capa límite son las siguientes

1-La capa límite es muy delgada y por esto solo pueden presentarse dentro de ella diferencias de presión despreciables en la dirección perpendicular a la placa : $\partial p/\partial y = 0$ en la capa límite. Sobre una normal a la pared existe, en la capa límite, siempre la misma presión. En la hipótesis de continuidad matemática, dicha presión debe coincidir con la presión en la frontera de la corriente de potencial exterior a la capa límite y por tanto <u>la corriente de potencial externa determina la presión en la capa límite</u>.

2-En la capa límite existe un rápido aumento de la componente de la velocidad paralela a la pared (u_x) en la dirección perpendicular a la placa (y), mientras que la variación de esta misma componente en la dirección (x) es mucho menor: $\partial^2 u_x/\partial y^2 >> \partial^2 u_x/\partial x^2$ en la capa límite.

3-Puesto que la capa límite es muy delgada y se extiende a lo largo de la pared, si es el caso pueden despreciarse los valores de u_y mas sus derivadas primera y segunda respecto de los parámetros (x,y,t)

Después de aplicar estas condiciones queda eliminada la ecuación de Navier-Stokes para la componente (y) y la componente (x) queda así

$$u_{x} \frac{\partial u_{x}}{\partial x} + u_{y} \frac{\partial u_{x}}{\partial y} + \frac{\partial u_{x}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial y^{2}}$$

se mantiene aquí la componente u_y por estar multiplicando al gradiente de velocidad en la normal a la placa. Si aplicamos la ecuación anterior a la superficie de la placa con y=0, $u_x=0$, $u_y=0$ tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{y=0} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\Big|_{y=0}$$

Separación de la capa límite

En la ecuación anterior la parte izquierda representa la influencia de la corriente de potencial externa y la parte derecha está directamente relacionada con la forma de la función de distribución en la capa límite $u_x = u_x(x, y)$. Si desarrollamos en serie la derivada parcial en y de esta función en un punto de la placa $(x=x_0,y=0)$ como función de una sola variable $f(x_0,y)$ tenemos

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{\substack{y=y\\x=x0}} = \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{\substack{y=0\\x=x0}} + \frac{y}{\eta} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{\substack{y=0\\x=x0}}$$

por otra parte, en la zona de transición entre la corriente de potencial y la capa límite tenemos para la misma derivada

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{\substack{y=y\\x=x0}} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{\substack{y=\delta\\y=x0}} > 0$$

ahora no aparece la derivada segunda ya que este término está asociado a la viscosidad y en esta zona es despreciable. Además esta derivada siempre es positiva, ya que a medida que (y) disminuye entramos en la capa límite y la velocidad también disminuye. Para fluidos poco viscosos esta derivada es también cercana a cero. Tenemos por tanto una aproximación a la distribución de velocidades de la capa límite sus puntos extremos. A pesar de que la capa límite suele ser muy delgada, los resultados anteriores apuntan a un comportamiento complejo dependiente de las condiciones en el gradiente de presión externo. Para el caso de fluidos poco viscosos, como el aire, tenemos:

1: Comportamiento Regular. El gradiente de velocidades se mantiene con el mismo signo positivo en toda la capa límite

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{\substack{y=0\\x=x0}} >> \frac{\partial u_x}{\partial y} \bigg|_{\substack{y=\delta\\x=x0}} \approx 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \bigg|_{\substack{y=0\\x=x0}} < 0$$

este comportamiento indica un decrecimiento de la velocidad u_x desde la frontera con la corriente de potencial hasta la placa, y además este decrecimiento se produce sin cambio de sentido de u_x : u_x es un valor siempre positivo. Para que este comportamiento sea posible la derivada parcial en x de la presión debe ser negativa para conseguir que el gradiente de u_x vaya disminuyendo desde la placa hasta el límite con la corriente de potencial.

2-Comportamiento Inestable. En este caso el gradiente de presión en (x) es nulo. Si es posible seguir manteniendo un comportamiento regular de las derivadas desde la placa hasta la frontera con la corriente potencial, entonces las condiciones mas sencillas en este caso son

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=0\\ z=x0}} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=\delta\\ z=x0}} \approx 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{\substack{y=0\\ x=x0}} = 0$$

es decir, el gradiente de velocidades en la placa y en la frontera de la corriente potencial son comparables y por tanto la capa límite tiene dificultades para mantener la adherencia con la placa y puede considerarse inestable. 3-Comportamiento Irregular: En este caso el gradiente de presión en (x) es positivo. Evidentemente si el valor del gradiente es positivo pero cercano a cero son válidas las conclusiones del apartado anterior. Pero si este valor no es despreciable la situación debe ser la siguiente

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=0\\x=x0}} < 0; \quad \frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=0\\x=x0}} << \frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=\delta\\x=x0}} \approx 0; \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{\substack{y=0\\x=x0}} > 0$$

es decir, se produce una inversión del sentido de la corriente en las proximidades de la placa. Este valor es moderado por la derivada parcial de la presión, de forma que el gradiente de velocidades llega a un valor positivo en la frontera con la corriente de potencial. Para unos mismos valores del módulo de las derivadas que en el caso regular, llegar hasta la frontera con la corriente de potencial en este caso necesita un mayor espesor de la capa límite. La

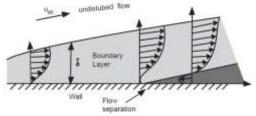
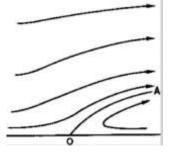
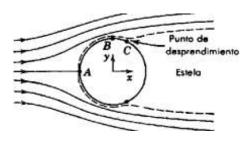


imagen izquierda representa los tres casos vistos: a la izquierda el caso $\partial p/\partial x < 0$, en el centro $\partial p/\partial x = 0$ y a la

derecha $\partial p/\partial x>0$. En el centro la capa límite empieza a perder

adherencia y acaba por separarse de la placa, el "vacío" dejado se completa con un flujo opuesto cerca de la placa. Las líneas de corriente correspondientes se pueden ver también. La línea O-A corresponde al desprendimiento de la capa límite.

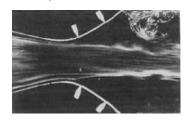




El dibujo de al lado retoma la paradoja de D'Alembert, pero ahora considerando el comportamiento de la capa límite en la superficie del cilindro. Como vimos allí, A es un punto de remanso y por tanto la presión es máxima para el flujo de potencial. Del punto A al punto B la presión del flujo potencial debe decrecer y por tanto la capa límite es estable.

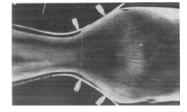
En B la presión es mínima y de B a C la presión del flujo potencial va en aumento. En C la capa límite es inestable y se desprende, formando vórtices y remolinos (estela).

Existen dispositivos denominados sopladores o succionadores que se utilizan para controlar el desprendimiento de la capa límite. Su funcionamiento se basa



en alterar la componente u_y en las ecuaciones de la capa límite de modo que en la superficie de la placa la ecuación es ahora

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{y=0} + \left(u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right|_{y=0} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right|_{y=0}$$



manejando el valor de u_y en la placa se puede compensar el efecto del gradiente de presión y controlar el desprendimiento de la capa límite. Las imágenes son de flujos en toberas; a la izquierda no se utiliza succión y el flujo

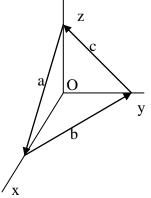
de salida es turbulento por desprendimiento de la capa límite, a la derecha se utiliza succión y el flujo se adhiere a las paredes.

Apéndice Matemático.

Vectores superficie.

En los teoremas de la divergencia y el rotacional se representan elementos de superficie por medio de vectores. En principio un vector consta de tres componentes. ¿Podemos interpretar también cada una de estas componentes

como elementos de superficie?



El dibujo representa un triángulo vectorial arbitrario y un sistema de coordenadas dispuesto de forma que nos permite ver fácilmente las componentes cartesianas de cada vector. El vector superficie asociado a este triángulo vectorial se define como

$$\overline{S} = \frac{1}{2} \overline{a} \times \overline{b}$$

si indicamos por u_x, u_y, u_z los vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados, podemos encontrar la componente del vector superficie en la dirección u_v

$$S_{y} = \overline{S} \bullet \overline{u}_{y} = \frac{1}{2} [(a_{x}\overline{u}_{x} + a_{z}\overline{u}_{z}) \times (b_{x}\overline{u}_{x} + b_{y}\overline{u}_{y})] \bullet \overline{u}_{y}$$

aplicando la regla de ciclo del triple producto vectorial tenemos

$$\begin{split} S_{y} &= \frac{1}{2} \left[\left(a_{x} \overset{-}{u}_{x} + a_{z} \overset{-}{u}_{z} \right) \times \left(b_{x} \overset{-}{u}_{x} + b_{y} \overset{-}{u}_{y} \right) \right] \bullet \overset{-}{u}_{y} = \frac{1}{2} \left[\left(b_{x} \overset{-}{u}_{x} + b_{y} \overset{-}{u}_{y} \right) \times \overset{-}{u}_{y} \right] \bullet \left(a_{x} \overset{-}{u}_{x} + a_{z} \overset{-}{u}_{z} \right) = \frac{1}{2} b_{x} \overset{-}{u}_{z} \bullet \left(a_{x} \overset{-}{u}_{x} + a_{z} \overset{-}{u}_{z} \right) \\ \Rightarrow S_{y} &= \frac{1}{2} b_{x} a_{z} = \frac{1}{2} \left| a_{x} a_{z} \right| ; b_{x} < 0, a_{z} < 0 \end{split}$$

es decir, la componente del vector superficie S en la dirección del eje < y> corresponde a al área de la proyección ortogonal de la superficie S del triángulo vectorial (a,b,c) sobre el plano coordenado normal a la dirección < y>. Evidentemente encontraremos lo mismo para el resto de las componentes y finalmente podemos generalizar que cualquier superficie plana puede representarse mediante un vector cuyas componentes corresponden a la proyección ortogonal de dicha superficie sobre los correspondientes planos coordenados < y,>, < z,> y < x,y>.

Tensor elemental

El objeto δ_{ij} es realmente un tensor ya que verifica la ley de transformación de coordenadas para tensores. Esta ley de transformación se presentó en la discusión sobre el tensor de inercia en [1] para el caso de sistemas de coordenadas con origen común y girados según la matriz de giro M

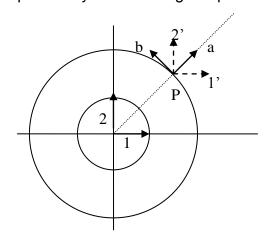
$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \delta'_{ij} = M(\delta_{ij})M^{-1} = M\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} = MM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij}$$

Transformaciones de coordenadas del gradiente la divergencia y rotacional.

Habitualmente se suelen utilizar en física sistemas de coordenadas alternativos a las coordenadas cartesianas con objeto de aprovechar alguna simetría que presente el problema tratado. Así por ejemplo, la ley de Newton de la gravedad se suele expresar de la forma

$$\overline{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \bar{u}_r$$

en este caso, las coordenadas mas apropiadas son coordenadas polares planas (r,Φ) ; donde r es el modulo del radio-vector desde el foco de fuerzas al punto P y Φ es el ángulo que el radio-vector forma con una dirección fija de



referencia. Pero las coordenadas polares tiene también otro detalle interesante que aparece en la Ley de Newton: el vector que aparece u_r es un vector unitario local definido en el punto de aplicación de la fuerza.

Un sistema de coordenadas no solo permite localizar puntos en el espacio; también permite definir una base vectores unitarios locales, es decir, en cada punto del espacio. En la imagen tenemos dos sistemas de coordenadas para referir los

mismos puntos. El sistema cartesiano está asociado a los vectores base (1,2); pero también tiene definidos una base de vectores unitarios locales en cada punto del espacio formada simplemente por el desplazamiento paralelo de los vectores base 1 y 2 al punto considerado, como vemos en el caso de los vectores 1' y 2'. Las coordenadas cartesianas del campo vectorial en el punto P se pueden medir como las proyecciones del valor del campo sobre los vectores unitarios 1' y 2'. En el sistema de coordenadas polares también tenemos una base local de vectores unitarios : a y b. Podemos construirla desde el punto P variando alternativamente cada una de las coordenadas y viendo la dirección que toma el movimiento conseguido

Vector a : Mantenemos constante el ángulo Φ y aumentamos r Vector b : Mantenemos constante la distancia r y aumentamos Φ

Finalmente de estas operaciones obtenemos dos vectores linealmente independientes en el plano, vectores que forman la base local unitaria asociada al punto P en el sistema de coordenadas polares. Note el lector que, a diferencia del caso cartesiano, en coordenadas polares los vectores base locales en general varían de dirección de un punto a otro del espacio. Por supuesto podemos proyectar el valor de nuestro campo vectorial en el punto P utilizando los vectores base locales en polares. Es mas, cuando se dice que se está utilizando el sistema de coordenadas polares, esto es lo que se espera; que los vectores asociados a los campos vectoriales se expresen en la base local asociada al sistema de coordenadas utilizado.

Por otro lado, resulta evidente que, si expresamos las componentes de un campo vectorial según vectores base locales, podemos transformar el vector correspondiente entre sistemas de coordenadas mediante una matriz que represente la transformación de coordenadas en un punto dado entre los vectores base locales de los dos sistemas de coordenadas.

Retomemos la expresión de la transformación de coordenadas del gradiente

$$\overline{\nabla}_{xyz} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \end{pmatrix} f \quad (2)$$

Podemos plantear la función f como $f(x(\alpha,\beta,\gamma), y(\alpha,\beta,\gamma), z(\alpha,\beta,\gamma),t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \frac{\partial z}{\partial \alpha} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}$$

con lo que comparando las dos expresiones tenemos

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\
\frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z}
\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \\
\frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial \overline{r}}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial \overline{r}}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial \overline{r}}{\partial \beta} \\
\frac{\partial \overline{r}}{\partial \gamma} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} & \frac{\partial z}{\partial \gamma}
\end{pmatrix}$$

además las filas de la segunda matriz son iguales, salvo un factor de escala h, a los vectores de la base local en el sistema de coordenadas $(\alpha\beta\gamma)$. Pero las componentes de estos vectores base forman la matriz de cambio de base local GL

$$(GL_{ij}) = \begin{pmatrix} h_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \\ h_{\beta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \\ h_{\gamma} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{\alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & h_{\alpha} \frac{\partial y}{\partial \alpha} & h_{\alpha} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ h_{\beta} \frac{\partial x}{\partial \beta} & h_{\beta} \frac{\partial y}{\partial \beta} & h_{\beta} \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ h_{\gamma} \frac{\partial x}{\partial \gamma} & h_{\gamma} \frac{\partial y}{\partial \gamma} & h_{\gamma} \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{pmatrix}$$

En el caso de que la base local de $(\alpha\beta\gamma)$ sea ortogonal, la matriz del cambio de base corresponde a un *giro* entre la base local cartesiana y la base local del sistema de coordenadas $(\alpha\beta\gamma)$. Prácticamente los casos mas interesantes corresponden a sistemas de coordenadas locales $(\alpha\beta\gamma)$ ortogonales, por lo que en lo sucesivo se hablará de giros para las transformaciones de coordenadas locales. La razón de esto es que los operadores diferenciales expresados en

sistemas de coordenadas locales $(\alpha\beta\gamma)$ ortogonales no incluyen derivadas parciales cruzadas de las coordenadas, lo que permite el uso de la técnica de separación de variables en la resolución de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

El lector notará que el lado izquierdo de la ecuación (2) es un campo vectorial expresado en el sistema de coordenadas cartesiano. Por tanto para expresar el gradiente en el sistema de coordenadas ($\alpha\beta\gamma$) debemos multiplicar por la matriz de *giro local* correspondiente (GL_{ij}) que expresa la base local cartesiana en función de la base local en el sistema ($\alpha\beta\gamma$). De modo que el *operador gradiente* en coordenadas ($\alpha\beta\gamma$) es

$$\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} = \left(GL_{ij}\right) \overline{\nabla}_{xyz} = \left(GL_$$

En el caso de la divergencia el cambio de sistema de coordenadas es

$$\overline{\nabla}_{xyz} \bullet \overline{f}_{xyz} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{bmatrix}$$

hemos utilizado la transformación para el gradiente que debe actuar sobre un vector en coordenadas cartesianas; por lo que si expresamos el campo vectorial f en el sistema de coordinas ($\alpha\beta\gamma$) debemos hacer el giro correspondiente a cartesianas. Esta es la tarea de la matriz inversa de la (GL_{ij}) . Con esto conseguimos expresar el valor de la divergencia , que es un escalar, en el sistema de coordenadas(xyz) en función de medidas procedentes del sistema de coordenadas ($\alpha\beta\gamma$). En principio esto no significa que hayamos encontrado la transformación de la divergencia que buscábamos, salvo que el lector sepa que el valor de la divergencia de un campo vectorial en un punto es un escalar invariante independiente del sistema de coordenadas utilizado.

Podemos transformar la expresión anterior así

$$\begin{bmatrix} \left(GL_{ij}\right)_{p}^{-1}\left(GL_{ij}\right)_{p} \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} & \frac{\partial\beta}{\partial z} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial\beta} \\ \frac{\partial}{\partial\gamma} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \left(GL_{ij}\right)_{p}^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{pmatrix} + \left(GL_{ij}\right)^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{pmatrix}_{p} \end{bmatrix}$$

donde hemos introducido la matriz identidad como producto de una matriz numérica de transformación entre bases locales en el punto de derivación (subíndice p) por su inversa. También hemos utilizado la regla de derivación de productos que hemos utilizado ya en la sección sobre *Análisis Matemático de Campos*. Podemos reconocer también el operador gradiente en coordenadas $(\alpha\beta\gamma)$.

$$\left[\left(GL_{ij} \right)_p^{-1} \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \right] \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p^{-1} \left(f_{\alpha} \atop f_{\beta} \right) \right] + \left[\left(GL_{ij} \right)_p^{-1} \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \right] \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \atop f_{\beta} \right) \right]$$

Por otra parte, en el primer sumando tenemos una matriz GL con subíndice p que corresponde al valor numérico en el punto de derivación considerado y por tanto no está afectada por las derivadas del operador gradiente. En este caso podemos utilizar las propiedades de invarianza del producto escalar de vectores: Si A,B son dos vectores y A',B' sus correspondientes transformaciones en otro sistema de coordenadas

$$\overline{A} \bullet \overline{B} = \left[\left(GL_{ij} \right)^{-1} \overline{A} \right] \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)^{-1} \overline{B} \right] = \overline{A}' \bullet \overline{B}'$$
con esto tenemos
$$\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left(f_{\alpha}, f_{\beta}, f_{\gamma} \right) + \left[\left(GL_{ij} \right)_{p}^{-1} \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \right] \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{pmatrix}_{a} \right]$$

con lo que la divergencia en coordenadas $(\alpha\beta\gamma)$ incluye un término que depende del cambio de dirección en el sistema local de vectores base de $(\alpha\beta\gamma)$ al cambiar el punto de referencia debido a las operaciones diferenciales. Podemos simplificar el segundo sumando aplicando la propiedad de invarianza del producto escalar asi

$$\left[\left(GL_{ij}\right)_{p}\left(GL_{ij}\right)_{p}^{-1}\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma}\right]\bullet\left[\left(GL_{ij}\right)_{p}\left(GL_{ij}\right)^{-1}\begin{pmatrix}f_{\alpha}\\\\f_{\beta}\\\\f_{\gamma}\end{pmatrix}_{p}\right]=\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma}\bullet\left[\left(GL_{ij}\right)_{p}\left(GL_{ij}\right)^{-1}\begin{pmatrix}f_{\alpha}\\\\f_{\beta}\\\\f_{\gamma}\end{pmatrix}_{p}\right]$$

el producto de matrices que precede al gradiente no está afectado por la derivación y por tanto se trata el producto de una matriz por su inversa. Respecto a los términos afectados por la derivación, lo que interesa en realidad es la variación de la matriz GL^{-1} , expresado por δGL^{-1} , en un pequeño entorno respecto del punto de derivación p

$$\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \left[\left(GL_{ij} \right)_p^{-1} + \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \right] \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(f_{\alpha}, f_{\beta}, f_{\gamma} \right)_p + \left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_p \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[\left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(GL_{ij} \right)_p \mathcal{S} \left(GL_{ij} \right)^{-1} \right]$$

de modo que la divergencia queda así

donde los términos con subíndice p no deben considerarse variables en el proceso de derivación. Vemos aquí mas claramente la aparición de un término asociado a la variación de dirección de los vectores base locales en $(\alpha\beta\gamma)$. En caso de una transformación $(x,y,z)\rightarrow(x',y',z')$ entre dos sistemas de coordenadas cartesianos ortogonales fijos, compartiendo origen común pero girados con distinta orientación de sus ejes; entonces la variación local δGL^{-1} es nula y se verifica

$$\overline{\nabla}_{xyz} \bullet \overline{f}(x,y,z) = \overline{\nabla}_{x'y'z'} \bullet \overline{f}(x',y',z'); \quad x = x(x',y',z'); \quad y = y(x',y',z'); \quad z = z(x',y',z');$$

Lo que refleja claramente el carácter *invariante* del operador divergencia. Para la transformación del rotacional tenemos

$$\left(GL_{ij}\right)_{p} \left[\overline{\nabla}_{xyz} \times \overline{f}_{xyz} \right] = \left(GL_{ij}\right)_{p} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \left(GL_{ij}\right)^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \end{pmatrix} \\ \left(GL_{ij}\right)^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \end{pmatrix} \right\}$$

introduciendo el operador gradiente como antes tenemos

$$\left(GL_{ij}
ight)_{p} \left\{ \left[\left(GL_{ij}
ight)_{p}^{-1} \overline{
abla}_{lphaetaeta}
ight] imes \left(GL_{ij}
ight)_{p}^{-1} \left(eta_{lpha} \atop f_{eta} \atop f_{\gamma}
ight) + \left(GL_{ij}
ight)^{-1} \left(eta_{lpha} \atop f_{eta} \atop f_{\gamma}
ight)_{p}
ight]
ight\}$$

para el caso del producto vectorial tenemos la siguiente propiedad

$$\overline{A} \times \overline{B} = (GL_{ij}) \{ (GL_{ij})^{-1} \overline{A} \} \times [(GL_{ij})^{-1} \overline{B}] \}$$

que podemos aplicar al término asociado a la matriz GL^{-1} tomada como constante resultando

$$\left. \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \times \left(f_{\alpha}, f_{\beta}, f_{\gamma} \right) + \left(GL_{ij} \right)_{p} \left\{ \left[\left(GL_{ij} \right)_{p}^{-1} \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \right] \times \left[\left(GL_{ij} \right)^{-1} \left(f_{\alpha} \right)_{p} \right] \right\}$$

donde vemos de nuevo un término asociado al cambio de dirección de los vectores del sistema base local de $(\alpha\beta\gamma)$. De forma análoga al caso de la divergencia llegamos al siguiente resultado para el rotacional

$$\overline{
abla}_{lphaeta\gamma} imesegin{bmatrix} \left(f_{lpha},f_{eta},f_{\gamma}
ight) + \left(GL_{ij}
ight)_{p}\deltaig(GL_{ij}ig)^{\!-1}igg(f_{lpha}\f_{eta}\f_{\gamma}igg)_{p} \end{bmatrix}$$

Los términos asociados al cambio de dirección de los vectores del sistema base local aparecen también de forma natural en el concepto matemático de derivada covariante.

Aplicación al caso de coordenadas esféricas

$$\overline{r} = (x, y, z) = (r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta))$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}; \Rightarrow h_r = 1, h_\theta = \frac{1}{r}, h_\phi = \frac{1}{r\sin(\theta)} \Rightarrow \overline{\nabla}_{r\theta\phi} = (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}) \\ -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}$$

$$GL = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}; \quad GL^{-1} = (GL)^{T} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta G L^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\theta)\cos(\phi) & 0 \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\theta)\sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}_{p} d\theta + \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\phi) & -\cos(\theta)\sin(\phi) & -\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p} d\phi$$

$$GL\delta GL^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p} d\theta + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}_{p} d\phi$$

La divergencia resulta ser

$$(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi}) \bullet \left[(f_r, f_\theta, f_\phi) + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\phi \end{pmatrix}_p d\theta + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\phi \end{pmatrix}_p d\phi \right] = \\ (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi}) \bullet \left[(f_r, f_\theta, f_\phi) + (-f_\theta, f_r, 0)_p d\theta + (-\sin(\theta) f_\phi, -\cos(\theta) f_\phi, \sin(\theta) f_r + \cos(\theta) f_\theta)_p d\phi \right] \\ = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{f_r}{r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin(\theta)} (\sin(\theta) f_r + \cos(\theta) f_\theta) \Rightarrow \\ divergencia = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 f_r \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) f_\theta \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} f \phi \right)$$

El Laplaciano se obtiene como la divergencia del gradiente

$$\begin{split} laplaciano &= div(gradiente) = \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2\right), \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta)\right), \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\right] \bullet \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi}\right) f \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right]\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta}\right]\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right) \end{split}$$

el hecho de que sean ortogonales las bases locales del sistema de coordenadas esféricas hace que el *Laplaciano* no tenga términos en derivadas segundas cruzadas de dos coordenadas distintas. Esta simplificación es una razón para la preferir los sistemas de coordenadas con bases locales ortogonales.

Para el rotacional en esféricas tenemos

$$(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi}) \times \begin{bmatrix} (f_r, f_{\theta}, f_{\phi}) + \begin{pmatrix} 0 - 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p} \begin{pmatrix} f_r \\ f_{\theta} \\ f_{\phi} \end{pmatrix}_{p} d\theta + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}_{p} \begin{pmatrix} f_r \\ f_{\theta} \\ f_{\phi} \end{pmatrix}_{p} d\phi = (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi}) \times [(f_r, f_{\theta}, f_{\phi}) + (-f_{\theta}, f_r, 0)_{p} d\theta + (-\sin(\theta) f_{\phi}, -\cos(\theta) f_{\phi}, \sin(\theta) f_r + \cos(\theta) f_{\theta})_{p} d\phi] \Rightarrow componente \ r : \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [f_{\phi}] - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} [f_{\theta} - (\cos(\theta) f_{\phi})_{p} d\phi] = \frac{1}{r \sin(\theta)} [\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) f_{\phi}) - \frac{\partial}{\partial \phi} (f_{r}) - \frac{\partial}{\partial \phi} (f_{\theta})]$$

$$componente \ \theta : \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} [f_r - (\sin(\theta) f_{\phi})_{p} d\phi] - \frac{\partial}{\partial r} [f_{\phi}] = \frac{1}{r} [\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} (f_r) - \frac{\partial}{\partial r} (rf_{\phi})]$$

$$componente \ \phi : \frac{\partial}{\partial r} [f_{\theta}] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [f_r + (-f_{\theta})_{p} d\theta] = \frac{1}{r} [\frac{\partial}{\partial r} (rf_{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (f_r)]$$

REFERENCIAS

- [1] Cinemática y Dinámica del Sólido Rígido. Mismo Autror.
- [2] Espacio, tiempo, materia y vacío. Mismo Autror.
- [3] Sobre la ecuación de ondas. Mismo Autor.

Tensor de Cauchy

http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor#Transformation_rule_of_the_stress_tensor

Otros:

http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/115/html/sec_8.htm

http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/115/html/sec_7.htm