

Título del Trabajo	Sobre la ecuación de Ondas.
Nombre	Enrique Cantera del Río
Filiación	C/Padre Benito Menni-6-2-E 47008 Valladolid (España)
Correo electrónico	benarro@gmail.com
Resumen	Introducción a la ecuación de ondas y la ecuación de Laplace para primeros cursos de carreras científico-técnicas
Versión 2 ^a	Segunda versión respecto a la primera aparecida en la edición 8 de INGLOMAYOR. A parte de modificaciones de estilo en la redacción se mantiene el texto de la versión previa; salvo la sección 9 sobre el principio de Huygens que se amplía para incluir una explicación matemática de la difracción de Fraunhofer.

SOBRE LA ECUACIÓN DE ONDAS

Enrique Cantera del Río

1-Introducción experimental.

2-La solución de la ecuación de ondas en una dimensión.

3-Interpretación física de la solución de la ecuación de ondas.

4-Ondas Estacionarias.

5-El teorema de Fourier y la linealidad de la ecuación de onda.

6-La ecuación de onda en tres dimensiones.

7-Ondas circulares en el plano.

8-Relación entre la ecuación de Laplace y la ecuación de ondas.

9-El principio de Huygens y la difracción.

10-Ondas estacionarias en tres dimensiones.

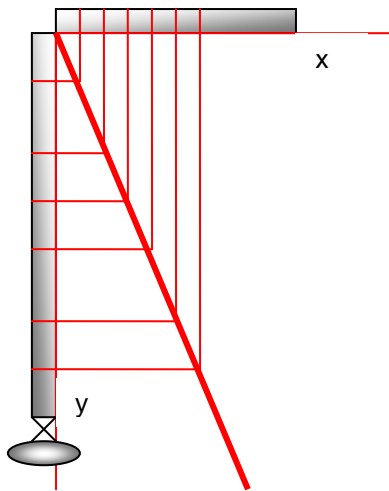
11-Ondas guiadas.

12-Ondas en la cuerda de una guitarra.

13-Continuidad, Reflexión y Refracción.

14-Ondas y relatividad especial.

1-Introducción experimental.



Para esta experiencia el lector necesita un panel vertical con corcho sobre el que pueda dibujar y clavar chinchetas. Varias bandas elásticas iguales, en el dibujo en gris, y varios pesos u otros objetos con la misma masa conocida, en el dibujo la elipse gris. Es conveniente que las bandas sean de masa despreciable respecto de los pesos aplicados.

Tome una banda elástica y extiéndala, sin forzarla, sobre el eje x desde el origen de coordenadas marcando con un bolígrafo, en dicha banda y en el propio eje x , varios puntos de referencia. Después colocamos la banda sobre el eje y , sometiéndola a tensión con un peso conocido tal como aparece en el

dibujo. Marcamos los puntos de la banda en el eje y . Si unimos los puntos correspondientes como si fueran los valores de una función $y(x)$ en coordenadas cartesianas, veremos que, mientras se mantenga el comportamiento elástico, la función $y(x)$ corresponde a una línea recta que pasa por el origen. Podemos expresar esta función así:

$$y(x) = x + \xi(x) = x \tan(a) \equiv \xi(x) = (\tan(a) - 1)x$$

donde $\xi(x)$ representa el desplazamiento experimentado por el punto x de la banda no sometida a tensión. En términos diferenciales, eliminamos la necesidad de un origen de coordenadas determinado:

$$\frac{\partial \xi(x)}{\partial x} = A = \tan(a) - 1$$

El siguiente paso es determinar la dependencia del valor A , constante para una experiencia determinada. Podemos proceder así: Si tomamos como peso el doble del caso anterior, tendremos que el desplazamiento $\xi(x)$ será mayor y por tanto en valor A aumentará; luego A depende directamente de la fuerza aplicada a la banda. Por otra parte, si el peso doble lo aplicamos a un conjunto de dos bandas iguales, los desplazamientos $\xi(x)$ serán iguales que en el caso de un peso unidad y una única banda. Para que esto sea cierto las secciones transversales de cada banda deben soportar la misma fuerza; la fuerza por unidad de superficie o *presión* debe ser homogénea en toda la sección transversal. Por tanto tenemos que

$$Y \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} = \frac{F}{S}$$

donde la constante Y , conocida como *módulo de Young*, es una constante que ajusta las unidades de la ecuación y que depende del material del que esté hecha la banda y de la temperatura. La ley de *Hooke*, correspondiente al muelle ideal sin masa, se puede obtener a partir de la expresión anterior

$$F = YS \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} = \frac{YS}{\Delta x_0} \Delta \xi_0 = k \Delta \xi_0; \Delta x_0 = l_{banda}; k = \frac{YS}{l_{banda}}$$

donde, dado que en condiciones de equilibrio est tico la derivada es constante e independiente de x , hemos calculado la derivada por medio de la longitud de la banda en ausencia de tensi3n (Δx_0) y el desplazamiento correspondiente del extremo de la banda ($\Delta \xi_0$).

Si ampliamos el planteamiento a una situaci3n no est tica el desplazamiento (elongaci3n) asociado a cada punto de la banda dependerá tambi3n del tiempo $\xi(x,t)$. Tomemos en un instante t dado dos segmentos de banda contiguos, tan pequeños como queramos, centrados en los puntos est ticos x y $x+dx$. El análisis de equilibrio anterior consideraba que la masa de la banda es esencialmente despreciable, por lo que debemos introducir una *masa puntual* dm que conecta nuestros segmentos elementales, que consideraremos tambi3n de secci3n elemental dS . En una situaci3n no est tica debemos aceptar que la fuerza F no es igual en cualquier punto de la banda; de modo que en los extremos de los segmentos elementales la fuerza exterior, que conecta un elemento con otro, no est  compensada y debe producirse la *aceleraci3n* de la masa puntual correspondiente. Con el modelo dinámico descrito, podemos utilizar el resultado est tico anterior para nuestros dos segmentos diferenciales contiguos:

$$Y \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = \frac{F(x,t)}{dS}$$

$$Y \frac{\partial \xi(x+dx,t)}{\partial x} = \frac{F(x+dx,t)}{dS} = \frac{F(x,t) + dF}{dS}$$

restando y considerando que, en un instante t determinado, la fuerza no compensada dF debe acelerar la masa elemental situada entre los segmentos, y que tal aceleraci3n se puede expresar con la funci3n $\xi(x,t)$

$$Y \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} dx = \frac{dF}{dS} = \frac{dm}{dS} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{Y} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}; \rho_0 = \frac{dm}{dS dx}$$

tomando dm como la masa contenida en el segmento dx de la banda, entonces ρ_0 representa la densidad en volumen de la banda elástica no sometida a tensi3n. El resultado corresponde a una ecuaci3n de ondas longitudinales asociada al desplazamiento de cada punto respecto a su posici3n de equilibrio de la banda con una *velocidad de onda* de valor

$$c = \sqrt{Y/\rho_0}$$

Hay que decir que la ecuaci3n de ondas deducida, y por tanto la velocidad de onda, está asociada a un observador inercial para el cual la banda, cuando no est  sometida a tensi3n, est  completamente en reposo. De hecho esta banda en equilibrio est tico (reposo) se confunde con el sistema de coordenadas del observador.

2-La solución de la ecuación de ondas en una dimensión.

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

La ecuación anterior puede factorizarse de esta forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \xi(x,t) = 0$$

Lo cual sugiere soluciones de la forma $F(x+ct)+G(x-ct)$. Es posible demostrar que la expresión anterior es la solución general para esta ecuación. Si hacemos el siguiente cambio de variables

$$\mu = x + ct$$

$$\eta = x - ct$$

Las derivadas parciales se transforman así

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \xi(\mu, \eta) &= \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial \mu} + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \xi(\mu, \eta) &= \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mu} - \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

la segunda derivada es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \xi(\mu, \eta) \right] &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \mu} + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \mu} + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \xi(\mu, \eta) \right] &= c^2 \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \mu} - \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \mu} - \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right] \right) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación de ondas

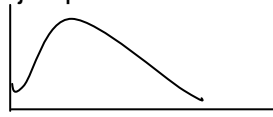
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mu} \right) = 0$$

cuya solución general es, tal como indicamos antes

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mu} = f(\mu); \Rightarrow \xi(x,t) = \int f(\mu) d\mu + G(\eta) \equiv F(x+ct) + G(x-ct)$$

3-Interpretación física de la solución de la ecuación de ondas.

Podemos observar una de las componentes, F o G, en el instante t=0 en el plano (ξ,x) como una función arbitraria , por ejemplo

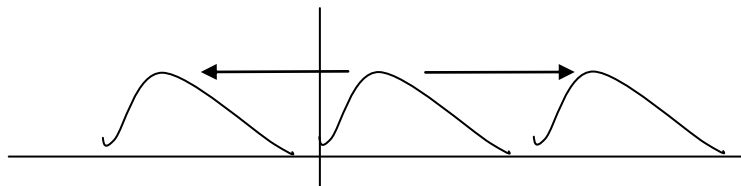


Para cualquier otro instante t y cualquier otra posición x podemos hacer la relación con coordenadas x en el instante t=0 para las funciones F y G así

$$x_0^F = x + ct \Rightarrow F(x_0^F, 0) = F(x, t)$$

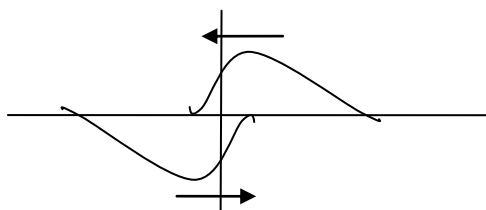
$$x_0^G = x - ct \Rightarrow G(x_0^G, 0) = G(x, t)$$

Lo que permite visualizar la primera componente F como el desplazamiento del “objeto” $F(x,0)$ sobre el eje x a velocidad $-c : x = -ct + x_0$. Análogamente la segunda componente G corresponde al desplazamiento del “objeto” $G(x,0)$ sobre el eje x a velocidad $c : x=ct + x_0$.



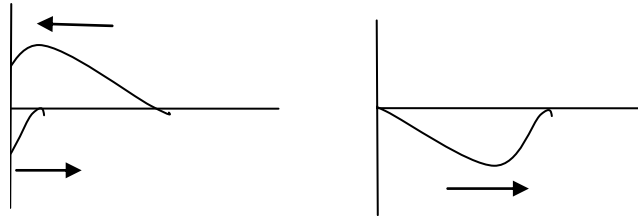
De esta forma vemos que las dos componentes son ondas viajeras que representan el movimiento de una perturbación capaz de mantener una forma reconocible.

Tomemos el caso del que partimos con una banda elástica de la que cuelga un peso .Partiendo de una situación de reposo, podemos estirar levemente hacia abajo el peso. Si cesamos la fuerza el peso experimentará un movimiento oscilatorio igual al caso clásico del movimiento del muelle. Según nuestros resultados durante este movimiento es aplicable a la banda (o muelle) la ecuación de ondas. Pero si probamos como solución una de las funciones posibles, bien sea $F(x+ct)$ o $G(x-ct)$, veremos que no pueden representar por si solas la física del problema. Si nos fijamos, en el punto de contacto de la banda con el techo *el estiramiento ξ es siempre nulo para cualquier instante de tiempo*. Esto no es lo que se espera de una onda viajera que pase por ese punto : puede anularse en algunos instantes o en algunos intervalos de tiempo, pero *no siempre*. Según la lógica, si una de las funciones F, G no puede darnos una solución entonces debemos recurrir a la solución completa $F(x+ct)+G(x-ct)$. Si el punto de contacto con el techo señalado corresponde con la coordenada $x=0$, las funciones



F y G deben verificar la siguiente relación funcional $F(u)+G(-u)=0$. Lo que indica que, en nuestra visión geométrica, las funciones F y G están giradas 180 grados en el plano (ξ,x) respecto del origen de coordenadas y se mueven, a la misma velocidad y en sentidos contrarios. La representación anterior

muestra que es posible una solución en la que el estiramiento, es decir, la suma $F+G$, sea nula permanentemente en $x=0$. Evidentemente a la izquierda del eje vertical hay una pared, o en general un objeto rígido y de masa muy elevada y no existe la onda en esta parte del espacio. Sin embargo el efecto de esta pared o objeto muy masivo en lo que respecta a la cuerda es absorber la onda incidente y transformarla en una onda reflejada sobre la misma cuerda



El carácter masivo y rígido de la pared hace que la onda incidente no pueda provocar desplazamientos internos en dicha pared y la energía que transporta la onda deba ser reflejada en forma de *onda rebotada* hacia la misma cuerda. El lector puede comprobar este comportamiento si dispone de una cuerda gruesa. Si atamos la cuerda a un extremo fijo y sacudimos el otro extremo podemos ver la onda o pulso generado moviéndose por encima de la línea de la cuerda. Al llegar la onda al extremo fijo la onda rebota en forma de un pulso que se mueve por debajo de la línea de la cuerda. En este caso tenemos una onda transversal en vez de longitudinal como en el caso de la banda elástica, pero la ecuación de ondas es igualmente aplicable.

Siguiendo con el caso de la banda elástica, el movimiento oscilatorio del sistema se puede mantener indefinidamente si fuésemos capaces de eliminar las pérdidas de energía por rozamiento o calentamiento interno. Según la mecánica clásica, el movimiento de la masa sujeta al extremo de la banda puede describirse así

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi \Rightarrow x = x_i + \xi_{\max} \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \xi = x - x_i = \xi_{\max} \cos(\omega t) \quad ; \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

Es decir, la posición de la masa es la suma de la posición inicial x_i de la masa m sin tensión en la banda y de la elongación de la banda elástica en este punto, siendo ξ_{\max} la elongación máxima en x_i . Esta solución es válida, como veremos, dentro de la hipótesis de masa de la banda despreciable¹ frente a la masa de la bola (m) y para el extremo que ocupa dicha bola. Sin embargo note el lector que podemos analizar el movimiento de un punto de la banda que no sea el punto extremo utilizando este mismo resultado si suponemos que $k(x)$ se mantiene constante y la masa de la banda despreciable. De esta forma podemos apuntar a una solución general para la elongación de la banda con esta forma

$$\xi = \xi_{\max}(x) \cos(\omega t)$$

Donde, para el caso del punto de la banda en contacto permanente con la pared la elongación de dicho punto debe ser siempre nula y por tanto $\xi_{\max}(0)=0$; ya que dicho

¹ ver apéndice *El muelle sin masa*

punto no puede moverse y mantener el contacto con la pared. Recuperando el análisis ondulatorio previo, deben ser compatibles las siguientes ecuaciones

$$\xi(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) = \xi_{\max}(x) \cos(\omega t); \quad \xi_{\max}(0) = 0; \quad F(-u) + G(u) = 0$$

Si elegimos para F y G una función seno o coseno de la misma amplitud A ($G=F=\text{seno}()$ ó $G=-\text{seno}()$ y $F=-\text{coseno}()$), podemos ver rápidamente, utilizando las fórmulas del seno/coseno de una suma/diferencia, lo siguiente

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A \sin(K(x + ct)) + A \sin(K(x - ct)) = 2A \sin(Kx) \cos(\omega t); \quad \omega = Kc \\ &\Rightarrow \xi_{\max}(x) = 2A \sin(Kx) \end{aligned}$$

El valor K (mayúscula) se introduce para que el argumento del seno sea adimensional (radianes), y tiene por tanto unidades de inversa de la longitud. K está definido completamente a partir de la frecuencia de oscilación y la velocidad de propagación de las ondas: $w=Kc$. Es evidente que este parámetro corresponde con el vector de ondas de una onda senoidal: $K=2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda. Pero la solución anterior es una solución exacta de la ecuación de ondas y en principio puede corresponder a un caso real. Sin embargo, en la ecuación dinámica de Newton hemos utilizado una aproximación cuasiestática para que el valor del parámetro elástico k se pueda considerar constante. Matemáticamente la primera aproximación es el valor constante de la siguiente derivada

$$\frac{\partial \xi_{\max}(x)}{\partial x} = \frac{\xi_{\max}(l_{\text{banda}})}{l_{\text{banda}}} = cte$$

Si aplicamos esta condición a la solución obtenida tenemos

$$\frac{\partial \xi_{\max}(x)}{\partial x} = 2AK \cos(Kx)$$

Supuestos A y K constantes, para aproximar la derivada a una constante es necesario que sea $Kx \approx 0$ para todo punto x de la banda sin tensión, de modo que el coseno sea aproximadamente 1, es decir

$$Kx \approx 0 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} l_{\text{banda}} \approx 0 \rightarrow \lambda \gg l_{\text{banda}}$$

La longitud de onda debe ser mucho mayor que la longitud de la banda en reposo. (Esta aproximación es análoga al caso de los circuitos de corriente alterna y las ondas electromagnéticas) Si utilizamos la definición de K tenemos

$$Kl_{\text{banda}} = \frac{\omega}{c} l_{\text{banda}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{\rho_0}{Y}} l_{\text{banda}} = \sqrt{\frac{YS}{ml_{\text{banda}}}} \frac{\rho_0}{Y} l_{\text{banda}} = \sqrt{\frac{\rho_0 S l_{\text{banda}}}{m}} = \sqrt{\frac{m_{\text{banda}}}{m}}$$

Y por tanto la aproximación considerada es equivalente a $m_{\text{banda}} \ll m$, es decir, la masa de la banda debe ser muy inferior a la masa de la bola.

Haciendo la parcial respecto al tiempo en la solución encontrada, vemos que existe un instante en el que la velocidad de todos los puntos de la banda se anula

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(x, t) = -\omega \xi_{\max}(x) \sin(\omega t) = 0 \Rightarrow \omega t = n\pi \rightarrow \frac{2\pi}{T} t = n\pi \Rightarrow t = n \frac{T}{2}$$

Donde T es el periodo de oscilación, es decir, el tiempo que tarda la bola en recuperar una posición y velocidad dadas. Por tanto, cada semi-periodo se produce una situación de *velocidad nula para todos los puntos de la banda elástica, incluida la masa de la bola*. Podemos ver también que, en estos instantes, la elongación de la banda ξ es máxima. Desde el punto de vista energético, en estos instantes la energía cinética del sistema es nula y por tanto la energía del sistema debe estar acumulada totalmente en forma de energía potencial elástica; lo cual indica que en estos instantes la longitud de la banda es máxima o mínima. Por tanto y dentro de nuestra aproximación, aplicando la fórmula de la energía potencial elástica tenemos

$$E = \frac{1}{2} k (\xi_{\max}(l_{banda}))^2 \Rightarrow \xi_{\max}(l_{banda}) = 2A \sin(Kl_{banda}) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \approx 2AKl_{banda}$$

Donde E es una constante correspondiente a la energía mecánica del sistema. Dado que podemos conocer los valores de E, K, k y l_{banda} ; podemos calcular el valor de la amplitud de onda A de la expresión anterior y otros resultados obtenidos

$$\sqrt{\frac{2E}{k}} \approx 2A \sqrt{\frac{m_{banda}}{m}} \Rightarrow A \approx \sqrt{\frac{mE}{2km_{banda}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{m_{banda}}} \xi_{\max}(l_{banda})$$

En 2ª aproximación : modificación de la frecuencia de oscilación debido a la masa del muelle o banda elástica

A partir del campo de elongaciones ξ encontrado, podemos calcular la fuerza sobre la masa conectada al extremo recordando el desarrollo hecho en la introducción.

Tomando módulos tenemos

$$\|F_{extremo}\| = \left\| YS \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right\|_{extremo} = \left\| m \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} \right\|_{x=l_{banda}} \Rightarrow \tan(Kl_{banda}) = \frac{YSK}{m\omega^2}$$

Eliminando K con $\omega = Kc$ y aplicando $c^2 = Y/\rho_0$; ambas relaciones asociadas al fenómeno ondulatorio, tenemos

$$\frac{\omega l_{banda}}{c} \tan\left(\frac{\omega l_{banda}}{c}\right) = \frac{m_{banda}}{m}$$

Y para pequeños valores del argumento de la tangente (equivalente a Kl_{banda})

$$\frac{\omega l_{banda}}{c} \left[\frac{\omega l_{banda}}{c} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega l_{banda}}{c} \right)^3 + \dots \right] = \frac{m_{banda}}{m} = \left(\frac{\omega l_{banda}}{c} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega l_{banda}}{c} \right)^2 + \dots \right]$$

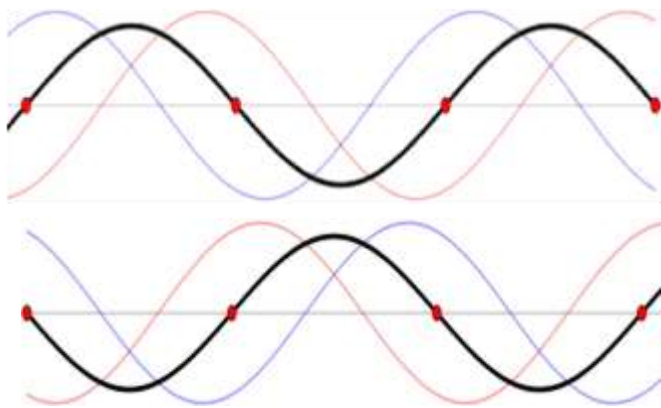
Lo que conduce a una aproximación más refinada de la frecuencia de oscilación que incluye la masa de la banda o muelle ($k = YS/l_{banda}$ es la constante elástica correspondiente)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}m_{banda}}}$$

4-Ondas Estacionarias.

Hasta ahora hemos estudiado una solución de la ecuación de ondas pero restringida a un caso particular con la aproximación $\lambda \gg l_{banda}$. Si analizamos la solución encontrada en un rango mayor llegamos al comportamiento descrito en las siguientes imágenes. Si suponemos que la onda roja y la azul son ondas senoidales con la misma amplitud y se desplazan en sentidos contrarios la suma de las dos corresponde a la expresión :

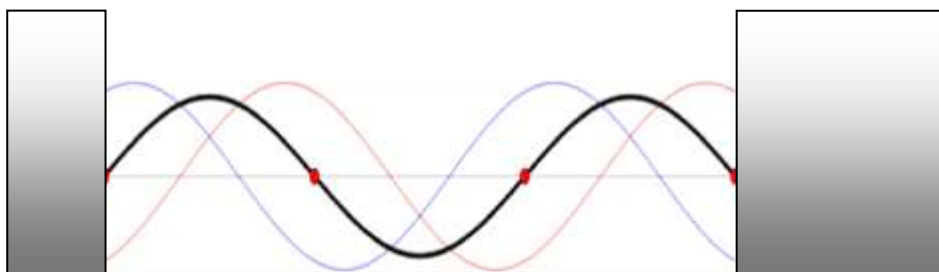
$$\xi(x,t) = 2A \sin(Kx) \cos(\omega t) = \xi_x(x) \xi_t(t)$$



Vemos inmediatamente que los puntos x que verifican $Kx = n\pi$ ($n=0,1,2,3,4\dots$) se mantienen inmóviles en su posición, ya que para ellos $\xi(x,t) = 0$. A estos puntos característicos se les denomina *nodos*. De igual forma, como hemos visto, también existen instantes de tiempo en los que la velocidad de todos los puntos afectados por el proceso

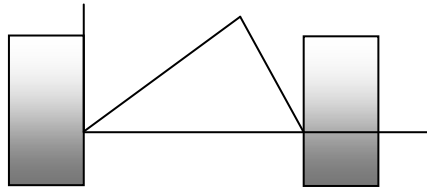
ondulatorio se anula. Estas características nos informan que el proceso ondulatorio que se está dando corresponde a una onda estacionaria. Estas ondas estacionarias se producen normalmente en condiciones de confinamiento espacial del proceso ondulatorio. En nuestro caso es evidente que las ondas elásticas se producen en una zona acotada del espacio, ya que el medio elástico no es infinito y no pueden alargarse o comprimirse arbitrariamente; a riesgo de perder sus propiedades elásticas o romperse.

En el desarrollo que hemos hecho, partimos de una solución general $F(x+ct)+G(x-ct)$ que en principio no está acotada. Eligiendo una función *senoidal* F y G hemos visto que podemos reproducir el comportamiento de un nodo, es decir, de un punto fijo. Sin embargo vemos que aparecen también múltiples puntos fijos en la banda, de modo que podríamos conectar la banda a una pared rígida en alguno de estos puntos y la solución aún sería válida.



De esta forma las ondas rebotan en las dos paredes a las que está conectada la banda elástica o muelle.

Dado que la ecuación de onda no especifica una función determinada como solución, sino más bien una forma funcional, hemos estado utilizando funciones sinodales con la ventaja de conocer todas sus propiedades. Sin embargo las funciones de onda en el



muelle o banda elástica pueden ser diferentes.

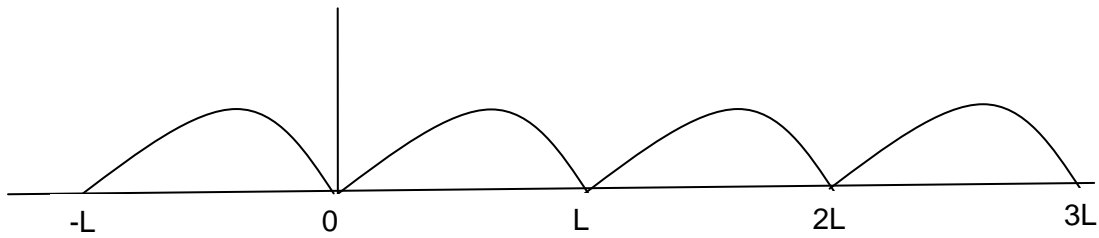
Imaginemos un muelle anclado entre las dos paredes señaladas antes. Desde el estado de

reposo cogemos el punto medio del muelle y lo desplazamos ligeramente a la derecha. El campo de desplazamientos generado $\xi(x)$ tendrá la forma del

dibujo adjunto. A la izquierda del punto en que

aplicamos la fuerza hay un estiramiento y a la derecha hay una compresión del muelle o banda elástica. Si liberamos el muelle, será la forma funcional dibujada la que se desplace hacia la izquierda, rebote en la pared, continúe hacia la derecha y rebote hasta la pared opuesta, y así periódicamente si no hay pérdidas de energía.

5-El teorema de Fourier y la linealidad de la ecuación de onda.



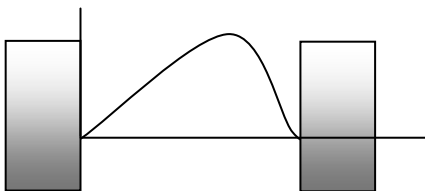
Consideremos una función $\xi(x)$ de una variable, periódica y de periodo L , por lo demás arbitraria, como se ve en el dibujo adjunto. Para esta función es válido el *Teorema de Fourier*, según el cual se puede aproximar dicha función, tanto como queramos, por medio de una serie infinita de sumas de senos y cosenos de esta forma

$$\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \xi(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx ; b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \xi(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx ;$$

Podemos aplicar esto al caso de la perturbación en el campo de desplazamientos que hemos creado en el muelle, siendo L la distancia, fija, entre las dos paredes en que están anclados los extremos del muelle. El teorema de Fourier nos da una aproximación a la forma de la función en el intervalo $[0, L]$ en términos de una suma de ondas sinodales que ya conocemos. Dependiendo de la forma de la onda, serán necesarios más o menos términos de la serie de Fourier para conseguir una aproximación con un error cuadrático medio menor que un valor dado. En particular, si la función tiene un vértice como en el caso que hemos visto antes, entonces son necesarios muchos más términos de la serie para conseguir una aproximación dada.

En la última parte de la sección anterior vimos el caso de desplazar ligeramente el centro del muelle. Note el lector que el punto donde aplicamos la fuerza representa un vértice en el campo de desplazamientos en el que



la derivada $\partial\xi/\partial x$ es discontinua por ser diferente la pendiente a un lado y otro de este punto; y la derivada segunda $\partial^2\xi/\partial x^2$ no está bien definida en el mismo punto; con lo cual la ecuación de ondas no sería completamente aplicable. Sin embargo, la serie de Fourier permite aproximar $\xi(x)$ tanto como

queramos (en términos de ajuste de curvas por mínimos cuadrados) por medio de una serie infinita senos y cosenos; es decir, por aproximaciones sucesivas de funciones continuas y derivables en cualquier orden. Cuantos más términos de la serie tengamos la aproximación será más precisa y existe un valor “ n ” para el que la contribución del resto de términos (infinitos términos) podrá considerarse despreciable. Esto es análogo al concepto de *ancho de banda* en la transmisión de señales de comunicaciones. De esta forma la serie de Fourier permite aproximar funciones

arbitrarias en un intervalo acotado de la variable independiente que presenten algún tipo de discontinuidad no esencial (que no tome valores infinitos) en el valor de la función o de sus derivadas. Estas aproximaciones se realizan por medio de funciones analíticas, continuas, derivables y con derivadas continuas en cualquier orden. Este planteamiento de las series de Fourier es muy distinto al de la serie de Taylor.

La función $\xi(x)$ corresponde a una perturbación inicial que podemos provocar en el campo de desplazamientos del muelle; sin embargo esta perturbación puede ser arbitraria. En concreto si elegimos la perturbación

$$\xi(x) = A \sin(Kx); \quad K = \frac{2\pi}{L}$$

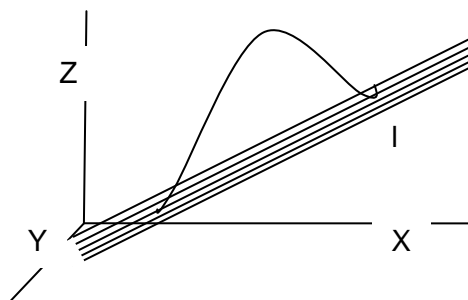
Podemos comprobar que corresponde al término $n=1$ de la serie de Fourier, de modo que el coeficiente b_1 no se anula y el resto de coeficientes es nulo. De hecho esta forma funcional es la que hemos utilizado en el análisis de la sección anterior donde hablamos de las ondas estacionarias. De este modo, si excitamos inicialmente el muelle con el campo de desplazamientos anterior, esta forma se desplaza en el muelle de modo que los rebotes de la onda provocaran la aparición de los nodos propios de la onda estacionaria. Para una forma de onda más compleja aparecerán mas componentes seno/cosenoidales, pero todas con un valor de su parámetro K creciente con n : $K=2n\pi/L$. La linealidad de la ecuación de onda permite repetir el análisis estacionario hecho para la primera onda ($n=1$) para cualquier otra componente ($n>1$). Las distintas componentes no interfieren entre sí, no hay transferencia de energía entre unas componentes ondulatorias y otras. El resultado neto es, simplemente, la suma de los resultados encontrados para cada componente. De este modo el resultado completo para el caso de una onda estacionaria sería

$$\xi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(a_n + b_n) \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{L}ct\right) \right]$$

Donde c es la velocidad de la onda, que, para un sistema lineal, es constante e independiente del valor de K . El hecho de que $KL > 1$ supone que la ley de Hooke no es válida en esta experiencia.

6-La ecuación de onda en tres dimensiones.

La imagen representa una banda elástica o muelle en la dirección l . La banda se



representa como un conjunto de fibras elásticas. La curva representa un campo de desplazamiento elástico común de todas las fibras. También se representa un sistema de coordenadas cartesiano en sus ejes X, Y, Z . La ecuación de ondas unidimensional que hemos visto corresponde en este contexto a

$$\frac{\partial^2 \xi(l,t)}{\partial l^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(l,t)}{\partial t^2}$$

Es decir, la variable espacial relevante corresponde a medidas hechas sobre la dirección l y el campo de desplazamiento es el mismo para todas las fibras. Este planteamiento no está en conflicto con el planteamiento experimental al inicio de este trabajo.

Es evidente que dado un punto (x,y,z) este identifica una sola fibra y un valor de $l(x,y,z)$ dentro de dicha fibra. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el origen de la fibra central de la banda coincide con el origen de coordenadas. En este caso, si k designa ahora un vector unitario adimensional en la dirección de las fibras, se verifica

$$l(x, y, z) = (k_x, k_y, k_z) \bullet (x, y, z) = \bar{k} \bullet \bar{r}$$

Es decir, dado un valor x,y,z dentro de la banda, el valor de l para la fibra correspondiente está dado por la expresión anterior. Dado que el campo de desplazamientos es el mismo para todas las fibras, es decir, vale lo mismo para cualesquiera dos fibras en dos puntos con el mismo valor l , podemos introducir el campo $\xi(l(x,y,z),t)$. Partiendo de este campo podemos expresar la ecuación de ondas en 3 dimensiones utilizando la regla de la cadena de derivadas:

$$\frac{\partial \xi(l(x, y, z), t)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(l, t)}{\partial l} \frac{\partial l(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(l, t)}{\partial l} k_x$$

Dado que k_x es constante, una segunda derivación resulta en

$$\frac{\partial^2 \xi(l(x, y, z), t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\partial \xi(l, t)}{\partial l} k_x \right] \frac{\partial l(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi(l, t)}{\partial l^2} k_x^2$$

Repitiendo esto para las coordenadas y,z y sumando tenemos

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \xi(l, t)}{\partial l^2} [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2] = \frac{\partial^2 \xi(l, t)}{\partial l^2}$$

Ya que k es un vector unitario. En total la ecuación de ondas en tres dimensiones resulta ser

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \equiv \nabla^2 \xi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \xi(x, y, z, t)$$

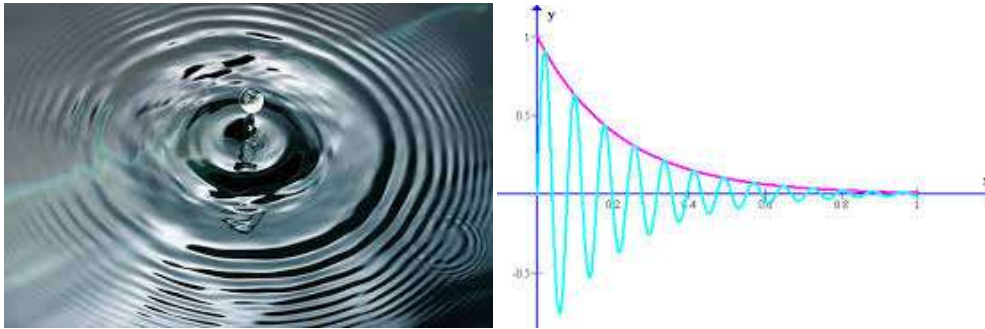
El proceso ondulatorio que hemos supuesto en el volumen de la banda elástica para deducir esta ecuación se denomina *onda plana*, ya que en un instante determinado todos los puntos de la banda en un *plano*, perpendicular a la banda en este caso, tienen el mismo valor de ξ . Las ondas planas se pueden apreciar experimentalmente en otras experiencias como la cubeta de ondas. Sin embargo la ecuación final la suponemos válida para un campo $\xi(x,y,z,t)$ arbitrario, no solo para una onda plana.

Note el lector que la ecuación diferencial obtenida es válida en cualquier sistema de coordenadas.

Podemos generalizar la solución del caso unidimensional al caso tridimensional, pero solo para ondas planas

$$\xi(x, y, z, t) = F(\bar{k} \cdot \bar{r} - ct) + G(\bar{k} \cdot \bar{r} + ct)$$

7-Ondas circulares en el plano.



La imagen corresponde a la caída de una gota de agua en la superficie de un estanque con agua en reposo. Las modificaciones de presión producidas se transmiten en forma de onda circular desde el centro. En la superficie del agua aparecen crestas y valles que siguen un patrón similar al de la gráfica de la derecha tomado sobre una línea radial (x) que representa el nivel inicial del agua; de modo que a medida que la distancia al centro aumenta las crestas y valles van siendo menos pronunciados respecto del nivel inicial del agua. Con el tiempo la energía se va distribuyendo en áreas más y más grandes, de modo que el desplazamiento provocado por la onda, la cual se propaga de forma homogénea en todas las direcciones sobre la superficie del agua desde el centro de impacto, va siendo cada vez más pequeño hasta hacerse despreciable. En este caso no aparecen condiciones de contorno ni ondas estacionarias. No existe un límite físico en el que el agua esté obligada a permanecer en reposo frente a la onda impactante. Esto es fácil de ver si generamos la onda en un recipiente casero : el agua en los bordes también oscila y no hay una forma sencilla de hacer que permanezca en reposo.

Según lo anterior, el patrón ondulatorio sería una función de la forma $\xi(r,t)$, donde ξ representa la altura del agua sobre el nivel inicial y r la distancia al centro de impacto. Todas las direcciones respecto del centro se comportan de forma simétrica. El caso descrito es un fenómeno ondulatorio en dos dimensiones que nos va a permitir hacer un test de la ecuación de onda en tres dimensiones de la sección anterior.

Dada la dependencia funcional, podemos expresar el *operador Laplaciano* de la ecuación de onda en coordenadas polares con centro el punto de impacto y aplicar la ecuación de ondas de esta forma

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right] \right) \xi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \left(\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \xi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Si multiplicamos toda la expresión por r , según las propiedades de las derivadas parciales tenemos

$$\left(2 \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \xi = \frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\xi)}{\partial t^2}$$

Con lo que obtenemos la ecuación de ondas unidimensional para el campo $r\xi$ y por tanto la solución general de la ecuación es

$$r\xi(r,t) = F(r-ct) + G(r+ct) \Leftrightarrow \xi(r,t) = \frac{1}{r} [F(r-ct) + G(r+ct)]$$

Con lo que vemos rápidamente que para una onda que se aleja del centro de impacto ($G(r+ct)=0$), podemos tomar una función senoidal para $F(r-ct)$ y reproducir aproximadamente el patrón de la onda, caracterizado por una amplitud decreciente a medida que aumenta la distancia r al centro de impacto. Evidentemente la solución diverge para $r=0$ y sería necesario considerar las condiciones de contorno adecuadas.

El caso de un impacto de dos objetos en el interior del agua corresponde a ondas esféricas tridimensionales que se propagan desde un centro. Según el *principio de Huygens*, todo punto de un sistema afectado por un proceso ondulatorio es emisor de *ondas secundarias esféricas*.

8-Relación entre la ecuación de Laplace y la ecuación de ondas.

La ecuación diferencial de Laplace para una magnitud $\xi(x,y)$ en dos dimensiones luce de esta forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$$

muchos fenómenos físicos con simetría plana siguen esta ecuación; así por ejemplo : corrientes de potencial en un fluido o el potencial electrostático de una carga cerca de una placa conductora. Esta ecuación de Laplace en dos dimensiones es formalmente (matemáticamente) muy similar a la ecuación de ondas. Matemáticamente podemos hacer que el parámetro c , correspondiente a la velocidad de la onda, sea la unidad imaginaria i . Después de todo, se trata de un número que admite las mismas operaciones que cualquier número real y con la propiedad $i^2 = -1$; esto transforma la ecuación de ondas en

$$i^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

expresión que formalmente es igual a la ecuación de Laplace, aunque la coordenada temporal debe ahora interpretarse físicamente como una coordenada espacial. Siguiendo el formalismo matemático, la solución general de la ecuación de Laplace en dos dimensiones es la misma que la de la ecuación de ondas, pero considerando la velocidad imaginaria:

$$\xi(x, y) = F(x + iy) + G(x - iy)$$

es decir, cualquier función cuya variable sea un número complejo resulta ser una solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Por supuesto las soluciones con sentido físico deben ser reales, lo cual puede conseguirse aplicando las propiedades del conjugado de un número complejo de esta forma

$$\begin{aligned} \xi_1(x, y) &= 2\text{Re}[F(x + iy)] = F(x + iy) + \overline{F(x + iy)} = F(x + iy) + F(\overline{x + iy}) = F(x + iy) + F(x - iy) \\ i\xi_2(x, y) &= 2\text{Im}[F(x + iy)] = F(x + iy) - \overline{F(x + iy)} = F(x + iy) - F(\overline{x + iy}) = F(x + iy) - F(x - iy) \end{aligned}$$

siguiendo el formalismo, las relaciones anteriores son similares al caso de las ondas incidente y rebotada que generaban ondas estacionarias y por tanto podemos buscar soluciones de la forma $\xi(x,y) = \xi_x(x)\xi_y(y)$ para la ecuación de Laplace en dos dimensiones.

Análogamente, la ecuación de Laplace en tres dimensiones equivale formalmente a una ecuación de ondas ($z \rightarrow \text{tiempo}$)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - i^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0$$

las soluciones en forma análoga a una onda plana moviéndose en la dirección del vector unitario u serán por tanto de la forma

$$\xi(x, y, z) = F(\bar{u} \bullet \bar{r} + iz) + G(\bar{u} \bullet \bar{r} - iz); \bar{r} = (x, y), \bar{u} = (u_x, u_y)$$

Por otro lado esta analogía induce a pensar también en la búsqueda que soluciones en forma de productos $\xi(x,y,z) = \xi_x(x) \xi_y(y) \xi_z(z)$ de la ecuación de Laplace en 3 dimensiones; algo que utilizaremos a continuación. Es posible que ξ represente también una onda físicamente real si incluimos el tiempo como variable : $\xi(x,y,z,t)$; aunque el laplaciano no opere sobre la variable tiempo. En este caso la solución anterior toma la siguiente forma

$$\xi(x, y, z, t) = F(\bar{u} \bullet \bar{r} \pm ct + iz) + G(\bar{u} \bullet \bar{r} \pm ct - iz); \bar{r} = (x, y), \bar{u} = (u_x, u_y)$$

donde c es la velocidad de la onda. Una solución real incluida en este grupo se ha utilizado en la sección sobre *ondas superficiales en el agua* del trabajo sobre *mecánica de fluidos* con $F(a) = G(-a) = e^{ia}$.

Evidentemente existen soluciones de la ecuación de Laplace distintas de este grupo, como es el caso del potencial gravitatorio en regiones del espacio vacías. Hemos visto para el caso de una onda esférica una solución de la forma $\xi(r,t) = f(r-ct)/r$. Podemos llevar al límite esta expresión eligiendo $f(r-ct) = \text{constante}$; lo cual en realidad anula el comportamiento ondulatorio. Tomando como constante la unidad y sin pérdida de generalidad la ecuación de ondas toma la forma de la ecuación de Laplace en 3 dimensiones de esta forma

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla \bullet \left[\nabla \frac{1}{r} \right] = 0$$

donde hemos utilizado las propiedades del operador gradiente, tal como se introdujo en el trabajo sobre *mecánica de fluidos*. Utilizando el gradiente en coordenadas cartesianas podemos comprobar el resultado anterior

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{r} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{y,z}, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{x,z}, \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{x,y} \right) \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \Big|_{y,z}, \frac{\partial r}{\partial y} \Big|_{x,z}, \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{x,y} \right); \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 &\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} \Big|_{y,z} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} \Big|_{x,z} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{x,y} = \frac{z}{r}; \\ &\Rightarrow \nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} (x, y, z) = -\frac{\bar{r}}{r^3} \\ \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{y,z}, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{x,z}, \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{x,y} \right) \cdot \left[\frac{1}{r^3} (x, y, z) \right] = -\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = -\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right] = 0 \end{aligned}$$

lo cual justifica en principio la ecuación de Laplace para valores de r no nulos. Para $r=0$ el resultado debe considerarse *indeterminado*. Sin embargo el Laplaciano de $1/r$ nos reserva una sorpresa. Si le aplicamos el teorema integral de la divergencia sobre una esfera centrada en el origen $(0,0,0)$ y de radio no nulo arbitrario tenemos

$$\int \nabla^2 \frac{1}{r} dv = \int \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) dv = \oint \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot d\bar{S} = -\oint \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot d\bar{S} = -4\pi$$

donde la integral de superficie corresponde a la definición de *ángulo sólido* lo que justifica el valor no nulo de la integral. Tenemos por tanto un objeto matemático que resulta ser nulo para todos los puntos del espacio salvo para uno y cualquier integral de volumen que contenga dicho punto debemos asignarle una valor no nulo. Se distingue esta nueva especie matemática del concepto de función denominándola *distribución*, en concreto es un distribución del tipo *delta de Dirac* $\delta(r)$. Introduciendo una constante q/ϵ , podemos escribir el resultado como

$$\nabla^2 \frac{q}{4\pi\epsilon r} = -\frac{q}{\epsilon} \delta(\bar{r}); \quad \int_{\text{todo el espacio}} \delta(\bar{r}) dv = 1$$

la distribución $\delta(r)$ se define como nula para r distinto de cero y la integral de volumen de $\delta(r)$ es igual a 1 si el volumen incluye el punto $r=0$. Las unidades de $\delta(r)$ son las de la inversa de un volumen y el lector puede ver claramente la similitud de la ecuación anterior y la *ecuación de Poisson* para el potencial de un campo electrostático (o gravitatorio), donde la densidad corresponde a una carga o masa puntual localizada en $r=0$. Evidentemente la carga puntual no tiene por qué estar en $r=0$ y se puede localizar en un punto arbitrario r' , en este caso la ecuación anterior queda así

$$\nabla^2 \frac{q}{|r-r'|} = -4\pi q \delta(\bar{r}-\bar{r}')$$

donde el operador gradiente se aplica sobre las coordenadas r del punto de observación del campo, no sobre el punto de localización de la carga r' . A partir de este resultado y del teorema de Green se puede establecer una solución general para la ecuación de Poisson. El teorema de Green es una consecuencia del teorema integral de la divergencia (ver sección matemática del trabajo de introducción a la

mecánica de fluidos). Si tomamos funciones derivables ϕ , g arbitrarias y definiendo la función una vectorial A partiendo de ellas tenemos

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \phi \nabla g - g \nabla \phi \Rightarrow \nabla \cdot \bar{A} = \phi \nabla^2 g + \nabla \phi \cdot \nabla g - \nabla g \cdot \nabla \phi - g \nabla^2 \phi = \phi \nabla^2 g - g \nabla^2 \phi \\ \int \nabla \cdot \bar{A} dv &= \int [\phi \nabla^2 g - g \nabla^2 \phi] dv = \oint \bar{A} \cdot d\bar{S} = \oint [\phi \nabla g - g \nabla \phi] \cdot d\bar{S} \quad (\text{teorema de Green}) \end{aligned}$$

Elegimos las funciones ϕ , g de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho(\bar{r})}{\varepsilon} \quad (\text{ec. de Poisson}) \\ \nabla^2 g &= \delta(\bar{r} - \bar{r}') \end{aligned}$$

y aplicado al teorema de Green tenemos

$$\int \left[\phi \delta(\bar{r} - \bar{r}') + g \frac{\rho(\bar{r})}{\varepsilon} \right] dv = \oint [\phi \nabla g - g \nabla \phi] \cdot d\bar{S}$$

de los resultados precedentes vemos que podemos elegir $g = \frac{-1}{4\pi|\bar{r} - \bar{r}'|}$ y por tanto

$$\int \phi \delta(\bar{r} - \bar{r}') dv = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\rho(\bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dv - \frac{1}{4\pi} \oint \left[\phi \nabla \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} - \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \nabla \phi \right] \cdot d\bar{S}$$

si consideramos r' un punto fijo del campo y r un punto que varía en todo el espacio sobre el que se realiza la integración, el resultado es un valor integrado para la función potencial de la ecuación de Poisson

$$\phi(\bar{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dv - \frac{1}{4\pi} \oint \left[\phi \nabla \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} - \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \nabla \phi \right] \cdot d\bar{S}$$

La integral de superficie corresponde a *condiciones de contorno* sobre el valor de la función potencial y su gradiente en los puntos de una superficie cerrada.

El desarrollo seguido aquí para resolver la ecuación de Poisson se puede generalizar en el método de la *función de Green*. Dado un operador diferencial lineal D como puede ser el operador de Laplace, la ecuación de ondas, la ecuación de difusión, la ecuación de propagación del calor, la ecuación de Schrödinger, etc. Se trata de encontrar la función de Green g que sea solución de una ecuación diferencial de la forma $D(g) = \delta(\bar{r} - \bar{r}')$. A partir de aquí se puede encontrar una solución para la ecuación diferencial $D(f) = u(r)$, siendo u una función arbitraria.

El método de la separación de variables también es aplicable para encontrar soluciones al Laplaciano. En el apéndice se describe el caso de coordenadas esféricas con simetría axial.

9-El principio de Huygens y la difracción.

En 1678 Christiaan Huygens propuso el siguiente *principio heurístico* para explicar el mecanismo de propagación de una onda:

Todo punto afectado por una onda puede considerarse como una fuente de ondas esféricas secundarias que se extienden en todas las direcciones con la misma velocidad, frecuencia y longitud de onda que el frente de onda del que proceden.

Probablemente el lector recuerda modelos que utilizan este principio heurístico para visualizar los procesos de reflexión y refracción de una onda. Sin embargo el enunciado del principio presenta problemas de interpretación física. Normalmente una onda tiene asociado un sentido de propagación :va de un punto *A* a un punto *B*. Pero según el principio, las ondas esféricas secundarias se propagan de la misma forma en todas las direcciones, no hay una dirección privilegiada. Tomemos el caso de la onda circular generada por una piedra que cae en la superficie de un lago en reposo. Un punto distante del centro de impacto llega a ser afectado por la onda y según el principio se convierte en emisor secundario de ondas esféricas. La suma de todas las contribuciones secundarios genera en principio tanto una perturbación que avanza como una que retrocede respecto del movimiento inicial de la onda.

Sin embargo el principio heurístico sirve de base para un planteamiento matemático mas preciso. Según el principio podemos establecer que la forma funcional de una onda será de este tipo

$$\phi(\bar{r}, t) = \sum_{k, r'} A_i(k, \bar{r}', \bar{r}) \frac{\sin(kR - \omega t)}{R}; \quad R = |\bar{r} - \bar{r}'|$$

donde hemos tomado una onda sinusoidal para la función $f(r-ct)$ de la onda esférica. El punto r' corresponde al punto considerado como emisor secundario y r es el punto de observación de la onda. Los factores A_i ajustan la amplitud de la onda secundaria y consideramos que, para una situación estacionaria, solo dependen del vector de ondas k , del punto emisor secundario r' considerado y del punto de observación del campo r . Para el caso de una onda monocromática caracterizada por una única longitud de onda k , el principio indica que las ondas secundarias tienen esa misma longitud de onda k . Podemos utilizar la relación de Euler $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ y expresar la relación anterior así

$$\phi^c(\bar{r}, t) = \sum_{k, r'} A_i(k, \bar{r}', \bar{r}) \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} = \left[\sum_{k, r'} A_i(k, \bar{r}', \bar{r}) \frac{e^{ikR}}{R} \right] e^{-i(\omega t)} = \phi_c(\bar{r}) \phi_c(t); \quad \phi(\bar{r}, t) = \text{Re}(\phi^c(\bar{r}, t))$$

donde la amplitud de onda corresponde a la parte real de la expresión compleja ϕ^c . Vemos que la expresión admite una factorización en parte espacial y parte temporal. Si aplicamos la ecuación de ondas a la forma que hemos obtenido tenemos

$$\phi_c(t) \nabla^2 \phi_c(\bar{r}) = \frac{\phi_c(\bar{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_c(t)}{\partial t^2} = -\phi_c(t) \frac{\omega^2}{c^2} \phi_c(\bar{r}) \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \phi_c(\bar{r}) + k^2 \phi_c(\bar{r}) = 0$$

la ecuación diferencial anterior, conocida como *ecuación de Helmholtz*, representa al conjunto de todas las soluciones compatibles con el principio de Huygens para el caso de ondas monocromáticas. Podemos encontrar las integrales de la ecuación de Helmholtz mediante la técnica de la función de Green señalada anteriormente. Para ello necesitamos encontrar la función de Green correspondiente a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 g(\bar{r}) + k^2 g(\bar{r}) = \delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

el siguiente candidato resulta ser válido para la función de Green correspondiente a la ecuación de Helmholtz, y puede demostrarse que es el único candidato

$$g(\bar{r}) = \frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R};$$

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) &= \frac{ik}{R} \frac{\bar{R}}{R} e^{ikR} - \frac{\bar{R}}{R^3} e^{ikR} = e^{ikR} (1 - ikR) \nabla \frac{1}{R}; \\ \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] &= \nabla \cdot \left[e^{ikR} (1 - ikR) \nabla \frac{1}{R} \right] = \nabla \cdot \left[e^{ikR} (1 - ikR) \right] \cdot \nabla \frac{1}{R} + e^{ikR} (1 - ikR) \nabla^2 \frac{1}{R}; \\ \nabla \cdot \left[e^{ikR} (1 - ikR) \right] &= ik e^{ikR} (1 - ikR) \nabla R - e^{ikR} ik \nabla R = e^{ikR} k^2 R \nabla R \Rightarrow \\ \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] &= -e^{ikR} k^2 R \nabla R \cdot \frac{\bar{R}}{R^3} - 4\pi \delta(\bar{R}) e^{ikR} (1 - ikR) = -k^2 \frac{e^{ikR}}{R} - 4\pi \delta(\bar{R}) \Rightarrow \\ \nabla^2 \left(\frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \right) + k^2 \left(\frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \right) &= \delta(\bar{R}) = \delta(\bar{r} - \bar{r}') \end{aligned}$$

donde el factor a la derecha de $\delta(\bar{R})$ se elimina ya que cuando R tiende a cero este valor tiende a 1. Si aplicamos ahora el teorema de Green variando r en todo el volumen de integración y manteniendo r' en un punto fijo

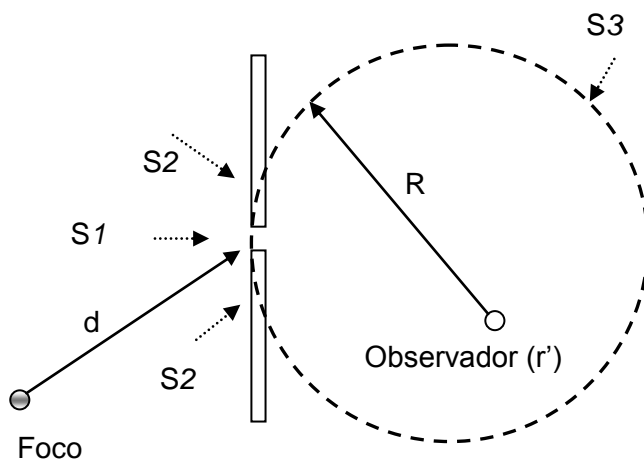
$$\begin{aligned} \int [\phi_c \nabla^2 g - g \nabla^2 \phi_c] dv &= \oint [\phi_c \nabla g - g \nabla \phi_c] \cdot d\bar{S}; \quad g = \frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}; \quad \nabla^2 \phi_c(\bar{r}) + k^2 \phi_c(\bar{r}) = 0 \\ \int \left[\phi_c \left(k^2 \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} + \delta(\bar{r} - \bar{r}') \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \left(-k^2 \phi_c(\bar{r}) \right) \right] dv &= \frac{-1}{4\pi} \oint \left[\phi_c \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla \phi_c \right] \cdot d\bar{S} \Rightarrow \\ \int \phi_c \delta(\bar{r} - \bar{r}') dv = \phi_c(\bar{r}') &= \frac{-1}{4\pi} \oint \left[\phi_c \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla \phi_c \right] \cdot d\bar{S}; \quad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' \end{aligned}$$

resultando que el valor del campo en un punto $\phi_c(r)$ depende de una integral sobre una superficie que encierra a dicho punto r' .

Difracción

Podemos aplicar el resultado anterior al caso en que una onda pasa por una pequeña abertura practicada en una placa. En el caso de ondas luminosas, la óptica geométrica nos dice que al pasar la luz por la abertura se produce una zona de sombra en la que no hay luz. Pero la experiencia indica que dicha sombra geométrica se produce si el

tamaño de la abertura es mayor que la longitud de onda, pero para dimensiones comparables es posible detectar luz en las zonas de sombra geométrica.



El dibujo representa un foco emisor de ondas monocromáticas esféricas, y una placa material fija de grandes dimensiones con una pequeña abertura. El círculo punteado corresponde a una superficie esférica de radio muy grande que utilizaremos para calcular la integral del resultado matemático anterior sobre un punto de observación. Descomponemos la superficie de integración en 4 partes:

- Parte $S3$: es la parte de la superficie esférica que no toca a la placa ni a la abertura.
- Partes $S2$: son las partes de la superficie esférica que tocan con la placa.
- Parte $S1$: corresponde a la parte de la superficie esférica en que está la abertura.

Si $\phi(r)$ es la función de onda, a la izquierda de la placa suponemos que dicha placa no refleja las ondas emitidas desde el foco y suponemos que la función de onda corresponde a una onda esférica

$$\phi_c = \frac{Ae^{ikd}}{d}$$

La integral que debemos calcular se puede descomponer en tres partes según las superficies que hemos descrito

$$\phi_c(\bar{r}') = \sum_{i=1,2,3} \frac{-1}{4\pi} \oint \left[\phi_c \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla \phi_c \right] \cdot d\bar{S}_i$$

Donde $d\mathbf{S}$ es un vector apuntando al exterior de la superficie esférica de integración. Consideramos las siguientes aproximaciones

- 1-La integral sobre $S3$ constituye esencialmente una onda secundaria de retroceso, por lo que el valor de esta contribución debe anularse, ya que no existe ningún objeto reflectante.
- 2-Las integrales sobre $S2$ corresponden a una zona de sombra geométrica y, aunque en rigor no sea cierto debido al fenómeno de la difracción, vamos a suponer que $\phi(r)$ toma un valor despreciable en esta zona de modo que las integrales son despreciables.
- 3-En $S1$ el valor de la función de onda $\phi_c(r')$ es el mismo que si no existiese placa.

El resultado es

$$\phi_c(\bar{r}') = \frac{-A}{4\pi} \int \left[\frac{e^{ikd}}{d} \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla \left(\frac{e^{ikd}}{d} \right) \right] \bullet d\bar{S}_1 = \frac{-A}{4\pi} \int \left[\frac{e^{ikd}}{d} e^{ikR} (1-ikR) \nabla \frac{1}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} e^{ikd} (1-ikd) \nabla \frac{1}{d} \right] \bullet d\bar{S}_1 =$$

$$\frac{-A}{4\pi} \int \left[\frac{e^{ik(R+d)}}{Rd} \left(R(1-ikR) \nabla \frac{1}{R} - d(1-ikd) \nabla \frac{1}{d} \right) \right] \bullet d\bar{S}_1$$

4- Una aproximación mas :suponemos la longitud de onda mucho menor que las distancias R y d : $kR \gg 1$, $kd \gg 1$ y por tanto

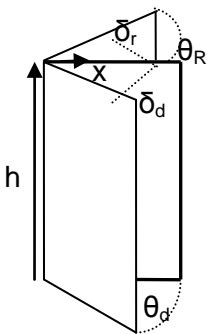
$$\phi_c(\bar{r}') = ik \frac{A}{4\pi} \int \left[\frac{e^{ik(R+d)}}{Rd} \left(R^2 \nabla \frac{1}{R} - d^2 \nabla \frac{1}{d} \right) \right] \bullet d\bar{S}_1 = -ik \frac{A}{4\pi} \int \left[\frac{e^{ik(R+d)}}{Rd} \left(\frac{\bar{R}}{R} - \frac{\bar{d}}{d} \right) \right] \bullet d\bar{S}_1 =$$

$$ik \frac{A}{4\pi} \int \frac{e^{ik(R+d)}}{Rd} [\cos(\bar{d}, d\bar{S}_1) - \cos(\bar{R}, d\bar{S}_1)] dS_1$$

Se pueden añadir aproximaciones adicionales a este resultado para explicar los casos de *difracción de Fresnel* (observador y/o foco cercano a la placa) y de *Fraunhofer* (observador y foco alejado de la placa). En el caso Fraunhofer suponemos el foco en el infinito y por tanto lo que llega a la placa es una *onda plana* de amplitud constante. Para simplificar el modelo suponemos que los rayos llegan paralelos a un plano perpendicular a la placa que pasa por el centro geométrico de la rendija y al que llamaremos “suelo”; en el dibujo anterior puede ser el mismo plano del papel. Debido al ángulo (d, dS_1) entre la onda plana y el plano de la rendija existirá un desfase geométrico δ_d en el valor de la onda plana en los puntos de la rendija. Los rayos secundarios a la derecha del dibujo paralelos al “suelo” y emitidos desde todos los puntos de la placa se cruzan en el infinito; según la definición geométrica de paralelismo. Podemos obtener una imagen de este cruce utilizando una lente adecuada que toma los rayos secundarios y los enfoca en una pantalla de observación (observador (r') en el dibujo) perpendicular al “suelo”. Evidentemente los rayos secundarios paralelos entre sí, pero no paralelos al plano del “suelo”, escapan a las dimensiones de una pantalla de observación de tamaño finito; por lo que nuestro observador no necesita tenerlos en cuenta. Estos rayos paralelos secundarios también tienen asociado un desfase geométrico debido al ángulo (R, dS_1) con la placa; la lente no introduce ningún desfase adicional. Con estas dos aproximaciones la formula anterior queda así

$$\phi_c(\bar{r}') = -ik \frac{A}{4\pi} \frac{e^{ik(R_0+d_0)}}{R_0 d_0} [\cos(\theta_d) + \cos(\theta_R)] \int e^{ik(\delta_R + \delta_d)} dS_1 \quad \theta_d = \bar{d} \angle - d\bar{S}_1 \quad , \theta_R = \bar{R} \angle d\bar{S}_1$$

Donde los valores con índice 0 son valores constantes. Para el caso sencillo de una *rendija rectangular* el cálculo de los desfases δ se puede realizar utilizando la imagen de una puerta abierta. El hueco de la puerta es la rendija y el plano de la puerta corresponde al frente de onda de la onda plana. Con ayuda del dibujo adjunto podemos calcular fácilmente el desfase



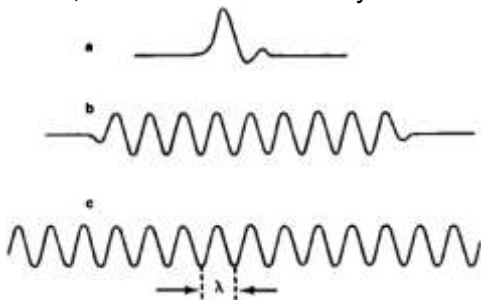
$$\delta_d + \delta_R = kx [\text{sen}(\theta_R) - \text{sen}(\theta_d)] \Rightarrow$$

$$\phi_c(\bar{r}') = -ik \frac{A}{4\pi} \frac{e^{ik(R_0+d_0)}}{R_0 d_0} [\cos(\theta_d) + \cos(\theta_R)] h \int_0^D e^{ikx[\text{sen}(\theta_R) - \text{sen}(\theta_d)]} dx$$

Donde hemos tomado como referencia de ángulos la dirección x de la rendija y considerando su signo ($\theta_R > 0$, $\theta_d < 0$ en el dibujo). El resultado muestra la relación entre la difracción y la *transformada de Fourier*. Finalmente también hemos encontrado una pista sobre la anulación de las ondas secundarias en retroceso y está en el factor $\cos(\theta_d) + \cos(\theta_R)$. Para la onda secundaria en retroceso *directo* el factor será $\cos(\theta_d) + \cos(\theta_d + \pi) = 0$; lo que muestra la anulación de las ondas secundarias en retroceso.

El planteamiento que hemos seguido sobre la difracción se refiere a una pequeña abertura en una placa, pero la difracción también se da en el caso en que la luz incide en el borde de la placa, apareciendo luz en las zonas correspondientes a la sombra geométrica. En la práctica se dan fenómenos de difracción cuando ondas de radio de la longitud de onda adecuada interrumpen su normal propagación por accidentes geográficos como montañas.

El desarrollo realizado se basa en que el foco genera una onda monocromática. En rigor esto no es posible ya que una onda monocromática es *infinita y eterna*. Una onda monocromática es por ejemplo $\sin(kr - \omega t)$ de modo que en cualquier instante de tiempo podemos caracterizar la onda por medio de su longitud de onda k . En la realidad esto no es así y los focos emiten los llamados *pulsos o trenes de onda*, es decir, ondas con un inicio y un fin en el tiempo y en el espacio. La imagen representa



ejemplos de estos trenes de onda. La calidad monocromática de los focos emisores se mide por el parámetro denominado *longitud de coherencia* que representa aproximadamente la longitud del tren en el que la onda es aproximadamente sinusoidal (monocromática). Para desfases que excedan de la longitud de coherencia los resultados de la aproximación de

Franunhoffer no serán válidos y en general mas allá de este límite de la longitud de coherencia no se observa el fenómeno de la difracción. Los laser son las fuentes de luz con mas alta longitud de coherencia.

El teorema de Fourier permite expresar los pulsos o trenes de onda como suma de ondas componentes monocromáticas puras.

10-Ondas estacionarias en tres dimensiones.

Hemos visto el caso de ondas estacionarias en una dimensión para el caso de una banda elástica o muelle obligado a oscilar en una zona acotada por dos paredes. Las ondas elásticas en tres dimensiones son más complejas, ya que a parte de las ondas longitudinales también son posibles ondas transversales y estos dos tipos de ondas se propagan en general a distinta velocidad. Sin embargo es posible suponer una situación en que la velocidad de los modos longitudinales y transversales es la misma. En este caso el campo de desplazamientos elásticos será un vector, suma vectorial de los desplazamientos elásticos de cada onda posible. Para el caso de la componente x

$$\nabla^2 \xi_y^i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi_y^i}{\partial t^2}; \xi_y = \sum_i \xi_y^i \Rightarrow \nabla^2 \xi_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2}; \xi_y(x, y, z, t)$$

Vemos por tanto que el campo de desplazamientos verifica la ecuación de onda para cada una de sus componentes vectoriales x, y, z .

Como hemos visto, las soluciones estacionarias implican la existencia de puntos en los que el proceso ondulatorio se anula permanentemente. En el caso unidimensional esto nos llevó a una función de onda que factorizaba sus variables de esta forma: $P(x)T(t)$. En el caso de tres dimensiones la analogía nos lleva a $\xi_y(x, y, z, t) = P(x, y, z)T(t)$. De esta forma, los puntos en los que sea $P(x, y, z) = 0$ el campo de desplazamientos, en la dirección (y) en este caso, será siempre nulo y corresponden a un nodo de ξ_y . Podemos aplicar a esta solución la ecuación de ondas

$$c^2 T(t) \nabla^2 P(x, y, z) = P(x, y, z) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{P(x, y, z)} \nabla^2 P(x, y, z) = \frac{1}{c^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

La ecuación diferencial que se obtiene dividiendo por $P(x, y, z)T(t)$ (no idénticamente nula) separa las variables a los dos lados del signo igual. A la derecha es un valor en (x, y, z) , a la izquierda un valor en (t) . Dado que estas variables son independientes, la única posibilidad es que el valor de ambos lados de la ecuación sea una constante k :

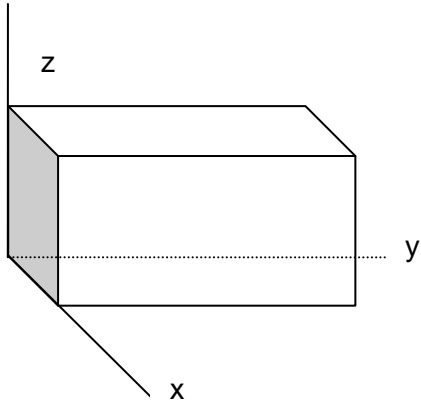
$$\nabla^2 P(x, y, z) = kP(x, y, z); \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = c^2 k T(t)$$

para que la ecuación de $T(t)$ sea armónica y no tome valores tendentes a cero o a infinito, impropios de una situación estacionaria, es necesario que k sea un valor negativo y por tanto resulta mejor escribir el resultado de esta forma

$$\nabla^2 P(x, y, z) = -k^2 P(x, y, z); \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2 c^2 T(t)$$

A partir de aquí, la busca de las ondas estacionarias, llamadas también modos normales de oscilación, depende de forma determinante de las condiciones concretas del caso; sin embargo veremos que se puede asumir una factorización de la función $P(x, y, z)$ en una situación sencilla.

Tomemos el caso de un material elástico en las condiciones ya señaladas que tenga forma de paralelepípedo regular de modo que en todas las caras el campo de desplazamiento se anule. Por tanto el plano $x=0$ es un plano nodal y se cumple siempre $P(0,x,y)=0$ para cualquier combinación (y,z) . Evidentemente podemos reproducir este comportamiento haciendo $P(x,y,z)=P^x(x)P^{yz}(y,z)$ y $P^x(0)=0$. Introduciendo esta factorización y utilizando las propiedades del operador gradiente que pueden verse en el trabajo sobre mecánica de fluidos



$$\nabla^2 P^x(x)P^{yz}(y,z) = -k^2 P^x(x)P^{yz}(y,z) = \nabla \cdot [\nabla(P^x(x)P^{yz}(y,z))]$$

$$\begin{aligned} \nabla(P^x(x)P^{yz}(y,z)) &= P^{yz}(y,z)\nabla(P^x(x)) + P^x(x)\nabla(P^{yz}(y,z)) \\ \nabla \cdot [\nabla(P^x(x)P^{yz}(y,z))] &= \nabla(P^{yz}(y,z)) \cdot \nabla(P^x(x)) + P^{yz}(y,z)\nabla^2(P^x(x)) + \\ &\quad \nabla(P^x(x)) \cdot \nabla(P^{yz}(y,z)) + P^x(x)\nabla^2(P^{yz}(y,z)) \end{aligned}$$

Note el lector que los productos escalares de gradientes se anulan, ya que un término anula la componente (x) y el otro anula las componentes (y,z). Por tanto tenemos

$$\begin{aligned} P^{yz}(y,z)\nabla^2(P^x(x)) + P^x(x)\nabla^2(P^{yz}(y,z)) &= -k^2 P^x(x)P^{yz}(y,z) \Rightarrow \\ \frac{1}{P^x(x)}\nabla^2(P^x(x)) + \frac{1}{P^{yz}(y,z)}\nabla^2(P^{yz}(y,z)) &= -k^2 \Rightarrow \frac{1}{P^x(x)}\frac{d^2}{dx^2}(P^x(x)) + \frac{1}{P^{yz}(y,z)}\nabla^2(P^{yz}(y,z)) = -k^2 \end{aligned}$$

Por las mismas razones que en el caso de la factorización de la variable tiempo los sumando deben corresponder a valores constantes y el término correspondiente a la derivada segunda en x debe ser una constante negativa. Evidentemente podemos repetir la factorización con $P^{yz}(y,z)$ y obtendremos en total las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} &= -k^2 c^2 T(t) \\ \frac{d^2}{dx^2}(P^x(x)) &= -k_x^2 P^x(x) \\ \frac{d^2}{dy^2}(P^y(y)) &= -k_y^2 P^y(y) \\ \frac{d^2}{dz^2}(P^z(z)) &= -k_z^2 P^z(z) \\ k^2 &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \end{aligned}$$

Por tanto la solución general para $P(x,y,z)T(t)$ es

$$P(x, y, z) = (A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x))(A_y \sin(k_y y) + B_y \cos(k_y y))(A_z \sin(k_z z) + B_z \cos(k_z z))$$

$$T(t) = (A_t \sin(kct) + B_t \cos(kct))$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

En nuestro caso, dado que los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ son planos nodales debe ser $B_x=B_y=B_z=0$. Además los planos opuestos $x=d_x$, $y=d_y$, $z=d_z$ también deben ser nodales por lo que las funciones seno debe anularse en estos planos nodales

$$k_x d_x = n_x \pi ; k_y d_y = n_y \pi ; k_z d_z = n_z \pi ; \quad k^2 = \left(\frac{n_x \pi}{d_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{d_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{d_z} \right)^2$$

La solución genérica, con estas condiciones de contorno, será

$$\xi_y(x, y, z, t) = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} A_{n_x} A_{n_y} A_{n_z} \sin\left(\frac{n_x \pi}{d_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{d_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{d_z} z\right) (A_t \sin(kct) + B_t \cos(kct))$$

$$k = k(n_x, n_y, n_z)$$

El resto de constantes se puede determinar con las condiciones de contorno correspondientes a la derivada parcial $\partial \xi_y / \partial t$ en $t=0$ y con el contenido de energía correspondiente a los distintos modos de oscilación.

Se puede seguir el método aquí presentado para casos en los que los nodos se distribuyan en superficies esféricas o cilíndricas. Si la simetría es la adecuada, se pueden utilizar la separación de variables expresando los operadores diferenciales en estos sistemas de coordenadas.

Si la solución que encontramos verifica las condiciones de contorno y la ecuación de ondas, existe un teorema que asegura que solo puede haber una solución con esas condiciones.

11-Guía de Ondas.

Tomemos el caso anterior de ondas estacionarias en tres dimensiones en paralelepípedo y modifiquemos la situación eliminando los planos límite $y=0$ y $y=d_y$. De este modo tenemos una banda elástica de sección $d_x d_z$ y longitud teóricamente infinita. En este caso no pueden producirse las componentes estacionarias en la dirección (y) ya que no se produce el rebote de la onda correspondiente. Tomaremos una componente de la solución anterior de esta forma

$$\xi_y^{nx,ny} = A_{nx} A_{ny} A_z \sin\left(\frac{n_x \pi}{d_x} x\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{d_z} z\right) \sin(k_y y) (B_t \cos(kct)) =$$

$$A_{nx} A_{nz} A_y B_t \sin\left(\frac{n_x \pi}{d_x} x\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{d_z} z\right) \frac{1}{2} [\sin(k_y y - kct) + \sin(k_y y + kct)]$$

para la que suponemos $A_t=0$ sin pérdida de generalidad. Esta expresión induce a buscar soluciones de onda progresiva de la forma

$$\xi_y(x, y, z, t) = \psi(x, z) \sin(k_g y - \omega t)$$

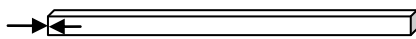
Note el lector que no se trata de una onda plana, ya que la amplitud $\psi(x,z)$ en la dirección perpendicular a la propagación de la onda no tiene por que ser constante. Si introducimos esta forma funcional en la ecuación de onda tenemos

$$\nabla^2 \psi(x, z) = -k_c^2 \psi(x, z); \quad k_c^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right)$$

Esta ecuación ya ha sido resuelta antes en función de las condiciones de contorno, de este modo el valor k_c está determinado por condiciones de contorno, ω es la frecuencia de oscilación de la onda y c la velocidad de la onda. Todos estos parámetros los podemos obtener experimentalmente, de modo que los resultados anteriores determinan el valor k_g y las distintas componentes ondulatorias en la guía de ondas tienen esta forma

$$\xi_y(x, y, z, t) = A_{nx} A_{nz} A_y B_t \sin\left(\frac{n_x \pi}{d_x} x\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{d_z} z\right) \sin(k_g y - \omega t)$$

Es decir, una *onda guiada* que se propaga en la dirección (y). Podemos imaginar el sistema formado por un oscilador que mueve elásticamente el extremo de la guía de ondas a



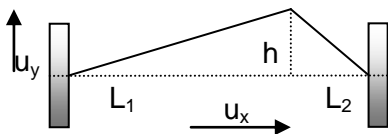
un frecuencia ω . Las condiciones de contorno de ξ y $\partial \xi / \partial t$ sobre el extremo de la guía donde se acopla el oscilador conducen a que la frecuencia de las ondas guiadas y la frecuencia del oscilador deben ser iguales. Pero las componentes ondulatorias a través de la guía debe cumplir $k_c^2 + k_g^2 = \omega^2 / c^2$. Dado que k_c depende de las dimensiones geométricas transversales de la guía y la frecuencia ω del oscilador externo, vemos que ambos parámetros son independientes y podemos elegirlos de modo que el valor k_g resulte ser un número complejo. En este caso no se produce el fenómeno de la onda guiada y el sistema expulsa la energía que el oscilador externo

intenta introducir en el sistema. La frecuencia ω correspondiente a $k_g=0$ se denomina *frecuencia de corte* ω_c y verifica $ck_c = \omega_c$. Solo se pueden propagar en la guía frecuencias superiores a la de corte, de modo que pueda ser a $k_g>0$. Si el oscilador del extremo no oscila con una frecuencia pura, sino una combinación o espectro de frecuencias según el correspondiente análisis de Fourier temporal de señales, entonces solo se transmitirán por la guía las frecuencias correspondientes superiores a la de corte. De este modo la guía de ondas funciona como un filtro que elimina las frecuencias por debajo de la frecuencia de corte.

12-Ondas en la cuerda de una guitarra.

Consideremos la pulsación de la cuerda de una guitarra. Cuando la cuerda está en reposo sabemos que tiene definida una tensión mecánica constante asociada al tono de su afinación. Cualquier punto en la cuerda divide a esta en dos partes. La fuerza con que ambas partes se atraen corresponden a la tensión de la cuerda y es fácil ver, según las leyes de Newton, que debe ser igual en cualquier punto de la cuerda en reposo; ya que no existe ninguna parte de la cuerda sometida a aceleración.

Tensamos la cuerda con un dedo, solo muy ligeramente, llevando el dedo a una altura h . Esto hace que la longitud de la cuerda se modifique y, en el margen de la ley de



Hooke, esto supone que la cuerda almacena cierta cantidad de energía potencial elástica. Al soltar la cuerda esta energía potencial se transforma en cinética y por tanto la longitud de la cuerda empieza a disminuir. Debido a esto los puntos de la cuerda

se mueven en principio en las dos direcciones del plano : $\langle y \rangle$ ya que se mueven hacia abajo , $\langle x \rangle$ debido a que la cuerda se está acortando al disminuir la energía potencial elástica. Podemos acotar el desplazamiento de los puntos de la cuerda en la dirección $\langle x \rangle$ ya que este desplazamiento no puede ser superior a la modificación máxima en la longitud de la cuerda

$$\Delta x < \sqrt{L_1^2 + h^2} + \sqrt{L_2^2 + h^2} - (L_1 + L_2) \approx L_1 \left(1 + \frac{h^2}{2L_1^2} \right) + L_2 \left(1 + \frac{h^2}{2L_2^2} \right) - (L_1 + L_2) = \frac{h}{2} \left(\frac{h}{L_1} + \frac{h}{L_2} \right)$$

$$\Delta y < h$$

Evidentemente, donde podemos conseguir fácilmente una mayor altura h en la pulsación de la cuerda es entorno al punto medio, de modo que si se verifica que la altura es mucho menor que la longitud de la cuerda : $h \ll L$, entonces podemos considerar que los puntos de la cuerda se mueven exclusivamente en la dirección vertical. En esta aproximación estamos considerando despreciable la modificación de longitud de la cuerda que pulsamos y consecuentemente con esto debemos considerar que el módulo de la tensión de la cuerda (T), proporcional a la energía elástica, no se ve apenas modificada respecto de la tensión de la cuerda en reposo. Sin embargo en la vibración la cuerda cambia de forma, con lo que la tensión de la cuerda, que es tangente a la misma, cambia también de dirección y esta es la principal variación del vector T . Si representamos el campo de tensiones en la cuerda por la función vectorial $T \cdot u(l,t)$ donde u es un vector unitario tangente a la cuerda, l es la

posición de un punto sobre la cuerda medida sobre la misma cuerda y t el tiempo tenemos para la variación de tensión en un tramo dl y en un instante fijo

$$\bar{T} = T\bar{u}; \quad d\bar{T} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial l} \Big|_t dl = T \frac{\partial \bar{u}}{\partial l} \Big|_t dl;$$

La variación de tensión en los extremos de dl provoca la aceleración del elemento de masa correspondiente que, según las leyes de Newton y nuestra aproximación son

$$d\bar{T} \bullet \bar{u}_x = 0; \quad d\bar{T} \bullet \bar{u}_y = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_x$$

La derivada en $\langle x \rangle$ de $y(x,t)$ en un instante t fijo corresponde con la pendiente de línea tangente a la cuerda en el punto x considerado. En nuestra aproximación esta línea tangente está muy próxima a la línea de la cuerda en reposo y por tanto la pendiente de la línea tangente es aproximadamente igual al ángulo con la cuerda en reposo y al seno de este ángulo. De este modo podemos poner, dado que u_y es un vector constante

$$T \frac{\partial (\bar{u} \bullet \bar{u}_y)}{\partial l} \Big|_t dl = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_x; \quad \bar{u} \bullet \bar{u}_y \approx \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_t$$

y dado que para todo dl existe un dx relacionado tenemos como resultado la ecuación de ondas con una velocidad de propagación c que depende de la Tensión y la densidad lineal de masa de la cuerda, ambas medidas en el estado de reposo de la cuerda

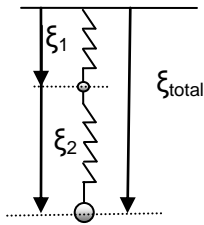
$$\frac{\partial (\bar{u} \bullet \bar{u}_y)}{\partial l} \Big|_t dl = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_t \right) dx \Rightarrow T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_t = \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_x; \quad \lambda = \frac{dm}{dx}; \quad c = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

Note el lector que la velocidad de las ondas mecánicas se calcula a partir de valores propios del equilibrio del sistema considerado. En este caso los parámetros son la tensión de la cuerda y la densidad lineal de masa, ambos en el estado de equilibrio estático. En el caso de las ondas acústicas en el aire los parámetros son la presión y la densidad de una atmósfera en equilibrio; la velocidad de las ondas acústicas en el aire también incluye el cociente entre calores específicos a volumen y a presión constante, parámetros propios del *equilibrio termodinámico*. Esto nos dice que las ondas mecánicas están asociadas a modificaciones relativamente pequeñas respecto a las condiciones de equilibrio de un *sistema estable*; es decir, un sistema que tiende a recuperar su estado inicial de equilibrio en respuesta a perturbaciones.

13-Continuidad, Reflexión y Refracción.

La constancia de la frecuencia

Imaginemos dos muelles de distintas constantes elásticas y conectados tal como aparece en el dibujo. La conexión entre muelles se hace mediante una pequeña masa.



Sobre esta actúan las fuerzas de los muelles y la gravedad. Si llevamos el caso hasta el límite en que se anula esta masa tenemos, en módulo, la siguiente relación de fuerzas $k_1\xi_1 = k_2\xi_2$; donde ξ hace referencia a las elongaciones de los dos muelles respecto de sus respectivos estados sin tensión y k hace referencia a las constantes elásticas respectivas. Es posible plantear la combinación de muelles como un muelle equivalente asignándole una constante

k y una elongación que debe ser la suma de las elongaciones anteriores. La fuerza que ejerce este muelle equivalente sobre la masa de abajo debe ser la misma fuerza que ejerce el muelle 2 : $k(\xi_1 + \xi_2) = k_2\xi_2$. Sustituyendo la ecuación anterior tenemos $k = k_1k_2/(k_1 + k_2)$ para la constante elástica del muelle equivalente; que resulta ser menor que cualquiera de las constantes individuales. Por tanto podemos plantear la dinámica de la misma forma que con un solo muelle

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -k\xi \Rightarrow \xi = \xi_{\max} \cos(\omega t) ; \omega = \sqrt{k/m}$$

Si bien esta ecuación describe el movimiento del extremo del muelle oscilando con una frecuencia ω , la experiencia nos dice que los dos muelles están oscilando con la misma frecuencia ω . En el contexto de masas de los muelles mucho menores que la masa móvil del extremo siempre podemos elegir muelles de distinto material y de masas muy distintas entre sí. En cualquier caso estos dos muelles resultan oscilar con la misma frecuencia ω que el muelle equivalente. Desde el punto de vista ondulatorio, que abordamos a continuación, debemos considerar una onda que pasa del muelle 1 al muelle 2 (y al revés); y según lo visto parece que debemos mantener la misma frecuencia para las ondas en el muelle 1 y el muelle 2. La literatura (*Alonso-Finn vol2*) acepta esto como un hecho experimental aplicable a todos los fenómenos ondulatorios asociados a la reflexión y refracción de ondas.

Planteamiento ondulatorio

Imaginemos una banda elástica formada por la unión de otras dos, una detrás de la otra, de igual sección pero distinto material, de modo que el módulo de elasticidad Y sea diferente. Análogamente el caso puede ser el de una cuerda formada por la unión de otras dos, una detrás de la otra, pero con diferente densidad lineal. La situación es similar a la descrita en el dibujo, con dos bandas elásticas o cuerdas conectadas. Si un fenómeno ondulatorio se está propagando de izquierda a derecha parece evidente que puede pasar a la otra parte del sistema y seguir propagándose en la misma dirección.



Identifiquemos las funciones en las dos partes como $\xi^i(x-ct)$ a la izquierda y $\xi^d(x-ct)$ a la derecha. El valor de estas funciones

corresponde a la elongación de cada punto x de la banda completa en el instante t . Si llamamos x_0 al punto frontera entre las dos partes del sistema, parece evidente que la

elongación de este punto es única y por tanto las dos funciones anteriores deben coincidir en este punto:

$$\xi^i(x_0 - ct) = \xi^d(x_0 - ct)$$

Sin embargo aparece un problema físico en este punto. Sabemos que la energía elástica es proporcional a la constante elástica y al cuadrado de la elongación; y sabemos también que esta energía elástica se propaga junto con la onda de izquierda a derecha. Si, justo a derecha e izquierda de la superficie frontera, tenemos materiales de distinta constante elástica k y es, por ejemplo, $k_i < k_d$; entonces la condición de igual elongación en la superficie frontera supone un problema físico en relación al principio de conservación de la energía. En efecto, en un pequeño entorno a derecha e izquierda de x_0 la elongación será, por continuidad, sensiblemente similar a la elongación en x_0 , pero la energía elástica en el lado izquierdo será menor que en el lado derecho debido a la diferencia de constantes elásticas. Esto supone un aumento de energía cuando la onda pasa la superficie frontera, y no se ve la procedencia de esta energía adicional.

La solución general de la ecuación de onda y nuestro sentido de la causalidad solo nos deja la alternativa de suponer que, en la parte izquierda, no puede existir una sola onda incidente, sino que la superficie frontera debe ser la causa de una onda rebotada o reflejada moviéndose en la dirección contraria a la onda incidente: $\xi_r^i(x+ct)$. De este modo la condición para la elongación en la superficie frontera es

$$\xi_i^i(x_0 - ct) + \xi_r^i(x_0 + ct) = \xi_t^d(x_0 - ct)$$

donde el subíndice i indica onda incidente, el r onda reflejada y el t onda transmitida o refractada.

Si nos fijamos en el caso de la banda elástica, en el punto x_0 , o mejor dicho en la superficie frontera, la tensión de la banda debe ser la misma a un lado y a otro. Esto es necesario porque no podemos asignar masa en este caso a la superficie frontera entre las partes derecha e izquierda. Por tanto en el punto x_0 se debe verificar

$$T^i = Y^i S \left. \frac{\partial \xi_i^i(x-ct)}{\partial x} \right|_{x_0} + Y^i S \left. \frac{\partial \xi_r^i(x+ct)}{\partial x} \right|_{x_0} = T^d = Y^d S \left. \frac{\partial \xi_t^d(x-ct)}{\partial x} \right|_{x_0} \Rightarrow$$

$$Y^i \left(\left. \frac{\partial \xi_i^i(x-ct)}{\partial x} \right|_{x_0} + \left. \frac{\partial \xi_r^i(x+ct)}{\partial x} \right|_{x_0} \right) = Y^d \left. \frac{\partial \xi_t^d(x-ct)}{\partial x} \right|_{x_0}$$

Según el teorema de Fourier podemos descomponer en serie de senos y cosenos cualquier perturbación ondulatoria en un medio lineal. Por tanto será relevante ver el comportamiento físico de una sola componente senoidal en este caso; teniendo en cuenta que las componentes funcionales de Fourier (senos, cosenos) actúan de forma físicamente independiente y no intercambian energía entre ellas. La elección de las ondas reflejada y transmitida debe ser tal que haya continuidad con los casos límite siguientes

1-Si el sistema de la derecha es un objeto no elástico y masivo la onda debe reflejarse totalmente y no existe componente transmitida. Este caso ya lo hemos visto antes.

2-Si el material de la derecha es muy parecido o igual al de la izquierda, entonces la onda es totalmente transmitida y no existe la componente reflejada.

Según estas condiciones podemos tomar la siguiente elección

$$\begin{aligned} \xi_i^i(x_0 - ct) &= \xi_i^i \text{sen}(\omega t - K^i x) \\ \xi_r^i(x_0 + ct) &= \xi_r^i \text{sen}(\omega t + K^i x) \\ \xi_t^d(x_0 - ct) &= \xi_t^d \text{sen}(\omega t - K^d x) \end{aligned}$$

donde mantenemos la misma frecuencia según lo discutido en la sección anterior. De esta forma, con los valores correspondientes para las amplitudes y vector de ondas asociados a la función seno podemos reproducir los casos límite antes señalados. Aplicando las condiciones de continuidad a estas ecuaciones y tomando por conveniencia $x_0 = 0$ tenemos

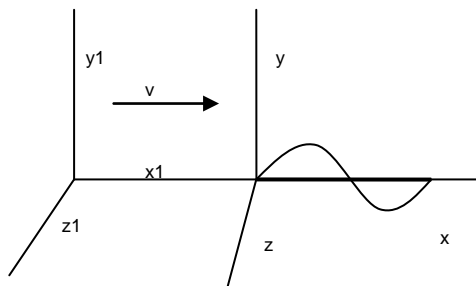
$$\begin{aligned} \xi_i^i + \xi_r^i &= \xi_t^d \\ Y^i K^i (\xi_i^i - \xi_r^i) &= Y^d K^d \xi_t^d \end{aligned}$$

lo que nos permite, a partir de la amplitud de la onda incidente ξ_i^i obtener la amplitud de la onda reflejada ξ_r^i y transmitida ξ_t^d . Por otro lado, a partir de la frecuencia y la velocidad de las ondas elásticas en las dos partes se pueden calcular los números de ondas K (mayúscula) a derecha e izquierda.

14-Ondas y relatividad especial.

Caso de una dimensión

Imaginemos dos sistemas de coordenadas inerciales (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x, y, z, t) de ejes



paralelos moviéndose relativamente a velocidad v sobre la dirección del eje $\langle x-x_1 \rangle$ común. Sobre el eje $\langle x \rangle$ del sistema (x, y, z, t) hay una cuerda en reposo que se pulsa, generando un proceso ondulatorio. En (x, y, z, t) las posibles soluciones de la ecuación de ondas son una combinación lineal de funciones de la forma $y(x-ut)$,

donde u es un valor positivo o negativo correspondiente a la velocidad de la onda en (x, y, z, t) . Todas estas funciones cumplen la ecuación de ondas en el sistema (x, y, z, t)

$$u^2 \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_t = \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_x$$

La ecuación está expresada en términos de los operadores diferenciales, indicando de esta forma que vamos a operar exclusivamente con funciones que verifiquen la ecuación de ondas anterior.

En el sistema de coordenadas 1 la onda se describe en este caso utilizando la relación $(x, y, z, t) \rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1)$ entre sistemas inerciales de modo que podamos poner $y_1(x(x_1, t_1)-$

$u^*(x_1, t_1)$) como representación del fenómeno ondulatorio en las coordenadas del sistema inercial 1. Nuestro objetivo es comprobar que esta función verifica también la ecuación de ondas en las coordenadas del sistema 1.

Como vimos en el trabajo “Espacio, tiempo, materia y vacío“, según la relatividad especial la relación entre coordenadas de los dos sistemas es

$$x = \gamma(x_1 - vt_1); y = y_1; t = \gamma(t_1 - vx_1); \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A partir de aquí, podemos calcular la *regla de transformación de las derivadas parciales* correspondiente con la transformación de coordenadas utilizando la regla de la cadena sobre una función matemática arbitraria $f(x(x_1, t_1), t(x_1, t_1))$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{t_1} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_t \frac{\partial x}{\partial x_1} \Big|_{t_1} + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x \frac{\partial t}{\partial x_1} \Big|_{t_1} = \gamma \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_t - \gamma \frac{v}{c^2} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x \\ \left. \frac{\partial f}{\partial t_1} \right|_{x_1} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_t \frac{\partial x}{\partial t_1} \Big|_{x_1} + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x \frac{\partial t}{\partial t_1} \Big|_{x_1} = -\gamma v \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_t + \gamma \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x \end{aligned}$$

Puesto que estas expresiones se verifican para cualquier función $f(x, t)$ sea o no una solución de la ecuación de ondas, podemos poner el resultado en forma de operadores

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{t_1} &= \gamma \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t - \gamma \frac{v}{c^2} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x \\ \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{x_1} &= \gamma \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x - \gamma v \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t \end{aligned}$$

Esta relación es la transformación de Lorentz para las derivadas parciales en los dos sistemas de coordenadas. Esta forma nos facilita una aplicación reiterada del operador para calcular las derivadas segundas correspondientes

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right|_{t_1} &= \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{t_1} \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{t_1} = \left(\gamma \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t - \gamma \frac{v}{c^2} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x \right) \left(\gamma \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t - \gamma \frac{v}{c^2} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x \right) \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \right|_{x_1} &= \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{x_1} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{x_1} = \left(-\gamma v \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t + \gamma \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x \right) \left(-\gamma v \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t + \gamma \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x \right) \end{aligned}$$

Desarrollando las expresiones anteriores, aplicando la operación encontrada a la función $y_1 = y(x_1, t_1), -u^*(x_1, t_1)$ y dado que en (x, y, z, t) la función utilizada verifica la

ecuación de ondas $u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_x$ Llegamos a

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_{t_1} &= \gamma^2 \left(1 + \frac{v^2 u^2}{c^4} \right) \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_t - 2\gamma^2 \frac{v}{c^2} \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x_1} &= \gamma^2 (v^2 + u^2) \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_t - 2\gamma^2 v \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x \end{aligned}$$

Note ahora el lector que cualquier función de la forma $f(x-ut)$ que verifique la ecuación de ondas en (x,y,z,t) también verifica *necesariamente* esta otra ecuación en términos operacionales

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x = -u \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_t$$

Sustituyendo esto en las ecuaciones anteriores podemos eliminar $\partial^2/\partial x^2$ y llegamos al siguiente operador

$$\left(\frac{v+u}{1 + \frac{vu}{c^2}} \right)^2 \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_{t_1} = \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x_1}$$

Lo que nos dice que la onda original, en el sistema (x,y,z,t) , transformada al sistema en (x_1,y_1,z_1,t_1) también cumple la ecuación de ondas en este último sistema de coordenadas; pero con una velocidad de propagación correspondiente a la suma relativista de velocidades; que para velocidades mucho menores a la velocidad de la luz ($u \ll c$) corresponde a la suma clásica de velocidades.

Caso de dos dimensiones

Supongamos que en el plano $x-z$ existe una onda plana bidimensional que verifica una ecuación del tipo $y=f(\mathbf{k}^* \mathbf{r} - \omega t)$, donde $\mathbf{r}=(x,y,z)$, \mathbf{k} es el vector de onda y ω la frecuencia angular. La expresión funcional anterior se puede poner, sin pérdida de generalidad, como $y=f(\mathbf{W}^* \mathbf{r} - t)$; simplemente dividiendo el argumento de la función por ω y haciendo $\mathbf{W}=\mathbf{k}/\omega$. En el sistema 1 el fenómeno se describe por $y_1=y=f(\mathbf{W}^* \mathbf{r}(x_1,z_1,t_1)-t(x_1,t_1))$.

Análogamente al caso anterior, la transformación de operadores asociada a la transformación de Lorentz nos lleva a

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_{t_1,z_1} &= \gamma^2 \left(\left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_{t,z} + \frac{v^2}{c^4} \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x,z} - 2 \frac{v}{c^2} \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{t,z} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{x,z} \right) \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right|_{t_1,x_1} &= \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right|_{t,x} \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x_1,z_1} &= \gamma^2 \left(v^2 \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_{t,z} + \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x,z} - 2v \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{t,z} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{x,z} \right) \end{aligned}$$

Para una función cualquiera de la forma $y=f(\mathbf{W}^* \mathbf{r} - t)$ se verifica lo siguiente

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{t,z} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{x,z} = -W_x \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x,z} ; \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_{t,z} = W_x^2 \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x,z} ; \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right|_{t,x} = W_z^2 \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x,z}$$

Que sustituido en las ecuaciones previas produce

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2_1} \right|_{t_1,z_1} &= \gamma^2 \left(W_x^2 + \frac{v^2}{c^4} + 2 \frac{vW_x}{c^2} \right) \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x,z} \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2_1} \right|_{t_1,x_1} &= W_z^2 \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x,z} \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2_1} \right|_{x_1,z_1} &= \gamma^2 (v^2 W_x^2 + 1 + 2vW_x) \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{x,z} \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones y dividiendo por la tercera

$$\frac{\left. \frac{\partial^2}{\partial x^2_1} \right|_{t_1,z_1} + \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2_1} \right|_{t_1,x_1}}{\left. \frac{\partial^2}{\partial t^2_1} \right|_{x_1,z_1}} = \frac{\gamma^2 \left(W_x^2 + \frac{v^2}{c^4} + 2 \frac{vW_x}{c^2} \right) + W_z^2}{\gamma^2 (v^2 W_x^2 + 1 + 2vW_x)} = \frac{\left(W_x + \frac{v}{c} \right)^2 + (\gamma^{-1} W_z)^2}{(1 + vW_x)^2}$$

y por tanto la onda transformada según las coordenadas del sistema 1 también verifica la ecuación de ondas de esta forma

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2_1} \right|_{t_1,z_1} + \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2_1} \right|_{t_1,x_1} &= W_1^2 \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2_1} \right|_{x_1,z_1} ; W_{x1} = \frac{W_x + \frac{v}{c}}{1 + vW_x} ; W_{z1} = \frac{\gamma^{-1} W_z}{1 + vW_x} \\ \bar{W}_1 &= \frac{\bar{k}_1}{\omega_1} \end{aligned}$$

El lector puede comprobar que el parámetro W corresponde con la *covelocity* mencionada en el trabajo “Espacio, tiempo, materia y vacío”. Para el caso de una onda electromagnética en el vacío, los módulos W , W_1 son iguales a $1/c$; la inversa de la velocidad de la luz en el vacío. Considerando $W_x = W \cos(\varphi)$ y $W_{x1} = W \cos(\varphi_1)$ es fácil derivar de las expresiones anteriores la fórmula del fenómeno conocido en astronomía como *aberración relativista* de un rayo de luz:

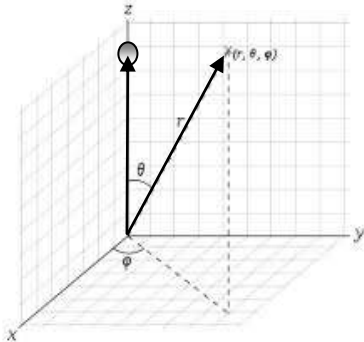
$$\cos(\varphi) = \frac{\cos(\varphi_1) + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos(\varphi_1)}$$

En un caso unidimensional, para que las ecuaciones de onda coincidan debe ser $W=1/u$, de modo que también se cumple la relación

$$\frac{W + \frac{v}{c^2}}{1 + vW} = \frac{1 + \frac{vu}{c^2}}{u + v}$$

Apéndice Matemático

Separación de variables de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas y simetría axial.



Imaginemos una carga puntual localizada en z_0 en nuestro sistema de coordenadas. Tomemos $f(r, \theta) = \frac{1}{|r - z_0|}$ como la función de Green del Laplaciano. Evidentemente es una solución de la ecuación de Laplace y se puede apreciar en el dibujo que dicha función es simétrica respecto de ángulo ϕ , es decir, supuesto z_0 fijo, es una función $f(r, \theta)$. Podemos ver explícitamente la dependencia de la función así

$$f(r, \theta) = \frac{1}{|r - z_0|} = \frac{1}{\sqrt{(r - z_0) \cdot (r - z_0)}} = (r^2 + z_0^2 - 2z_0 r \cos(\theta))^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{z_0}{r}\right)^2 - 2\frac{z_0}{r} \cos(\theta) \right)^{-1/2}$$

esta función debe cumplir la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas que, como vimos en el trabajo sobre mecánica de fluidos, es

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right] \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] \right) = 0$$

donde la simetría que manejamos nos permite eliminar el término correspondiente a la variable ϕ . Recordando la importancia de las series infinitas en la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales, podemos expresar la función $f(r, \theta)$ de esta forma bajo ciertas condiciones. Si r es suficientemente mayor que z_0 de modo que se cumpla

$$0 < \left(\frac{z_0}{r}\right)^2 - 2\frac{z_0}{r} \cos(\theta) < 1$$

Entonces $f(r, \theta)$ se puede expresar *exactamente* como una serie infinita de Taylor de la forma

$$f(r, \theta) = \frac{1}{r} (1+x)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \dots \right); \quad x = \left(\frac{z_0}{r}\right)^2 - 2\frac{z_0}{r} \cos(\theta)$$

debido al carácter polinómico, es evidente que podemos expresar la serie infinita anterior de esta forma

$$f(r, \theta) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\theta) \left(\frac{z_0}{r}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+1)}$$

donde P_l se define como el factor asociado a la potencia l de z_0/r y es un polinomio en $\cos(\theta)$. Este grupo se conoce en matemáticas como *polinomios de Legendre*. Si aplicamos el operador de Laplace la serie infinita anterior tenemos para la parte radial

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{l=0}^{\infty} z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+1)} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\sum_{l=0}^{\infty} -(l+1) z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+2)} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\sum_{l=0}^{\infty} -(l+1) z_0^l P_l(\theta) r^{-l} \right) \right] = \left(\sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+1)} \right)$$

y para la parte angular

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{l=0}^{\infty} z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+1)} \right) \right] \right) = \sum_{l=0}^{\infty} z_0^l \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial P_l(\theta)}{\partial \theta} \right] \right) \right] r^{-(l+1)}$$

y sumando ambas partes

$$\sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} z_0^l \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial P_l(\theta)}{\partial \theta} \right] \right) \right] r^{-(l+1)} = 0 = \sum_{l=0}^{\infty} z_0^l \left[l(l+1) P_l(\theta) + \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial P_l(\theta)}{\partial \theta} \right] \right) \right] r^{-(l+1)}$$

dado que esta expresión debe anularse para cualesquiera valores de z_0 y r , dentro del dominio de valores antes señalados, es evidente que debe cumplirse, para cualquier valor del índice l

$$l(l+1)P_l(\theta) + \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dP_l(\theta)}{d\theta} \right] \right) = 0$$

La ecuación diferencial anterior debe verificarse para los polinomios de Legendre y esta ecuación diferencial resulta ser formalmente igual a la parte angular de la correspondiente separación de variables en coordenadas esféricas

$$g(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] \right) = cte = - \frac{1}{\Phi \sin(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{d\Phi}{d\theta} \right] \right)$$

donde la constante corresponde al valor $l(l+1)$, de modo que la parte radial debe cumplir

$$\left(\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] \right) = l(l+1)R$$

guiados por la forma de la serie infinita de Taylor que tomamos inicialmente $f(r, \theta)$ buscamos soluciones de la ecuación anterior en forma de *polinomios en r*. Dada la linealidad de la ecuación podemos ver que las soluciones polinómicas son

$$R_l = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}$$

de modo que la separación de variables unida a la linealidad del operador de Laplace permite expresar una solución al problema en forma de serie infinita

$$\sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\theta)$$

en el que vemos una solución compatible con la función $f(r, \theta)$ para el caso $A_l=0$

El muelle sin masa.

En los cursos elementales de física se enseña que la energía elástica de un muelle es de la forma $\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$. Imaginemos un muelle con dos masas en sus extremos. El conjunto oscila en una línea recta que podemos tomar como eje x de nuestro sistema de medidas. Una aplicación evidente de la conservación de la energía nos convence de que la energía del sistema debe ser (ver dibujo)

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2$$

donde x_1, x_2 es la posición en el eje x de las masas, l_0 es la longitud del muelle cuando no está sometido a tensión y v_1, v_2 son las velocidades de las masas. Pero esta expresión de la energía, intuitivamente evidente, presupone que estamos despreciando la masa del muelle. La suma de fuerzas que las masas de los extremos ejercen sobre el muelle deben equivaler al producto de la masa del muelle por la aceleración del centro de masas del muelle. Si anulamos la masa del muelle tenemos que las fuerzas en los extremos del muelle suman cero y deben ser iguales y de signo opuesto. Por acción-reacción lo mismo ocurre con las fuerzas que el muelle hace sobre las masas : $F_1 = -F_2$. En este contexto de masa del muelle nula, la energía cinética del sistema será

$$\int F_1 \cdot dx_1 + \int F_2 \cdot dx_2 = \int m_1 a_1 \cdot dx_1 + \int m_2 a_2 \cdot dx_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + C$$

donde a_1, a_2 son las aceleraciones correspondientes y C es una constante de integración. Según las conclusiones previas podemos calcular la integral anterior aplicando la ley de fuerzas del muelle ideal sin masa, o *ley de Hooke*, como

$$\int F_1 \cdot dx_1 - \int F_1 \cdot dx_2 = \int F_1 \cdot d(x_1 - x_2) = \int k(x_2 - x_1 - l_0) \cdot d(x_1 - x_2) = -\int k(x_2 - x_1 - l_0) \cdot d(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}k(x_1 - x_2 - l_0)^2 + C'$$

donde l_0 es una constante, por lo que podemos incluirla dentro del diferencial; C' es otra constante de integración. Igualando las dos fórmulas anteriores llegamos al principio de conservación de la energía que se ha aceptado intuitivamente.

