Título del Trabajo	Introducción al modelo copernicano y la gravitación de Newton.
Nombre	Enrique Cantera del Río
Filiación	C/Padre Benito Menni-6-2-E 47008 Valladolid (España)
Correo electrónico	benarrob@gmail.com
Resumen	Introducción al modelo copernicano y la teoría newtoniana de la gravedad para primeros cursos de carreras científico-técnicas y último curso de estudios medios.
Version 4ª	Esta versión une dos trabajos anteriores : "Análisis elemental del movimiento bajo fuerza central de tipo Newtoniano." Y "Sobre la forma de la tierra"; de modo que se enfatiza la importancia del conocimiento astronómico básico en el desarrollo de la mecánica. El apéndice incluye también secciones sobre el experimento de Rutherford y los puntos de Lagrange.

INTRODUCCIÓN AL MODELO COPERNICANO Y LA GRAVITACION DE NEWTON.

Enrique Cantera del Río

Índice

Introducción y objetivos.

La teoría de Copérnico que coloca al sol en reposo y en el centro del sistema de planetas supone una nueva percepción sobre el funcionamiento del sistema que tendrá una amplia repercusión en la forma en que percibimos el mundo. Esta percepción da el contexto necesario para el desarrollo de la mecánica clásica por dos vías principales : experimental y matemática. Todo se desarrolló para ajustarse, lógicamente, al modelo Copernicano:

1-Dado que el sol está en reposo y para nosotros se mueve diariamente, debe existir un movimiento de rotación diario intrínseco de la tierra. El efecto de esta rotación también se percibe en el movimiento nocturno de la esfera celeste. Desde aquí Newton plantea la existencia de fuerzas inerciales (centrífugas, coriolis...) en la tierra y finalmente el péndulo de Foucault demuestra estas fuerzas inerciales.

2-Debido al fenómeno del sol de media noche, la rotación diaria de la tierra se realiza en un eje inclinado respecto al plano de la órbita de la tierra respecto al sol. Esta inclinación determina la latitud del círculo polar ártico. La existencia de la estrella *Polar*, aquella que no cambia de posición en toda la noche y que por tanto sirve como orientación al viajero[1], indica que el eje de rotación de la tierra apunta en la dirección de esta estrella.

3-Kepler determina experimentalmente las leyes básicas del movimiento de los planetas en el modelo de Copérnico. Newton justifica las leyes de Kepler en base a la *fuerza de la gravedad* y prueba que se trata de la misma fuerza que se manifiesta en la órbita de la luna, la forma del planeta tierra, las mareas terrestres, la trayectoria de proyectiles y en general la fuerza que llamamos *peso* en la tierra. En base a esto Newton establece el *principio de Gravitación Universal.*

4-Debido al fenómeno de precesión de los equinoccios, conocido desde Babilonia, el eje de rotación de la tierra describe un movimiento circular de un periodo de unos 25.000 años. Para explicar esto Euler desarrolló matemáticamente la mecánica del sólido rígido a partir de las leyes de Newton. En el proceso también explica la nutación del eje terrestre y el "bamboleo de Chandler". Este bamboleo es un cambio en el eje de rotación en periodos de algo mas de 1 año conocido entre los astrónomos por que para enfocar una determinada estrella debían modificar periódicamente la dirección de sus telescopios ligeramente. Este fenómeno implica cambiar el modelo físico-geométrico de la tierra de una esfera homogénea a un elipsoide de revolución.

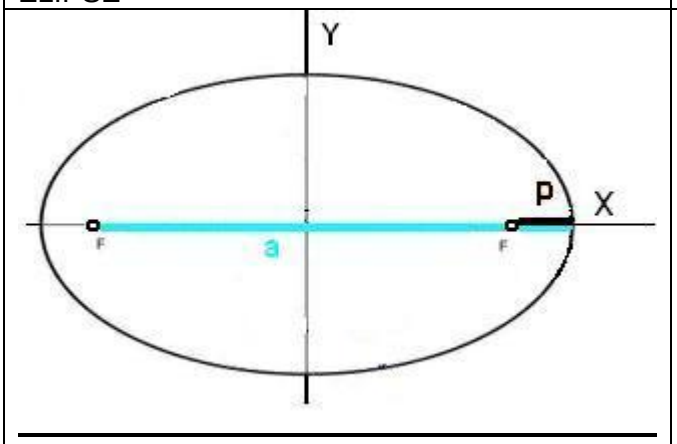
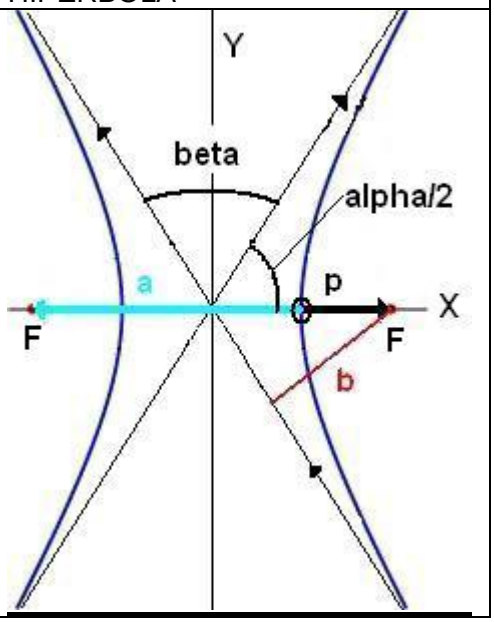
Con el magnífico precedente de las *leyes de Kepler,* el estudio del movimiento de una partícula en un campo central sometido a una fuerza dada por la ley de Newton para la gravedad está en el origen de la física matemática.

Este trabajo intenta presentar las principales conclusiones de este estudio de una forma sencilla y rigurosa; de modo que sea accesible del modo mas completo posible a estudiantes del último curso de secundaria y primero de universidad en ramas científico-técnicas. Se utilizan conceptos sencillos de geometría de cónicas, vectores, trigonometría plana y análisis matemático disponibles en el nivel académico citado. En el apéndice el lector encontrará ampliaciones que incluyen un nivel matemático progresivamente mayor.

---

[1] En la antigüedad los largos viajes por el desierto se hacían de noche para evitar el calor y la deshidratación , y se utilizaban las estrellas como guía. También los marineros utilizaban las estrellas como orientación.

Las siguientes imágenes se utilizarán a lo largo del texto:

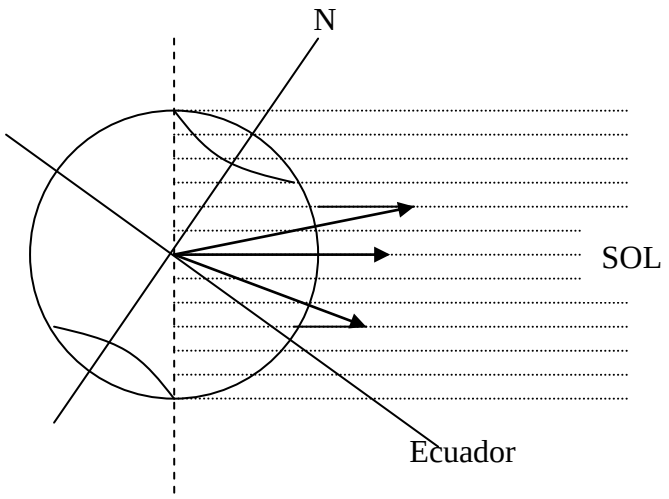
ELIPSE	HIPERBOLA
	

<u>Copérnico, Newton, astronomía básica y la forma de la tierra</u>

Para que la ciencia sea posible debe haber luz y debe haber un observador, es decir, alguien que sea capaz de extraer información de la luz. La limpieza intelectual mas elemental exige reconocer a la luz como el mensajero del conocimiento; y como suele decirse “no debemos matar al mensajero”. Durante decenas de miles de años la humanidad observó las estrellas y planetas. Como dice Carl Sagan, todos somos descendientes de astrónomos. Esas luces del firmamento se ordenaron en constelaciones de modo que a lo largo del tiempo llevaron a los observadores a la idea de un movimiento cíclico y repetitivo de los cielos; llegando a pensar incluso que el tiempo mismo era cíclico. Como dijo Einstein, “Nuestras ideas dependen de nuestras experiencias como la ropa de la forma de nuestros cuerpos.” Se distinguieron las estrellas del firmamento por su *brillo* y su *color*, dos propiedades de la luz que ahora sabemos son una *medida* de la potencia de emisión de energía y la temperatura de la estrella respectivamente, o de cualquier otro emisor térmico de luz. La luz y la geometría están unidas desde el origen. Es fácil observar una parte de la luz *procedente directamente* del sol que atraviesa un pequeño orificio en una habitación oscura. Ese cilindro o rayo de luz pasa a ser un cono si la fuente de luz está relativamente cerca del pequeño agujero; este fenómeno produce una imagen invertida en las *cámaras oscuras*. Pero cuanto mas se aleja la fuente mas se parece el cono de luz a un cilindro. Evidentemente el sol está muy alejado y los *rayos componentes* de su luz que nos llegan directamente son paralelos. En cambio cuando estos rayos del sol se reflejan en un objeto se dispersan en distintas direcciones; a no ser que se reflejen en un espejo plano.

El conocimiento astronómico ancestral se puede reinterpretar e incluso deducir lógicamente a partir del modelo de Copérnico/Newton. Según este modelo la tierra es un cuerpo celeste con forma esférica como el sol, la luna y los planetas y se mueve en un círculo alrededor del Sol; que ocupa una posición central y fija. Para justificar la existencia de días y noches tenemos que aceptar que la tierra gira también respecto de un eje propio. Si el Sol, y en general las *estrellas fijas, esfera celeste, bóveda celeste o firmamento* sigue la trayectoria aparente Este-Oeste; entonces el eje de giro de la tierra debe estar en la dirección Norte-Sur. La inclinación del eje de rotación

Norte-Sur de la tierra sobre el plano de la trayectoria de la tierra alrededor del sol o plano eclíptico es un hecho fácilmente constatable. En la imagen vemos el efecto de los rayos de sol sobre la tierra inclinada. Los rayos son paralelos al plano eclíptico aproximadamente ya que el sol está muy lejano; mucho mas que las dimensiones propias de la tierra. La línea vertical punteada determina la región de sombra (noche) sobre la tierra. Vemos que existen unas zonas entorno a los polos Norte y Sur que, aunque la tierra gire, siempre luce el sol (día) o nunca lo hace (noche). Este fenómeno esta relacionado con el *sol de media noche* y está limitado geográficamente por los círculos polares ártico y antártico, cuya latitud está relacionada directamente con la inclinación del eje *N-S* sobre la eclíptica.



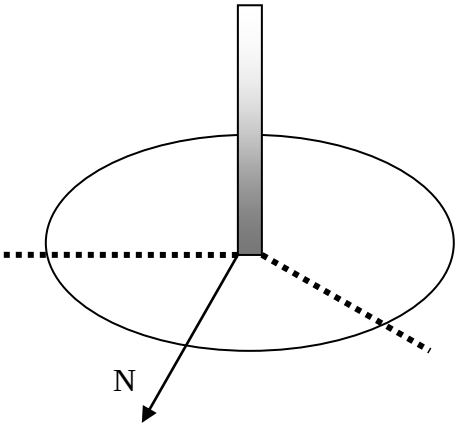
Por otra parte vemos el efecto de sombra sobre las tres flechas dibujadas. Las sombras apuntan hacia el sur o hacia el norte y existe una latitud en que la sombra no tiene componente norte o sur. El día con mas horas de sol en el hemisferio norte, correspondiente al *solsticio de verano*, los puntos correspondientes sobre la tierra con sombra nula al mediodía están en la latitud del *trópico de cáncer* y es el lugar mas al norte en que se produce el fenómeno; situación que vendría a representar el dibujo anterior. El correspondiente solsticio de verano en el hemisferio sur define la latitud del *trópico de capricornio*. A lo largo de este día todos los puntos del trópico de cancer experimentan la anulación de la sombra al medio día. El nombre de *cancer* procede de la constelación del zodiaco sobre la que está el sol en este día. Las constelaciones son 12 grupos de estrellas enormemente alejadas (estrellas fijas) formando un círculo en el firmamento (vía láctea). A lo largo del año, según el mes, desde la tierra se vería al sol sobre el fondo de una de estas constelaciones, y se dice que el sol "está" en esa constelación. Esta visión es posible durante los eclipses de sol. Por la noche podemos ver la constelación opuesta; como si las constelaciones fuesen los números de las horas en una esfera de reloj.

El modelo copernicano se amplía el siglo pasado de modo que el sistema solar, junto a otros sistemas parecidos, está orbitando alrededor del centro de la galaxia. El arco de luz difusa en el cielo nocturno, visible desde ambos hemisferios, que conocemos como vía láctea es la imagen que vemos desde la tierra del disco de nuestra propia galaxia. El sol gira en el plano de la galaxia y entorno a su centro en periodos de 250 millones de años. Dado que el plano del disco galáctico y el plano de las órbitas de los planetas coincide aproximadamente, percibimos desde la tierra que la trayectoria del sol y de los planetas están incluidas en el arco de la vía láctea. También las constelaciones zodiacales se mueven regularmente a lo largo del

año siguiendo el arco de la vía láctea y por lo tanto las estrellas correspondientes pertenecen a nuestra propia galaxia. La zona mas brillante del arco de la vía láctea corresponde al centro de la galaxia y está cercana a la constelación de sagitario.

Debido a la conservación bastante aproximada en periodos anuales del momento angular de rotación de la tierra, el eje norte-sur se desplaza prácticamente paralelo a sí mismo durante el desplazamiento de la tierra por el plano de la eclíptica. Por tanto el plano ecuatorial terrestre, perpendicular al eje norte-sur por definición, también se desplaza paralelamente a si mismo. Este plano intersecta el plano de la eclíptica en una recta que va barriendo exhaustivamente el plano de la eclíptica. Necesariamente llega un momento en que el sol toca a dicha recta. En este momento los rayos solares llega a la tierra paralelos al plano ecuatorial y por tanto ahora en el ecuador terrestre la sombra se anula. Estos instantes se conocen como *Equinoccios* de primavera y otoño. La imagen correspondiente para la tierra se puede construir a partir de la anterior, pero girando los ejes norte-sur *(N*) y *Ecuador* de modo que *N* coincida con la línea de sombra y *Ecuador* sea paralela a los rayos solares.

Por otra parte, no es exacto decir que el sol sale por el este y se pone por el oeste. Lo correcto es decir que la trayectoria del sol es en dirección este-oeste. La dirección Este-Oeste del sol solo es exacta en los equinoccios de primavera y otoño; cuando el plano orbital coincide con el plano ecuatorial. En el hemisferio norte, a partir del equinoccio de primavera el plano orbital se mueve, relativamente a un observador en tierra, hacia el norte; con lo que la salida de sol es cada vez mas hacia el norte. Esto es así hasta el solsticio de verano, donde la salida del sol empieza a retroceder hacia el sur, y continua hacia el sur después del equinoccio de otoño hasta el solsticio de invierno; momento en que la salida del sol recupera la tendencia hacia el norte. Esto se puede ver con un *gnomon* [9] que no es mas que una barra clavada en la vertical del suelo. Si anotamos en el círculo de referencia, tal como aparece en el dibujo, las sombras generadas por el sol al amanecer y al atardecer obtendremos un ángulo que, al dividirlo por la mitad, determina la dirección norte-sur, correspondiente a la sombra del sol de mediodia.



Si la estrella polar no está visible por accidentes geográficos como montañas o nubes pero si son visibles otras estrellas mas altas (mas próximas a la vertical) que la polar, es posible orientarse utilizando una herramienta sencilla. Se toman dos estacas de distinta altura y se clavan en el suelo a una distancia de modo que los extremos de las estacas y la estrella elegida queden en línea recta visto desde el extremo de la estaca mas corta. Si esperamos un tiempo y volvemos a mirar, la estrella se habrá movido y ya no estará en línea recta con las estacas. Si el movimiento es ascendente la dirección de la estrella tiene componente este, si descendente componente oeste; si además el movimiento es hacia la izquierda la estrella también tiene componente norte, si hacia la derecha componente sur.

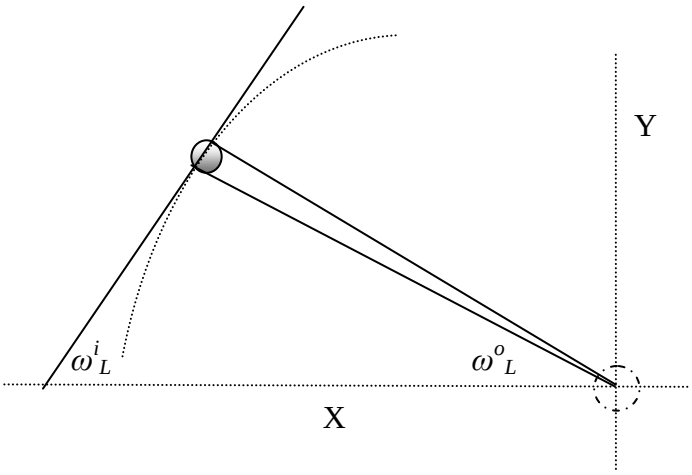
Precesión y Nutación en la rotación de la tierra

En la propia tierra se pueden detectar los movimientos de precesión y nutación propios de la peonza. El movimiento de precesión se detectó inicialmente en el fenómeno de los equinoccios por astrónomos antiguos. El equinoccio corresponde a una fecha que se puede determinar de una forma precisa en la que la duración del día y de la noche

son iguales y corresponden a los cambios de estación invierno-primavera y verano-otoño. En la antigüedad se constató que durante estas fechas, el sol estaba en la constelación de Aries en un caso y en la de Libra en el otro. Pero con el paso de los siglos se evidenció que el sol cambiaba de constelación durante los equinoccios y lo que antiguamente era Aries ahora es Piscis y Libra es Virgo. Esta precesión se realiza respecto al *polo eclíptico*, es decir, respecto a un eje ideal perpendicular al plano de la órbita terrestre y solidario al centro de la tierra. Actualmente se considera que el desplazamiento angular correspondiente es de 50,290966 segundos de arco por año, lo que supone un giro completo cada 25.776 años. Debido a esto también el eje de la tierra cambia de dirección y la estrella polar del firmamento nocturno ha ido cambiando de "titular" con el paso del tiempo. La estrella que ahora conocemos como *Polar*, en la constelación de la Osa Menor (hemisferio norte), hace 4.800 años era *Thuban*, en la constelación del Dragón.

El movimiento de nutación de la tierra tiene un periodo mucho mas corto que el de precesión : 18.6 años y se evidencia en la localización de los paralelos terrestres correspondientes a los trópicos y los círculos polares. Debido a la nutación la localización de estos paralelos varía periódicamente cada 18.6 años. La imagen adjunta, muestra la posición del trópico de cáncer en años sucesivos en una zona de México. Por supuesto este movimiento también afecta a la dirección del eje de rotación de la tierra, pero el efecto es relativamente pequeño.

La cara visible y la cara oculta de la luna.



El dibujo adjunto representa un modelo simple del movimiento de la luna alrededor de la tierra. Utilizamos un sistema de coordenadas plano XY asociado al centro de la tierra y que no participa de su giro diurno intrínseco. En primera aproximación podemos suponer que la trayectoria de la luna vista desde la tierra sigue las leyes de Kepler y está incluida permanentemente en este plano del sistema de coordenadas. La recta que atraviesa diametralmente la luna está rígidamente unida a ella y el par de líneas que se cruzan en el origen de coordenadas determinan los extremos visibles de la luna para el observador terrestre en el origen de coordenadas. Para que este observador vea en todo momento la misma cara de la luna el sistema de líneas marcadas en trazo continuo debe moverse rígidamente. Dado que la suma de ángulos de un triángulo es *180º* y el ángulo entre las líneas continuas se mantiene constante; entonces las variaciones con el tiempo de los ángulos de estas líneas con el eje *X* deben compensarse: $\omega^i_L = -\omega^o_L$ donde el subíndice "*L"* hace referencia a la luna, el superíndice *"i"* hace referencia al giro intrínseco de la luna respecto de su eje propio norte-sur y el superíndice "*o"* hace referencia al desplazamiento orbital de la luna alrededor de la tierra. El signo menos indica que los sentidos de giro intrínseco y orbital son opuestos: si uno es en la dirección de las agujas del reloj el otro es en

dirección contraria. Respecto de esta aproximación sencilla hay varias correcciones que explican el fenómeno de la *libración lunar*, es decir, que en realidad se pueda ver para un observador en tierra algo mas que la misma mitad de la superficie lunar:

1-La trayectoria de la luna respecto a la tierra no es exactamente circular sino elíptica. La separación variable entre la luna y la tierra se demuestra por la existencia de distintos tipos de eclipses de sol : Los totales, en los que la luna oculta todo el disco solar (menor separación luna-tierra); y los anulares, en los que la luna no oculta todo el disco solar, dejando visible un anillo concéntrico (mayor separación luna-tierra). Por tanto debemos considerar la velocidad angular correspondiente variable : $\omega^o{}_L(t)$; mientras que $\omega^i{}_L$ es esencialmente constante por estar asociada al momento angular intrínseco de la luna. Concluimos de esto que es posible ver en la luna zonas en la dirección este-oeste mas allá de los límites del modelo sencillo.

2-Un observador real en tierra se mueve con el giro intrínseco de la tierra $\omega^i{}_T$ y esto hace que pueda percibir, según la hora, algo mas en uno de los extremos visibles este-oeste según el modelo sencillo. El caso es como si las líneas correspondientes del dibujo no se cruzan en el centro de la tierra, sino en la posición del observador en tierra (círculo punteado). El giro diario de la tierra sobre sí misma, en grados, es 28 veces mas rápido que el giro de desplazamiento orbital de la luna. Además el radio de la tierra es unas 50 veces menor que la distancia tierra-luna. Estas condiciones hacen que el efecto del giro de la tierra sea equivalente a una pérdida de rigidez de las líneas continuas del modelo, de modo que hay una pequeña variación del ángulo entre ellas: $\omega^o{}_L+\omega^i{}_L \neq 0$; pero esta pequeña variación se anula en el promedio de un día terrestre.

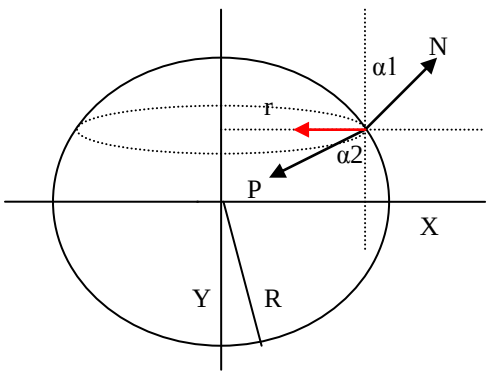
3-El eje de rotación intrínseco de la luna está inclinado respecto al plano de su órbita alrededor de la tierra. Esto hace que un observador en tierra pueda percibir partes adicionales mas allá de los polos norte y sur de la luna a lo largo del mes lunar; que es el periodo de tiempo de 28 días en que la luna da una vuelta completa a la tierra. En el caso de la pareja sol-tierra la inclinación del eje norte-sur de la tierra respecto del plano de su órbita alrededor del sol provoca el fenómeno correspondiente del sol de media noche alternativo en los polos norte y sur de la tierra; lo que supone que un observador en el sol pueda ver partes mas allá de los polos norte y sur de la tierra.

El efecto de la libración lunar supone que es visible el 59% de la superficie lunar para un observador en tierra. Por otro lado el plano de la órbita de la luna respecto a la tierra forma un ángulo de unos 5º respecto al plano de la eclíptica. Por tanto los eclipses de sol o de luna solo son posibles cuando la luna ocupa el correspondiente punto de intersección de los dos posibles entre su órbita y el plano de la eclíptica. Sin embargo la órbita de la luna es mas compleja que una elipse debido a la influencia del sol.

Efecto del giro de la tierra en su forma.

El modelo copernicano supone que los planetas pueden tener un eje propio de rotación respecto del cual realizan su giro diurno. Dado que desde el interior de la tierra tenemos la experiencia de mares y atmosfera en calma, sería deseable poder probar que el modelo copernicano tiene un margen en que es posible este tipo de equilibrios mecánicos.

Consideremos un cuerpo cualquiera sobre la superficie de la tierra. Visto desde un sistema de coordenadas inercial instantáneamente en reposo, dicho cuerpo describiría un movimiento circular uniforme con centro en el punto de intersección del eje de rotación de la tierra y el plano de dicha trayectoria circular. Si la tierra fuese perfectamente esférica, entonces la gravedad y fuerza de contacto normal sobre el



cuerpo serían colineales sobre una línea que incluye el centro de la esfera. La composición vectorial de estas fuerzas, sin incluir rozamiento, claramente no puede resultar en una fuerza neta centrípeta que justifique una trayectoria circular uniforme. Imaginemos una piscina con agua y sobre la que flota un objeto en reposo. En este caso la fuerza de contacto se atribuye a la presión del agua (y del aire), responsable del empuje que hace flotar al cuerpo, y según el principio clásico de Arquímedes debe ser colineal con el peso. Si en estas condiciones suponemos que el escenario propuesto debe ser posible, entonces lo mas sencillo es suponer que la forma general de la tierra no puede ser esférica. En cambio una superficie en forma de elipsoide parece mas en concordancia con la 2ª Ley de Newton en este caso, como se puede ver en el dibujo. El empuje, asociado a la *presión*, se mantendrá perpendicular a la superficie de contacto y el peso *suponemos* que sigue actuando en dirección al centro de la tierra no esférica. En lo relativo al principio de Arquimedes, esto supone considerar una *gravedad efectiva* que incluye la fuerza centrífuga inercial correspondiente. Para completar el cálculo, primero aproximaremos la sección elíptica del dibujo utilizando las ecuaciones canónicas de la elipse

$$\left(\frac{x}{R+\delta}\right)^2+\left(\frac{y}{R-\delta}\right)^2=1$$

donde δ da cuenta del achatamiento respecto a un círculo cuyo radio es el radio medio de la elipse : R. Derivando la expresión respecto de la coordenada x

$$\frac{x}{y}\left(\frac{R-\delta}{R+\delta}\right)^2+\frac{dy}{dx}=0$$

introduciendo tangentes a la elipse y al círculo correspondiente en el sistema de coordenadas canónico utilizado

$$\tan(\phi_{elipse})=\frac{dy}{dx};\ \ \tan(\phi_{circulo})=-\frac{x}{y}\ \rightarrow\ \tan(\phi_{elipse})=\left(1-\frac{2\delta}{R+\delta}\right)^2\tan(\phi_{circulo})$$

$$\delta<<R\ \Rightarrow\ \tan(\phi_{elipse})\approx\left(1-\frac{4\delta}{R}\right)\tan(\phi_{circulo})$$

aplicando la regla de la diferencia de tangentes en trigonometría en la aproximación en que $\delta<<R$ y por tanto $\Phi_{elipse}\ \approx\ \Phi_{circulo}$ tenemos

$$\left.\begin{array}{l}\tan(\phi_{elipse})-\tan(\phi_{circulo})\approx\left(1+\tan^2(\phi)\right)d\phi\\ d\phi=\phi_{elipse}-\phi_{circulo}\end{array}\right\}\Rightarrow-\frac{4\delta}{R}\tan(\phi)\approx\left(1+\tan^2(\phi)\right)d\phi\Rightarrow$$

$$-\frac{2\delta}{R}sen(2\phi)\approx d\phi$$

Ahora queda enlazar esto con el análisis mecánico planteado en el mismo dibujo anterior. Llamando N al empuje hidrostático, P al peso del objeto y R a la distancia entre el objeto y el centro de coordenadas, que podemos considerar aproximadamente como un valor medio entre el máximo y el mínimo. Como se ha dicho, se toma como aproximación que la dirección de P es hacia el centro de coordenadas:

$$\overline{N}+\overline{P}=m\omega^2\overline{r};\quad r=Rsen(\alpha_2)\Rightarrow\begin{cases}-G\dfrac{Mm}{R^2}\cos(\alpha_2)+N\cos(\alpha_1)=0\\ G\dfrac{Mm}{R^2}sen(\alpha_2)-Nsen(\alpha_1)=m\omega^2 r\end{cases}$$

Eliminando *N* y aplicando la trigonometría elemental

$$\frac{GM}{R^2}sen(\alpha_1-\alpha_2)=\omega^2R\cos(\alpha_1)sen(\alpha_2)$$

En este resultado podemos identificar:

$$d\phi=\alpha_1-\alpha_2\,;\,\alpha_1\approx\alpha_2\approx\pi-\phi\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{GM}{R^2}d\phi\approx-\dfrac{\omega^2R}{2}sen(2\phi)\\ -\dfrac{2\delta}{R}sen(2\phi)\approx d\phi\end{array}\right\}\Rightarrow\delta\approx\frac{1}{4}\frac{\omega^2R^4}{GM}$$

y por tanto el achatamiento *A* se puede aproximar por

$$\boxed{A=R_{\max}-R_{\min}=2\delta\approx\frac{1}{2}\frac{\omega^2R^4}{GM}}$$

Podemos encontrar el achatamiento previsto para cuerpos celestes del sistema solar:

Cuerpo	***Masa en kg***	***Radio Medio(km)***	***Frecuencia ω = 2π/T en seg^{-1}***	***A (km) medido***	***A (km) calculado***	***Error%***
Sol	1.9891×10^{30}	696.000	2.78×10^{-6}	6.3	6.8	+8%
Mercurio	3.302×10^{23}	2.440	1.24×10^{-6}	0	0	-
Venus	4.896×10^{24}	6.052	3×10^{-7}	0	0	-
Tierra	5.9736×10^{24}	6.371	7.27×10^{-5}	22	11	-50%
Marte	6.4186×10^{23}	3.387	7.12×10^{-5}	20	8	-60%
Júpiter	1.889×10^{27}	71.492	1.76×10^{-4}	4.638	3.200	-31%
Saturno	5.688×10^{26}	57.325	1.64×10^{-4}	5.904	3.810	-35%
Urano	8.686×10^{25}	25.559	1.013×10^{-4}	586	376	-36%
Neptuno	1.024×10^{26}	24.786	1.085×10^{-4}	423	324	-24%
Luna	7.3477×10^{22}	1.737	2.66×10^{-6}	3	0	>>-100%

Conclusiones

Vemos que la mayor precisión del modelo corresponde al caso del sol y la menor al caso de la luna. El sol se compone fundamentalmente de hidrógeno y podemos suponerlo un objeto fluido. La buena aproximación encontrada en el caso del sol respalda la aproximación hecha para la dirección del campo gravitatorio hacia el centro del elipsoide. En el caso de la tierra, se sabe por estudios de las huellas que dejaron las mareas sobre rocas de hace unos 3.000 millones de años que la duración del día era en aquella época de entre 18-20 horas; lo que produciría un achatamiento teórico entorno a los 19 km. En su origen, hace unos 5.000 millones de años, la tierra fue un planeta fluido compuesto de lava a altas temperaturas procedente del impacto de asteroides. Debido a las fuerzas de marea con el sol y la luna la tierra perdió energía cinética de rotación propia y el periodo de rotación de la tierra fue aumentando hasta las 24 horas actuales. Esta modificación de la velocidad de giro afectará a la forma general dependiendo de la capacidad elástica y de acumular tensiones de la tierra[10]. Por otra parte los resultados anteriores apuntan a que el giro de los planetas no es la única causa de su achatamiento en el caso de los grandes planetas gaseosos; y en efecto sabemos que otra posible causa de esto son las fuerzas de tipo marea. Una fuerza de este tipo, causada por la gravedad de la tierra, se supone que actuó sobre la luna de modo que la rotación propia de la luna y su desplazamiento en la órbita

respecto a la tierra quedaron sincronizadas (*tidal locking*); lo que hizo que la luna muestre siempre la misma cara vista desde la tierra. Esto significa que en sus inicios la luna rotaba mas rápidamente y podemos suponer que esa rotación inicial era compatible con los *3 km* de achatamiento experimentales; lo que supone un valor inicial $\omega \approx 5.7 \times 10^{-5}\ s^{-1}$; *20* veces superior al actual. Es posible que un aumento de rigidez debido a un enfriamiento rápido de la luna mantuvo el achatamiento inicial. Del lado de la tierra la existencia de estas fuerzas de marea se evidencian en la regularidad de las mareas lunares (y también solares); mareas que, como se ha dicho antes, provocaron con el paso del tiempo un aumento del periodo de rotación propio de la tierra. Finalmente, se ha partido de una *aproximación* a la superficie de la tierra en forma de elipsoide. Sin embargo del análisis mecánico se puede derivar una ecuación diferencial para la forma de la tierra:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\left[1 - \frac{\omega^2}{GM}R^3\right];\ R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

con la aproximación de un radio *R* aproximadamente constante, la ecuación diferencial corresponde con la de una elipse en *su* sistema de *coordenadas canónicas*. Note el lector que esta ecuación diferencial solo es válida en el sistema de referencia canónico de la elipse.

En el contexto de la aproximación multipolar (ver apéndice) hemos hecho la primera aproximación correspondiente al término monopolar. Si elegimos como origen de nuestro sistema de coordenadas el centro de masas de la tierra, entonces el término dipolar se anula (*P=0*) de modo que la segunda aproximación corresponde al término cuadrupolar(*Q*)

<u>Conservación de la energía y del momento angular en el modelo Newtoniano.</u>

La ley de Newton de la gravedad admite dos integrales sencillas (ver apéndice) para el caos de un sistema de dos cuerpos, válidas sea cual sea la trayectoria concreta del cuerpo afectado por la gravedad y asociadas a dos constantes del movimiento con unidades de energía y momento angular:

$$\overline{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\overline{u_r} \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r};\qquad \overline{L} = \overline{r} \times \overline{p}$$

donde *r* es la distancia al centro de fuerza, que es uno de los focos y u_r es un vector unitario en la dirección, y sentido, del foco de fuerzas a la partícula.

Consecuencias:

1-Movimiento plano, la trayectoria es compatible con la ecuación de un plano:

$$0 = \left(\overline{r} \times \overline{r}\right) \bullet \overline{p} = \overline{r} \bullet \left(\overline{r} \times \overline{p}\right) = \overline{r} \bullet \overline{L} \equiv (x - x_0)L_x + (y - y_0)L_y + (z - z_0)L_z = 0$$

donde las componentes del momento angular *L* son valores constantes y los vectores *r* se miden respecto del centro de fuerzas.

2-Si *E < 0, r* no puede ser tan grande como queramos; esto representa una trayectoria acotada por una distancia máxima o *apoastro* entorno al centro de fuerzas. Corresponde a un *círculo* o una *elipse*. Si *E > 0* ó *E=0* la trayectoria no está acotada y la partícula puede estar a una distancia *r* tan grande como se quiera respecto del centro de fuerzas; la gravedad no impone un límite superior. Este caso corresponde a

una hipérbola o una parábola. Para distancias muy alejadas del centro de fuerzas el efecto de dicha fuerza será despreciable y la partícula se moverá aproximadamente por inercia en una línea recta y con velocidad constante (*E>0 hipérbola*), o bien permanecerá aproximadamente en reposo relativo (*E=0 parábola*); según la primera ley de Newton de la mecánica. Esto representa el comportamiento asintótico para las trayectorias abiertas de la hipérbola y la parábola.

Elipses e hipérbolas en coordenadas canónicas.

Se puede definir la elipse como el lugar de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos denominadas *focos* es una constante. Análogamente la hipérbola es el lugar de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos denominados focos es una constante positiva. Se trata de dos figuras que tienen un centro de simetría. Las coordenadas canónicas están asociadas a un sistema de coordenadas con origen en dicho centro de simetría y cuyos ejes *X,Y* son también ejes de simetría; tal como aparece en las imágenes. Para la elipse, las posiciones canónicas de los focos son *(a-p)/2* y *–(a-p)/2* sobre el eje *X*

$$\sqrt{\left(x+\frac{a-p}{2}\right)^2+(y)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{a-p}{2}\right)^2+(y)^2}=a+p \;\Rightarrow x^2 4pa+y^2(a+p)^2=ap(a+p)^2$$

Para *y=0* obtenemos *x=±(a+p)/2* o *semieje mayor*, para *x=0* obtenemos *y=±√ap* o *semieje menor*. Las trayectorias elípticas de los planetas con origen de coordenadas, o punto fijo, en el sol es una de las *leyes experimentales de Kepler*.

Para la hipérbola, en la representación canónica los focos están sobre el eje *X* en las posiciones *(a+p)/2* y *–(a+p)/2*

$$\sqrt{\left(x+\frac{a+p}{2}\right)^2+(y)^2}-\sqrt{\left(x-\frac{a+p}{2}\right)^2+(y)^2}=a-p \;\Rightarrow x^2 4pa-y^2(a-p)^2=ap(a-p)^2$$

Pendiente de las rectas asíntotas de la hipérbola

$$\tan(\alpha/2)=\lim_{x->\infty}\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt{pa}}{a-p}$$

La distancia, simbolizada por la letra *b*, del foco a una asíntota cualquiera de la hipérbola cae dentro del tópico geométrico de la distancia de un punto a una recta:

$$b=\frac{\left(\frac{a+p}{2}\right)\tan(\alpha/2)}{\sqrt{\tan^2(\alpha/2)+1}}=\sqrt{pa}=\frac{a-p}{2}\tan(\alpha/2)=\frac{a-p}{2}\frac{1}{\tan(\beta/2)}$$

Un parámetro muy utilizado en la bibliografía es la excentricidad *ε*

$$\varepsilon=\frac{a-p}{a+p}$$

Análisis del caso de la trayectoria elíptica.

Las componentes de la aceleración de una partícula asociadas a su trayectoria verifican

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\left[v(t)\bar{T}\right] = \frac{dv(t)}{dt}\bar{T} + \frac{v(t)^2}{\rho}\bar{N}$$

siendo *v(t)* el módulo de la velocidad del punto en función del tiempo y *ρ* el radio de curvatura intrínseco de la trayectoria. El vector *T* es un vector unitario tangente a la trayectoria y con la misma dirección que la velocidad de la partícula en el punto considerado de la trayectoria y *N* es un vector unitario perpendicular a *T* y dirigido hacia la parte cóncava de la trayectoria. El hecho matemático de que el vector *N* esté bien definido indica la existencia del *plano osculador* a la trayectoria, de modo que, en términos de cálculo diferencial, cerca de un punto dado de cualquier curva trayectoria existe un plano que aproxima tanto como queramos la trayectoria cerca de ese punto:

$$\left(\bar{v} \times \bar{a}\right) \bullet d\bar{r} = \left(d\bar{r} \times \bar{v}\right) \bullet \bar{a} = 0$$

El vector producto vectorial de la velocidad y la aceleración es el vector director del plano osculador en cada punto de la trayectoria y los vectores *N* y *T* están contenidos en dicho plano osculador. En otro contexto, la existencia de este plano osculador *permite* en el caso del movimiento de las partículas de un sólido rígido considerar la existencia del plano de giro instantáneo y por tanto la existencia del vector velocidad angular instantánea en la cinemática del sólido rígido[8]. En el caso de trayectorias planas el plano osculador es el mismo plano de la trayectoria.

Para el caso de orbita elíptica la función *r(t)*, que representa en función del tiempo el radio vector de la partícula móvil respecto del centro de fuerzas situado en uno de los focos, está acotada al menos por el máximo del apoastro (*a*) como hemos visto. Si derivamos respecto del tiempo la ecuación de la energía tenemos

$$\frac{dE}{dt} = 0 = mv\frac{dv}{dt} + G\frac{Mm}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

La derivada de *r(t)* en sus puntos extremos, máximos y/o mínimos, se anula; y por tanto también se anula la derivada de *v(t)* según la ecuación anterior, lo que indica que también son puntos extremos para el módulo de la velocidad. Una segunda derivada de la energía permite deducir los signos de la derivada segunda en estos extremos

$$mv\frac{d^2v}{dt^2} + G\frac{Mm}{r^2}\frac{d^2r}{dt^2} = 0$$

Por tanto un máximo de *r(t)* (derivada segunda negativa) corresponde a un mínimo de *v(t)* (derivada segunda positiva) y al revés.

Si la derivada del módulo de la velocidad se anula en los puntos extremos de *r(t)*, entonces la aceleración asociada a la trayectoria solamente tiene la componente normal asociada a *N* en estos puntos, y por tanto la fuerza que afecta a la partícula móvil tiene una dirección también normal a la trayectoria. Además según la ley de fuerzas de Newton la dirección de la fuerza siempre está dirigida hacia el centro de fuerzas, es decir, tiene la dirección del radio vector *r*. Dado que el vector velocidad instantánea es siempre tangente a la trayectoria, deducimos que en los puntos extremos de la trayectoria la velocidad instantánea y el radio vector de la partícula respecto del centro de fuerzas son perpendiculares. Esto permite expresar el módulo del momento angular en estos puntos como $L = mrv$ y la ecuación de la energía se puede plantear así en los puntos extremos

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} \Rightarrow \quad r = -G\frac{Mm}{2E} \pm \sqrt{\left(G\frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

para *E<0* la solución de esta ecuación proporciona un valor para el máximo o apoastro (*a*) y otro valor que ha de ser necesariamente el mínimo o periastro (*p*). Descartamos por razones físicas el valor mínimo *r=p=0,* equivalente a *L=0*; lo cual supondría unas energías cinética y potencial infinitas en la ecuación de la energía. El lector puede ver que el valor *L=0* requiere considerar la masa central *exactamente puntual* (*p=0*), lo que supone necesariamente, en términos físicos de un caso real, el choque del móvil con el centro de fuerzas (supuesto esférico, compacto y sin huecos). Si suponemos el centro de fuerzas mucho mas masivo que el móvil, tal como supone este modelo clásico, lo mas probable es que parte de la energía se disipe en calor en el choque y la energía mecánica *E* deja de ser una constante. Del resultado anterior podemos calcular la excentricidad de la elipse como

$$\varepsilon = \frac{a-p}{a+p} = \frac{\sqrt{\left(G\frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}}{-G\frac{Mm}{2E}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m(GMm)^2}}$$

Para que la ecuación anterior tenga soluciones reales asociadas a una trayectoria acotada debe verificarse, independientemente de la trayectoria concreta, que

$$E \geq -\left(\frac{GMm}{L}\right)^2 \frac{m}{2} \qquad (1)$$

En el caso límite en que los extremos coinciden: *p=a* y *ε=0;* tenemos una trayectoria circular, ya que si el mínimo y el máximo de *r(t)* coinciden, entonces *r(t)* debe ser constante y por tanto la ecuación anterior es una igualdad. Planteando la ecuación de la energía para los extremos encontrados tenemos

$$E = \frac{L^2}{2mp^2} - G\frac{Mm}{p}$$
$$E = \frac{L^2}{2ma^2} - G\frac{Mm}{a}$$

Eliminando *L* resulta

$$E = -G\frac{Mm}{p+a}$$

con esto *L* se puede resolver como

$$L = \pm m\sqrt{2GM\frac{pa}{p+a}}$$

donde el signo + corresponde a un desplazamiento del planeta en su órbita al revés que las agujas del reloj y el signo – en la misma dirección que las agujas del reloj. Vemos que conociendo *L* y *E* quedan totalmente determinados los puntos del periastro y el apoastro así como el plano del movimiento. Por tanto conocer *L* y *E* equivale a determinar totalmente la trayectoria elíptica.

Podemos calcular fácilmente el *radio de curvatura ρ* de la trayectoria en el periastro despejándolo de las siguientes relaciones aplicables al periastro

$$E = -G\frac{Mm}{a+p} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{p}\ ;\ m\frac{v^2}{\rho} = G\frac{Mm}{p^2}$$

tenemos

$$\rho(p) = \frac{2ap}{a+p}$$

Puede comprobar el lector que el radio de curvatura en el apoastro es el mismo. Para el caso de una órbita circular *p = a = r*, siendo *r* el radio de la trayectoria circular y por tanto el radio de curvatura es igual al radio de la circunferencia: *ρ(r) = r*.

<u>Análisis del caso de la trayectoria hiperbólica.</u>

En el caso de la trayectoria hiperbólica tenemos, aplicando las condiciones en el periastro y en el infinito

$$E = \frac{L^2}{2mp^2} - G\frac{Mm}{p} = \frac{P_\infty^2}{2m}$$
$$L = bP_\infty$$

donde la *P* mayúscula representa el impulso mecánico en el infinito. Aplicando resultados anteriores para *b* tenemos para *E:*

$$E = G\frac{Mm}{a-p}$$

y para *L*

$$L = \pm m\sqrt{2GM\frac{ap}{a-p}}$$

Una partícula que se acerque al foco desde el infinito por una rama asintótica y luego se aleje por la rama asintótica correspondiente experimentará una modificación en la dirección *β* de la velocidad que se puede calcular a partir del ángulo de las asíntotas

$$\tan(\beta/2) = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha/2) = \frac{1}{\tan(\alpha/2)} = \frac{GMm}{L}\sqrt{\frac{m}{2E}} = \frac{GMm^2}{LP_\infty}$$

En el caso hiperbólico la ecuación cuadrática de la energía proporciona las mismas soluciones para los extremos; pero ahora *E>0* y tenemos una solución con *r>0* y otra con *r<0*, esta última físicamente imposible. Sin embargo si multiplicamos esta solución negativa por -1 obtenemos el valor del parámetro del parámetro apoastro (a) que hemos utilizado en la hipérbola

$$p_{hiperbola} = -G\frac{Mm}{2E} + \sqrt{\left(G\frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}\ ;\ a_{hiperbola} = G\frac{Mm}{2E} + \sqrt{\left(G\frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

como puede verse comprobando la consistencia de estos valores con las relaciones *E(a,p), L(a,p)* anteriores. El proceso de multiplicar por -1 equivale físicamente a cambiar el signo de la fuerza de modo que ahora sería repulsiva : $-GMm/r^2 \rightarrow GMm/r^2$; esto es posible en el caso de interacción eléctrica Coulombiana entre cargas del mismo signo, que es proporcional a $1/r^2$ igual que la Ley de Newton. De este modo una rama de la hipérbola corresponde a una interacción atractiva y la otra rama corresponde a una interacción repulsiva, ambas proporcionales a $1/r^2$ y con los mismos valores de *E* y módulo de *L.*

Cálculo del cambio de impulso en una trayectoria hiperbólica.

Al pasar la partícula de la asíntota de aproximación a la asíntota de alejamiento, el impulso mecánico de la partícula se puede calcular por

$$\Delta\overline{P} = \int_{t1}^{t2} -G\frac{Mm}{r^2}\overline{u_r}dt$$

donde u_r es un vector unitario en la dirección, y sentido, del foco de fuerzas a la partícula. Para simplificar podemos desplazar el sistema de coordenadas canónico utilizado para la hipérbola en el eje *X* de modo que el origen coincida con el foco de fuerzas. En este nuevo sistema de coordenadas el vector u_r y la conservación de *L* se expresan fácilmente en coordenadas polares:

$$L = mr^2\frac{d\phi}{dt};\ \overline{u}_r = [\cos(\phi), sen(\phi)]$$

donde *L* debe considerarse con el signo algebraico adecuado(±). Eliminando *dt* tenemos

$$\Delta\overline{P} = -G\frac{Mm^2}{L}\int_{\phi 1}^{\phi 2}[\cos(\phi), sen(\phi)]d\phi = -G\frac{Mm^2}{L}[sen(\phi), -\cos(\phi)]_{-\phi 1}^{\phi 2}$$

Para el caso del cambio de impulso entre dos asíntotas se puede calcular esta integral a partir de la inclinación de las asíntotas calculado mas arriba, ya que dicha inclinación no cambia en el nuevo sistema de coordenadas desplazado:

$$\Delta\overline{P} = -G\frac{Mm^2}{L}[sen(\phi), -\cos(\phi)]_{2\pi-\alpha/2}^{\alpha/2} = -2G\frac{Mm^2}{L}[sen(\alpha/2), 0]$$

Aplicaciones prácticas.

Estos últimos resultados son aplicables al caso del impulso o asistencia gravitatoria[4] que afecta a una nave a su paso por un planeta. Esta interacción se puede ver como un choque elástico que se analiza en el apéndice matemático. En este caso la modificación de energía de la nave en su transito por la *esfera de influencia del planeta*, tomando un sistema de coordenadas centrado en el sol[2], es

$$\Delta E = \overline{v}_{planeta} \bullet \Delta\overline{P}$$

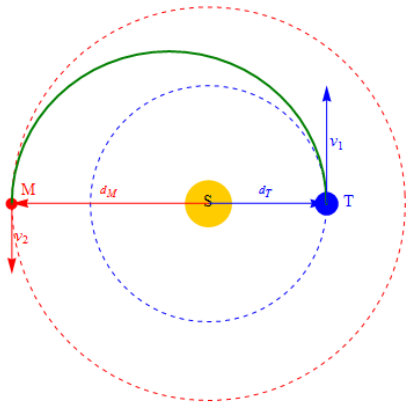
Según el signo de *L* y la dirección de la velocidad del planeta, la nave puede ganar o perder energía cinética. En caso de ganancia la nave puede incluso salir del sistema solar, como en el caso de las naves Voyager. El radio de la esfera de influencia de un planeta es la distancia al planeta mas allá de cual podemos considerar despreciable la atracción del planeta en comparación con la fuerza que ejerce el Sol. Se calcula mediante la siguiente fórmula atribuida a *Laplace*

$$R_{influencia} = D_{sol-planeta}\left(\frac{M_{planeta}}{M_{sol}}\right)^{2/5}$$

[2] Este sistema de coordenadas se puede considerar inercial por periodos de tiempo muy superiores a un sistema de coordenadas anclado en el centro de la tierra.

donde *D* es la distancia entre el sol y el planeta y *M* hace referencia a las masas del sol y del planeta. Esta fórmula es también muy similar a la posición de los puntos de Lagrange L1,L2 del sistema sol-planeta. Una primera aproximación que se puede hacer es considerar que durante el tránsito de la nave por la zona de influencia del planeta la energía potencial asociada al campo gravitatorio solar es *aproximadamente constante* y que en dicha zona de influencia el movimiento de la nave está determinado por el campo del planeta y las condiciones iniciales de la nave al entrar en la zona de influencia. En *concordancia* con esta aproximación, la velocidad del planeta se puede considerar constante durante el tránsito de la nave por la zona de influencia del planeta. Por tanto el planeta se mueve aproximadamente por *inercia* durante el tiempo correspondiente al tránsito y la trayectoria de la nave , vista desde el planeta, puede considerarse hiperbólica de acuerdo al modelo que hemos descrito.

Para ver intuitivamente este fenómeno, imagine el lector una pista con tres carriles. Por el carril central circula un camión hacia nosotros a 100 km/h y por el carril derecho circula en sentido opuesto un ciclista a una velocidad de 20 km/h. Visto desde el camión el ciclista se mueve a 120 km/h. Si el camión representa el planeta y el ciclista la nave; entonces la trayectoria hiperbólica *vista desde el camión* sería como si el ciclista pasa por detrás del camión y toma el carril izquierdo a una velocidad de 120 km/h. Por tanto visto desde la pista, que correspondería al sistema de coordenadas inercial centrado en el sol, el ciclista pasa de tener una velocidad de 20km/h a 100+120 = 220km/h. El aumento de energía cinética es evidente. Aunque el ejemplo es exagerado por tomar una trayectoria hiperbólica muy cerrada, para una trayectoria mas abierta el ejemplo es aplicable a la componente de la velocidad de la nave (ciclista) en la dirección de la velocidad del planeta (camión).



Otro concepto importante son las *órbitas de transferencia de Hohmann* [2]. Se trata de una maniobra de naves espaciales que permite cambiar de una órbita circular a otra también circular mediante empujes idealmente instantáneos de los motores en los puntos extremos de una trayectoria de transferencia semi-elíptica. Estos empujes (v_1,v_2 en la imagen) generan un cambio de velocidad en los puntos extremos que tiene la misma dirección de la velocidad que ya llevaba la nave en dichos puntos extremos. De este modo la nueva velocidad de la nave después del empuje sigue siendo perpendicular al radio-vector foco-nave. En el análisis anterior hemos demostrado que si existen puntos extremos de *r(t)* en la trayectoria, en estos puntos el radio vector y la velocidad son perpendiculares; pero el lector puede ver también que la inversa es cierta: los puntos en que el radio vector y la velocidad son perpendiculares deben ser puntos extremos de la trayectoria, ya que la derivada del módulo de la velocidad en estos puntos de perpendicularidad debe anularse en las componentes intrínsecas de la aceleración. Por tanto para este caso, el punto en que se ha verificado el cambio de velocidad de la nave *sigue siendo un punto extremo* en la nueva trayectoria elíptica de transferencia. Cuando la nave llega al otro extremo de la elipse de transferencia experimenta otro empuje en las mismas condiciones, es decir en la misma dirección de la velocidad. Este empuje permite a la nave incorporarse a la nueva trayectoria circular. Los cambios de energía, causados por los motores de la nave en los puntos extremos, serían

$$\Delta E_T = -GMm\left[\frac{1}{d_T + d_M} - \frac{1}{2d_T}\right] \quad ; \quad \Delta E_M = -GMm\left[\frac{1}{2d_M} - \frac{1}{d_T + d_M}\right]$$

El cambio de energía y el cambio de momento angular en cada punto de empuje están relacionados

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\left(\bar{v}+\Delta\bar{v}\right)^2 - \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = m\bar{v}\bullet\Delta\bar{v} + \frac{1}{2}m\left(\Delta\bar{v}\right)^2 \Rightarrow \left(\times 2d^2m\right) \Rightarrow \left(\Delta\bar{\ell}\right)^2 + 2\bar{\ell}\bullet\Delta\bar{\ell} - 2d^2m\Delta E = 0$$

$$\bar{\ell} = dm\bar{v}\ ;\ \Delta\bar{\ell} = dm\Delta\bar{v}\ \ ;\ \bar{L} = \frac{\bar{d}}{d}\times\bar{\ell}\ ;\ \Delta\bar{L} = \frac{\bar{d}}{d}\times\Delta\bar{\ell}$$

donde *d* es el módulo del radio-vector al centro de fuerzas en el punto de empuje y los vectores ℓ y $\Delta\ell$ se evalúan en puntos extremos de la trayectoria y están relacionados directamente con el momento angular ($L,\Delta L$) en estos puntos extremos. En nuestro caso las variación de velocidad y de momento angular son paralela y del mismo sentido que las correspondientes velocidad y momento angular inicial y por tanto podemos tomar los módulos de L y ΔL en la ecuación anterior, lo que produce para ΔL el valor

$$\Delta L = \sqrt{L^2 + 2md^2\Delta E} - L$$

el lector puede comprobar la expresión anterior en los puntos de empuje $d=d_T$ y $d=d_M$ y ver que los cambios de momento angular son los esperados para valores de L asociados a trayectorias circulares/elípticas.

Se pueden aplicar los resultados también a la "predicción clásica" de la desviación de un fotón al pasar cerca de un campo gravitatorio. Para pequeñas desviaciones angulares:

$$\beta \approx 2\tan\left(\beta/2\right) = 2\frac{GMm^2}{LP_\infty} = 2\frac{GMm^2}{mcp*mc} = \frac{2GM}{c^2p}$$

donde *p* es la mínima distancia al centro de fuerzas en el periastro y *m* es la masa equivalente del fotón ($E=mc^2$). Este resultado obtenido es la mitad del calculado en la relatividad general y comprobado experimentalmente.

También, debido a la similitud con la ley de Coulomb, se puede hacer un análisis análogo aplicable al caso del experimento de *Rutherford* de dispersión de partículas alfa (núcleos de helio) por repulsión de los núcleos atómicos de una lámina de oro. Basta hacer el siguiente cambio en los resultados

$$GMm \rightarrow -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon} \quad (2)$$

Donde *Q* es la carga situada, inmóvil, en el foco o centro de fuerzas y *q* es la carga de la partícula móvil. Note el lector que las órbitas elíptica, circular y parabólica solamente son posibles para el caso de fuerzas atractivas (cargas de signo contrario), mientras que la trayectoria hiperbólica permite fuerzas atractivas y repulsivas. Las fuerzas atractivas determinan la trayectoria mediante la rama de la hipérbola mas cercana al foco de fuerzas; y las repulsivas (cargas del mismo signo) determinan la trayectoria mediante la rama de la hipérbola mas alejada del foco de fuerzas. Sin embargo en el caso de cargas eléctricas hay que evaluar el fenómeno de emisión de radiación de una carga acelerada que, en general, hace que no existan trayectorias cerradas estables. En el experimento de Rutherford es relevante la relación entre el parámetro *b*, denominado *parámetro de impacto*, y el ángulo de dispersión de la trayectoria hiperbólica β. Partiendo de la ley de fuerzas de *Coulomb*, el lector puede comprobar la siguiente relación:

$$b = \frac{Z_\alpha Z_{oro} e^2}{4\pi\varepsilon m v_\infty^2} \frac{1}{\tan(\beta/2)}$$

donde los números *Z* hacen referencia al número de protones de las partículas alfa y del núcleo atómico del oro, *e* es la carga del electrón, *ε* la constante dieléctrica del vacío y la velocidad corresponde a la velocidad inicial con que las partículas alfa salen del sistema de aceleración correspondiente.

La independencia respecto de la trayectoria de la relación (1) es importante en mecánica cuántica, de modo que una relación similar se verifica para el caso del potencial Coulombiano en el átomo de hidrógeno; siendo *E* y *L* los valores cuantizados correspondientes. De hecho, si tomamos el caso de órbita circular en (1) y el postulado del modelo semiclásico de Böhr sobre cuantización de momento angular en átomos hidrógenoides: *L=nh//2π,* una vez hecho el cambio (2), obtenemos la fórmula correspondiente a los niveles de energía:

$$E = -Z^2 \frac{me^4}{8\varepsilon^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

En el análisis inicial descartamos el valor *L=0* (*p*=0) por razones físicas, sin embargo el valor *L=0* si está permitido por la mecánica cuántica clásica de *Heisenberg* y *Schrödinger*; y de hecho es la divergencia mas notable con el modelo semiclásico de Böhr. En cambio en la mecánica cuántica relativista de *Dirac* existe un momento angular mínimo, *L = h/4π,* asociado al Spin del electrón.

Si el lector ha visto imágenes de televisión del lanzamiento de cohetes espaciales, verá que los cohetes a medida que ganan altura aparecen inclinados. La inclinación que toman es en la dirección del giro propio de la tierra respecto de su eje de rotación norte-sur. Visto desde un sistema de coordenadas asociado al centro de masas de la tierra y que no gire con ella, el cohete sale con una energía cinética y momento angular iniciales asociados al giro de la tierra. Con la inclinación de la trayectoria se busca aumentar lo mas rápidamente posible el momento angular y la energía del cohete para ponerlo en órbita. Por tanto la *velocidad de escape* clásica debe corregirse con el efecto de velocidad de giro del planeta.

En el apéndice matemático se incluye un estudio completo de las trayectorias posibles bajo la acción de una fuerza central de tipo Newtoniano. Este estudio supone resolver la ecuación diferencial del movimiento que dependerá de valores iniciales. Los puntos singulares encontrados en el análisis de máximos y minimos de la trayectoria servirán para este fin.

APÉNDICE MATEMÁTICO

Fórmula para el choque elástico de dos cuerpos puntuales.

En el choque elástico de dos cuerpos puntuales, nombrados como 1 y 2, se conserva la cantidad de movimiento y la energía cinética del sistema formado por los dos cuerpos. Las siguientes fórmulas dan cuenta de estas condiciones

$$E_0 = E_1 + E_2 = E_{1'} + E_{2'} \ ; \ \Delta E = E_{2'} - E_2 = E_1 - E_{1'}$$
$$\overline{P_0} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 = \overline{P}_{1'} + \overline{P}_{2'} \ ; \ \Delta\overline{P} = \overline{P}_{2'} - \overline{P}_2 = \overline{P}_1 - \overline{P}_{1'}$$

donde los subíndices sin primar indican el momento anterior al choque y los subíndices primados el momento posterior al choque. Si elevamos al cuadrado la ecuación de conservación del impulso mecánico tenemos

$$\left(\overline{P}_1 + \overline{P}_2\right)^2 = \left(\overline{P}_{1'} + \overline{P}_{2'}\right)^2 \Rightarrow P_1^2 + P_2^2 + 2\overline{P}_1 \bullet \overline{P}_2 = P_{1'}^2 + P_{2'}^2 + 2\overline{P}_{1'} \bullet \overline{P}_{2'}$$

expresando los cuadrados de impulso mecánico en función de las correspondientes energías cinéticas ($E=p^2/2m$) e incluyendo los valores de energía ΔE e impulso ΔP intercambiados por las partículas en el choque en la fórmula anterior tenemos

$$2m_1\Delta E + 2\overline{P}_1 \bullet \overline{P}_2 = 2m_2\Delta E + 2\overline{P}_{1'} \bullet \overline{P}_{2'} \Rightarrow m_1\Delta E + \overline{P}_1 \bullet \left(\overline{P_0} - \overline{P}_1\right) = m_2\Delta E + \overline{P}_{1'} \bullet \left(\overline{P_0} - \overline{P}_{1'}\right) \Rightarrow$$
$$\left(m_1 - m_2\right)\Delta E + \overline{P_0} \bullet \Delta\overline{P} = P_1^2 - P_{1'}^2 = 2m_1\Delta E \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(m_1 + m_2\right)\Delta E = \overline{P_0} \bullet \Delta\overline{P} \quad \equiv \quad \Delta E = \overline{v}_{cm} \bullet \Delta\overline{P} \ ; \ \overline{v}_{cm} = \frac{\overline{P_0}}{m_1 + m_2}}$$

donde el centro de masas es el correspondiente al sistema formado por las masas *1* y *2*. Si se considera la mecánica relativista la fórmula anterior se transforma en

$$\boxed{E_0\Delta E = c^2\overline{P_0} \bullet \Delta\overline{P}}$$

donde E_0 es la energía relativista total, que incluye la masa, y c la velocidad de la luz. Una demostración de esta última fórmula se puede ver en [1].

Esta última fórmula es directamente aplicable al *efecto Compton*. La *energía total* inicial será $E_0=mc^2+h\omega$; si la *energía cinética del electrón* es despreciable frente a la del fotón podemos tomar m como la *masa en reposo* del electrón. En concordancia con la aproximación anterior sobre la energía cinética, el impulso mecánico inicial del electrón es también despreciable frente al fotón[3] y por tanto P_0, ΔE, ΔP pueden expresarse dependiendo solo de los fotones

$$\left(mc^2 + \hbar\omega_0\right)\left(\hbar\omega - \hbar\omega_0\right) = c^2\hbar\overline{k}_0 \bullet \left(\hbar\overline{k} - \hbar\overline{k_0}\right) \Rightarrow \lambda - \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{mc}\left(1 - \cos\theta\right) \ ; \ \omega = kc; \ k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

[3] Esto también es coherente con la relación relativista $E^2=p^2c^2+m^2c^4$, si p=0 entonces $E=mc^2$

Leyes de Newton. Una introducción terrestre.

El desarrollo de la mecánica se gestó en los cielos con el modelo de Copérnico, y las leyes de Kepler y Newton. Galileo y Newton supieron también detectar los principios básicos de la mecánica y aplicarla a la física experimentable a diario en la tierra.

La segunda ley de Newton para una partícula o centro de masas se puede expresar así en un sistema de coordenadas inercial:

$$\sum_i \overline{F}_i = m\overline{a}_{cm}$$

Una primera integral inmediata de esta ley se obtiene multiplicando escalarmente por un pequeño desplazamiento del centro de masas y haciendo la integral

$$\sum_i \int_1^2 \overline{F}_i \bullet d\overline{r}_{cm} = \int_1^2 m\overline{a}_{cm} \bullet d\overline{r}_{cm} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \Big|_1^2 = \frac{1}{2} m v_{cm-2}^2 - \frac{1}{2} m v_{cm-1}^2$$

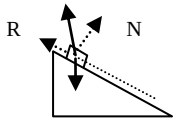
si consideramos que la gravedad es una de las fuerzas que actúa tenemos la energía cinética y potencial del centro de masas en el lado derecho de la ecuación

$$\sum_{i \neq gravedad} \int_1^2 \overline{F}_i \bullet d\overline{r}_{cm} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \Big|_1^2 - \int_1^2 m\overline{g} \bullet d\overline{r}_{cm} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + mgh_{cm} \Big|_1^2$$

En la parte derecha de la 2ª Ley de Newton predomina el componente conceptual matemático: componentes intrínsecas de la aceleración, energía cinética y aceleración en sistemas de coordenadas genéricos. En la parte izquierda predomina el componente conceptual físico de las fuerzas que están actuando sobre la partícula o sistema físico.

El problema mas sencillo es el lanzamiento de un proyectil afectado por la gravedad y se demuestra matemáticamente que la trayectoria correspondiente es una parábola.

El siguiente problema en complejidad es la caída de un objeto por un plano inclinado. Del lado derecho de la 2ª ley tenemos que el centro de masas se mueve en una recta, que es muy diferente de una parábola; la fuerza de gravedad tendría que ser paralela a la trayectoria recta y esto no ocurre en este caso. Por tanto la gravedad por si sola no puede explicar este movimiento y tenemos que introducir otra fuerza asociada al contacto físico entre el objeto y el plano inclinado. Según la 2ª ley, esta fuerza está en el plano formado por la fuerza de gravedad y la aceleración (paralela a la trayectoria) y para que tenga sentido físico debe estar orientada aproximadamente como en el dibujo; donde se representan la fuerza de gravedad, la fuerza de contacto y sus componente *R,N* y la trayectoria en línea de puntos. Esta fuerza de contacto tiene una componente *R* paralela al plano que justifica el retardo del movimiento debido al rozamiento. Por otro lado la componente perpendicular al plano *N* justifica el movimiento rectilíneo del centro de masas cancelando las componentes de la fuerza en la dirección perpendicular a la trayectoria.



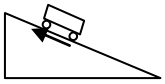
En este punto se puede mostrar que el rozamiento puede ser reducido por distintos métodos : utilizando materiales pulidos, grasa para favorecer el deslizamiento….Sin embargo esto no afecta a la componente normal *N* que está determinada por la trayectoria que sigue el paquete. De esta forma la componente *N* de la fuerza de contacto tiene un significado mas profundo y su causa está en la repulsión entre

electrones entre los cuerpos en contacto. Mientras que el rozamiento depende de irregularidades de las superficies en contacto a nivel no atómico, sino microscópico. Estas irregularidades propician algún tipo de "enganche" en el contacto que dificulta de algún modo el *movimiento relativo.* Por otro lado la componente normal *N* es perpendicular a la trayectoria del centro de masas, de modo que su integral correspondiente es nula y no aparece en la forma integral de la 2ª Ley de Newton. Las fuerzas *N* y *R* no solo aparecen en el plano inclinado, sino en cualquier situación en que exista un contacto entre dos objetos. Por ejemplo una bolita moviéndose en contacto con una superficie esférica experimenta una fuerza *N* perpendicular a la zona de contacto con la esfera. Lo mismo es válido para la fuerza *R* cuyo vector estará en una u otra dirección de modo que se verifique la 2ª Ley de Newton pero siempre paralelo a la superficie de contacto. Por ejemplo si el paquete ascendiese por el plano inclinado debido a un impulso inicial la componente *R* sería opuesta al caso en que descendiese.

El rozamiento que hemos visto es con deslizamiento, es decir, con movimiento relativo entre las superficies en contacto; pero también existe otra forma de rozamiento sin deslizamiento. Se pone de manifiesto cuando andamos normalmente o en el giro normal de una rueda con el suelo. En este caso las superficies en contacto están en reposo relativo : su velocidad relativa es nula.

Desde el punto de vista de la conservación de la energía, el rozamiento con deslizamiento supone el desplazamiento relativo de la fuerza de rozamiento, lo que supone una transformación de energía mecánica en calor: el sistema pierde energía mecánica transformada en calor. Por el contrario, el rozamiento sin deslizamiento no tiene un desplazamiento relativo asociado y por tanto no existe una transferencia de energía de ningún tipo asociada a esta fuerza; sin embargo esta fuerza si realiza una transferencia de impulso mecánico. Esto es también lo que pasa con *N* y caracteriza a estas fuerzas como *fuerzas de ligadura* en mecánica analítica. Podemos preguntarnos entonces de donde procede la energía cinética que adquieren, un corredor, una bicicleta o un coche acelerando en llano si no es de las fuerzas externas actuantes sobre estos objetos. La respuesta compatible con el principio de conservación de la energía de la termodinámica es que la energía cinética que adquieren es una transformación de las *energías internas* propias del corredor, del ciclista y del motor del coche.

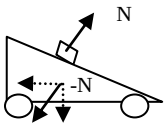
El lector puede estar confuso a la vista de la integral anterior $\int_1^2 \bar{R} \bullet d\bar{r}_{cm}$, formalmente similar al trabajo físico. Si el sumatorio de fuerzas incluye un rozamiento *R* sin deslizamiento esta integral puede ser no nula en función del desplazamiento del centro de masas. Pero el lector no debe confundir esta integral con la transferencia de energía de una fuerza, que depende del desplazamiento del punto material de aplicación de la fuerza, no del desplazamiento del centro de masas. Sin embargo el valor no nulo de esta integral nos puede informar de la existencia de una transferencia de algún tipo de energía interna en el objeto afectado por el rozamiento sin deslizamiento, como es el caso anterior de la bicicleta acelerando en llano. Otro caso es un carro de cuatro ruedas que baja el plano inclinado rodando sin deslizar. No hablaremos en este caso de energía interna en el sentido termodinámico, pero si hay una transferencia interna de energía entre el centro de masas y la energía cinética de rotación de las ruedas que hace que el carro se mueva relativamente mas lento que un objeto de la misma masa bajando sin rozamiento por el plano. En consecuencia debemos asignar al rozamiento sin deslizamiento una fuerza como la del dibujo que disminuye la aceleración de caída del carro. El lector interesado puede ver mas detalles en los trabajos sobre termodinámica y cinemática y dinámica del sólido rígido.



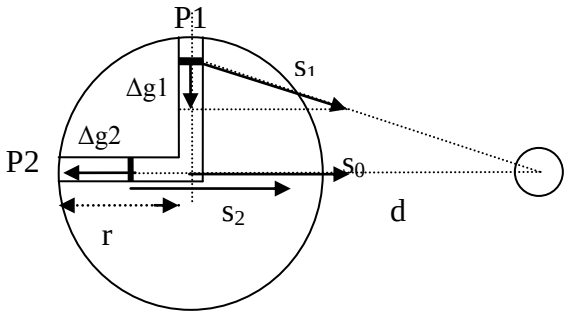
El índice *i* en el sumatorio de la segunda ley numera cada una de las fuerzas que actúan sobre nuestro objeto de estudio y para cada fuerza *i* existe también la fuerza de reacción correspondiente con la 3ª Ley de Newton; fuerza de reacción que evidentemente actúa sobre un objeto diferente al considerado en la 2ª Ley.

Imagínese de pie sobre una báscula casera para medir su peso. Si eleva un brazo puede ver que el indicador de peso se pone a oscilar. Esto es debido a las fuerzas internas al cuerpo que aparecen en el proceso, fuerzas relacionadas por el principio de acción y reacción. Al mover el brazo, hay una fase inicial en que la velocidad del centro de masas del brazo aumenta, llega a un máximo y disminuye en una segunda fase hasta anularse cuando el brazo está totalmente en alto. En la primera fase la aceleración del centro de masas del brazo será positiva y corresponde según la 2ª ley de Newton a una fuerza hacia arriba. Esta fuerza procede de la interacción del brazo con el resto del cuerpo mediante los músculos correspondientes y por tanto el resto del cuerpo sufre la correspondiente fuerza de reacción hacia abajo. Esta reacción hacia abajo hace que los pies presionen mas fuertemente la balanza y el indicador de peso aumente. En la segunda fase pasa lo contrario: la fuerza sobre el brazo es hacia abajo y la fuerza de reacción del resto del cuerpo es hacia arriba, lo que hace que los pies presionen menos sobre la balanza y el indicador de peso disminuya. La oscilación del indicador de la balanza es por tanto una señal de la existencia de fuerzas de acción y reacción en el interior de nuestro propio cuerpo.

El dibujo adjunto representa un plano inclinado sobre el que se desliza sin rozamiento un bloque. El plano inclinado puede moverse a izquierda-derecha debido a las ruedas que tiene prácticamente sin fricción. El dibujo representa la fuerza *N* normal, asociada la superficie de contacto entre bloque y plano, aplicada en el centro de masas del bloque. También se representa la correspondiente fuerza de reacción *–N* actuando sobre el centro de masas del plano inclinado. Para determinar la dinámica del centro de masas del plano inclinado falta incluir el peso *P* del plano inclinado y las normales *N'* del contacto entre el plano inclinado y el eje de las ruedas, o entre las ruedas y el suelo si se prefiere. Estas fuerzas *P* y *N'* están geométricamente en la dirección vertical y pueden compensar la componente vertical de *–N* para que la suma sea cero en la vertical. Pero si el rozamiento de rodadura no es suficientemente alto, entonces la componente horizontal de *–N* no queda compensada y el plano inclinado empieza a moverse hacia la izquierda. De esta forma el movimiento del plano inclinado es una consecuencia del principio de acción-reacción.



Mareas



El dibujo adjunto representa la interacción entre la Tierra y el Sol, separados una distancia d, de cara a un cálculo sencillo de las mareas causadas por el Sol. Suponemos que la tierra es un planeta líquido, que no gira respecto su eje de rotación y perfectamente esférico. El sistema de coordenadas que utilizaremos es un *sistema de coordenadas en caída libre en el campo gravitatorio solar* y solidario a la tierra (que suponemos no gira en su eje norte-sur, de modo que hacemos abstracción de las fuerzas centrífugas y de Coriolis) y cuyo centro se mantiene unido al centro de la tierra; por tanto sigue el movimiento del centro de la tierra en el campo gravitatorio solar. Imaginemos dos columnas de agua, 1 y 2 tal como aparecen en el dibujo. En ambas columnas se ha marcado un elemento de fluido. El cálculo de la

variación de presión en estas columnas debe hacerse en términos diferenciales, puesto que la gravedad terrestre ya no es constante en dimensiones tan grandes y además hay que considerar el efecto de la gravedad solar sobre las columnas. Vamos a calcular la diferencia de presión P_2-P_1 desde el sistema de coordenadas en caída libre definido antes, para lo que aplicaremos la fórmula

$$dp = \rho\left[g(r) + \Delta g(r)\right]dr$$

donde *g(r)* hace referencia al campo gravitatorio de la tierra y *Δg(r)* hace referencia a las alteraciones correspondientes al *campo gravitatorio solar*. El elemento de fluido en la columna 1 está afectado por el campo gravitatorio solar s_1, pero esta es la visión desde un sistema de coordenadas inercial centrado en el sol. Respecto de nuestro sistema de coordenadas la cinemática exige compensar la aceleración *s* de cualquier cuerpo asociada al campo gravitatorio solar con la aceleración s_0 asociada al movimiento de nuestro sistema de coordenadas. De este modo tenemos, en módulo (M_s= masa del sol)

$$\Delta g_1(r) = \left(\bar{s}_1 - \bar{s}_0\right)\bullet \bar{u}_r \approx \frac{GM_s}{d^2}\frac{r}{d}$$

donde u_r es un vector unitario paralelo a la columna P_1 y apuntando al centro de la tierra. Para el elemento de fluido de la columna 2 debemos hacer la misma compensación. Para ello podemos desarrollar en serie el campo solar respecto del origen de coordenadas

$$s_2 = \frac{GM_s}{(d+r)^2} = \frac{GM_s}{d^2}\frac{1}{(1+\frac{r}{d})^2} \approx \frac{GM_s}{d^2}\left[1 - \frac{2r}{d}\right] \qquad (r << d)$$

$$\Delta g_2(r) = \bar{s}_2 - \bar{s}_0 = -\frac{2GM_s}{d^2}\frac{r}{d}$$

Con esto podemos calcular la variación de presión P_2-P_1

$$\int_{p1}^{p2} dp = \rho\int_R^0 \Delta g_1(r)dr + \rho\int_0^R \Delta g_2(r)dr$$

$$P_2 - P_1 = \rho\int_R^0 \frac{GM_s}{d^3} r\,dr - \rho\int_0^R \frac{2GM_s}{d^3} r\,dr = -\rho\int_0^R \frac{3GM_s}{d^3} r\,dr = -\rho\frac{3GM_s}{2d^3}R^2$$

donde *R* es el radio terrestre. El término asociado a la gravedad terrestre *g(r)* desaparece debido a que consideramos la tierra perfectamente esférica.

En consecuencia vemos que el efecto de la gravedad solar en una tierra líquida, que no gira respecto a si misma y perfectamente esférica es una disminución de la presión en 2 respecto de la presión en 1. Por tanto la tendencia al equilibrio hidrostático exige un movimiento de agua desde la zona 1 a la zona 2; es decir, la altura del mar en la zona 2 debe ser superior a la altura del mar en la zona 1 en una cantidad *Δh* que compense la discrepancia de presiones calculada

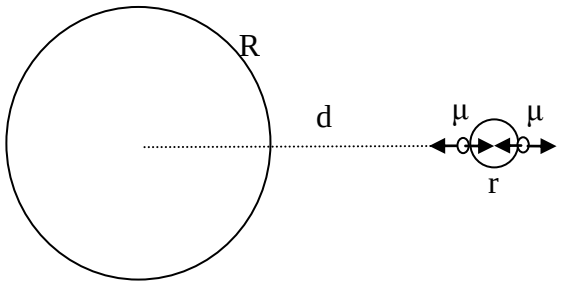
$$\rho\frac{3GM_s}{2d^3}R^2 = \rho g\Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{3GM_s}{2gd^3}R^2$$

donde *g* es la aceleración de la gravedad terrestre en su superficie. Haciendo cuentas la altura es de aproximadamente 25 centímetros. Un cálculo similar para la Luna resulta en 35 centímetros. Note el lector que este resultado correspondería a *Δh* en alta mar y que esto supone en realidad un gran volumen de agua desplazada. Debido

al giro de la tierra, las mareas acaban en las cercanías de las masas continentales, donde el mar tiene menos profundidad y esto hace que la marea gane en altura y velocidad, aún mas si pasa por estrechos poco profundos, como el Canal de la Mancha o el estrecho de Gibraltar. Dado que la atmósfera también se comporta como un fluido, también hay *mareas atmosféricas*.

Límite de Roche

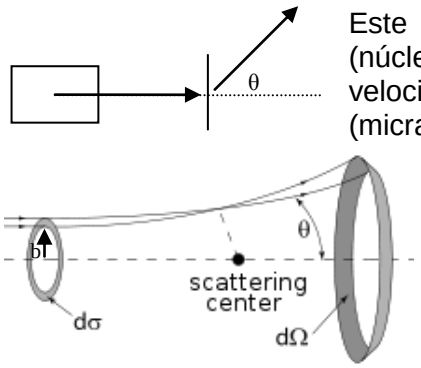
En astronomía, se denomina límite de Roche a la distancia mínima que puede soportar un objeto, que mantiene su estructura únicamente por su propia gravedad y que orbita un cuerpo masivo, sin comenzar a desintegrarse debido a las fuerzas de marea que genera el objeto principal. Dentro del límite de Roche, la fuerza de gravedad que el cuerpo central ejerce sobre los extremos más cercano y más alejado del satélite excede a la fuerza de gravedad del satélite, y este podrá ser destruido por las fuerzas de marea.



El dibujo representa un planeta masivo de radio *R* y masa *M* y un satélite de masa *m* mucho menor y radio *r*. Para un observador en el centro del satélite un objeto de masa μ en la superficie según el dibujo experimentará dos fuerzas opuestas : La gravedad del satélite y la fuerza de marea provocada por el planeta. El límite de Roche se alcanza cuando estas dos fuerzas opuestas son iguales, y según el desarrollo anterior será

$$\frac{2GM\mu}{d^2}\frac{r}{d}=\frac{Gm\mu}{r^2}\Rightarrow d=r\left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}$$

El experimento de Rutherford



Este experimento fundamental utiliza una corriente de partículas alfa (núcleos de helio) descubiertas por el propio Rutherford, todas con velocidad similar v_∞, que impactan sobre una delgada lámina de oro (micras). Como resultado las partículas atraviesan la lámina y se dispersan un ángulo θ variable para cada partícula de la corriente incidente. Estas partículas pueden detectarse una a una por el destello que provocan al impactar en una *pantalla fluorescente* o el sonido que generan al pasar por un *contador Geiger*; dispositivos que fueron desarrollados en el experimento. Según el modelo atómico de Rutherford, que este experimento demuestra, la carga positiva y la mayor parte de la masa de los átomos de oro están concentrados en un núcleo central que puede considerarse puntual en las condiciones del experimento, mientras que la carga negativa se distribuye en electrones que de algún modo orbitan entorno al núcleo. Las partículas alfa tienen una masa (4 u.m.a) mucho mayor que los electrones(1/1800 u.m.a), pero mucho menor que el núcleo de los átomos de oro (197 u.m.a), de modo que el responsable principal de la dispersión de las partículas alfa es el campo eléctrico del núcleo (scattering center). Si consideramos una corriente cilíndrica de partículas alfa tomaremos como eje de referencia el eje de dicho cilindro. Evidentemente las partículas de la corriente de entrada a la placa de oro tienen trayectorias paralelas entre si y corresponden con asíntotas de las trayectorias hiperbólicas de dispersión. Si *dσ* corresponde según el dibujo al área de un aro elemental de radio *b* y anchura *db;* donde *b* es la distancia, calculada anteriormente, entre el núcleo y la asíntota correspondiente a una partícula de la corriente de entrada a la placa de oro tenemos

$$b = \frac{Z_\alpha Z_{oro} e^2}{4\pi\varepsilon\, mv_\infty^2} \frac{1}{\tan(\theta/2)}; \;\; d\sigma = 2\pi b db = 2\pi \left(\frac{Z_\alpha Z_{oro} e^2}{4\pi\varepsilon\, mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos(\theta/2)}{sen^3(\theta/2)} \frac{d\theta}{2}$$

sustituyendo *dθ* por el angulo sólido *dΩ* desde el núcleo a las asíntotas de salida de la placa de oro y con algo de trigonometría

$$d\Omega = 2\pi sen(\theta) d\theta \Rightarrow d\sigma = \left(\frac{Z_\alpha Z_{oro} e^2}{8\pi\varepsilon\, mv_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{sen^4(\theta/2)} \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_\alpha Z_{oro} e^2}{8\pi\varepsilon\, mv_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{sen^4(\theta/2)}$$

El resultado encontrado se denomina *sección eficaz diferencial* y da una medida de la proporción de partículas del flujo incidente que sufren una dispersión en el ángulo sólido *dΩ*. De esta forma y para un mismo valor *dΩ,* los valores bajos de *θ* incluyen la mayor parte de las partículas incidentes, mientras que estas disminuyen a medida que *θ* aumenta. Esta relación fue comprobada, cuantitativamente según la fórmula anterior, en el experimento de Rutherford. Incluso se observaron casos de dispersión para *θ=π*, es decir rebotes perfectos cuando la partícula alfa impacta directamente contra el núcleo. De esta forma el experimento de Rutherford descubre por primera vez el núcleo atómico y establece que en el interior del átomo actúa un campo eléctrico de tipo Coulombiano que debe actuar no solo sobre las partículas alfa, sino también de alguna forma sobre los electrones; hecho este que la mecánica cuántica recoge posteriormente en el modelo de Borh y en la ecuación de Schrödinger. En posteriores refinamientos se incluyen también correcciones multipolares al potencial Coulombiano en los núcleos de algunos átomos debidas a la falta de simetría esférica de dichos núcleos.

Energía potencial y momento angular para dos cuerpos puntuales en interacción

El trabajo mecánico de un sistema es la transferencia de energía debida al desplazamiento (*dr)* del punto de aplicación de las fuerzas *(F)* que actúan sobre sus partículas. Matemáticamente

$$W\Big|_A^B = \sum_i \int_A^B \overline{F_i} \bullet d\overline{r_i}$$

donde *i* numera cada partícula del sistema y *A,B* representan estados inicial y final del sistema. El cálculo de esta magnitud en cualquier sistema mecánico es de importancia suma ya que está directamente relacionada con el *principio de conservación de la energía en un sistema aislado; que no interacciona con el exterior*. Dado que por la cinemática sabemos que el desplazamiento y la trayectoria de un punto varía según el sistema de coordenadas que utilicemos, debemos precisar que nos referimos al desplazamiento respecto de un sistema de coordenadas inercial. La conservación de la energía *E* de un sistema de dos partículas será, desde un sistema de coordenadas inercial

$$E = \int \overline{F_1} \bullet d\overline{r_1} + \int \overline{F_2} \bullet d\overline{r_2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + C$$

donde *C* es una constante de integración asociada al sistema de coordenadas inercial concreto que utilicemos. Por otra parte, si las partículas interaccionan según la fuerza de Newton y verificando, como es de esperar, el principio de acción reacción tenemos F_2=-F_1 tenemos

$$E = \int \overline{F_1} \bullet d\overline{r_1} - \int \overline{F_1} \bullet d\overline{r_2} = \int \overline{F_1} \bullet d\left(\overline{r_1} - \overline{r_2}\right) = -Gm_1m_2 \int \frac{\overline{r}}{r^3} \bullet d\overline{r} \; ; \; \overline{r} = \overline{r_1} - \overline{r_2}$$

el vector ***dr*** siempre se puede descomponer en una componente en la misma dirección del vector ***r*** y otra componente perpendicular al vector ***r***. La primera componente corresponde a una variación del módulo de ***r*** y por tanto

$$E = -Gm_1m_2 \int \frac{r}{r^3} dr = \frac{K}{r} + C'$$

igualando las dos expresiones tenemos

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = const.$$

tenemos el resultado correspondiente a la conservación de la energía mecánica en un sistema de coordenadas inercial.

Para el caso del momento angular del sistema de dos cuerpos tenemos para el momento total de fuerzas *M* en un sistema de coordenadas inercial, aplicando el principio de acción y reacción *F2=-F1* y por tanto

$$\overline{M} = \frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{r_1} \times \overline{F_1} + \overline{r_2} \times \overline{F_2} = \left(\overline{r_1} - \overline{r_2}\right) \times \overline{F_1} = \overline{r} \times \overline{F_1} = 0$$
$$\Rightarrow \overline{L} = \overline{r_1} \times \overline{p_1} + \overline{r_2} \times \overline{p_2} = cte$$

el resultado nulo se debe a que en la ley de Newton la fuerza *F* es paralela al radio-vector ***r*** entre las partículas.

Respecto a la cantidad de movimiento, si consideramos el sistema aislado de dos cuerpos tenemos una fuerza neta sobre el sistema de

$$\overline{F_1} + \overline{F_2} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\overline{p_1} + \overline{p_2}\right) \Rightarrow \overline{p_1}(t) + \overline{p_2}(t) = cte$$

en cualquier sistema de coordenadas inercial. Evidentemente, considerando la transformación cinemática de velocidades entre sistemas inerciales, siempre podemos encontrar uno de ellos que verifique $\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2}=0$. Podemos re-escribir los resultados anteriores en este sistema de coordenadas inercial de esta forma

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = const. \equiv \frac{\overline{p_1}^2}{2m_1} + \frac{\overline{p_2}^2}{2m_2} - \frac{Gm_1m_2}{r}; \overline{p_1}^2 = \overline{p_2}^2 \Rightarrow$$
$$\frac{\overline{p_2}^2}{2\mu} - \frac{Gm_1m_2}{r} = const; \; \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\overline{L} = \overline{r_1} \times \overline{p_1} + \overline{r_2} \times \overline{p_2} = cte \equiv \overline{r} \times \overline{p_2}$$

Pero el lector debe notar que en estos resultados aparece una mezcla de magnitudes medidas respecto del sistema de coordenadas inercial (p1) junto con posiciones relativas entre las partículas (r), de modo que en general, existe la desigualdad

$$\overline{p}_2 \neq m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

podemos mejorar esto en nuestro sistema de coordenadas y manejar solamente magnitudes relativas entre los cuerpos en interacción

$$\overline{v} = \overline{v_2} - \overline{v_1}; \quad m_1\overline{v_1} + m_2\overline{v_2} = 0 \Rightarrow m_1\left(\overline{v_2} - \overline{v}\right) + m_2\overline{v_2} = 0 \Rightarrow \overline{p_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\overline{v} = \mu\overline{v}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = const; \; \overline{L} = \overline{r} \times \mu\overline{v} = cte$$

Introducimos la aceleración relativa de esta forma

$$\overline{a} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{a_1} - \overline{a_2} = \frac{\overline{F_1}}{m_1} - \frac{\overline{F_2}}{m_2} = \overline{F_1}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{\overline{F_1}}{\mu} \Rightarrow$$

$$\overline{F_1} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\overline{r} = \mu\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

Esta última ecuación es válida en cualquier sistema inercial. Resumiendo resultados tenemos en nuestro sistema de coordenadas inercial

$$\overline{r} = \overline{r_2} - \overline{r_1}; \; \overline{v} = \overline{v_2} - \overline{v_1}; \; \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}; \; \overline{p}_2 = \overline{p} = \mu\overline{v}$$

$$\Rightarrow -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\overline{r} = \frac{d\overline{p}}{dt}$$

$$E = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{Gm_1m_2}{r} = cte; \; \overline{L} = \overline{r} \times \overline{p} = cte$$

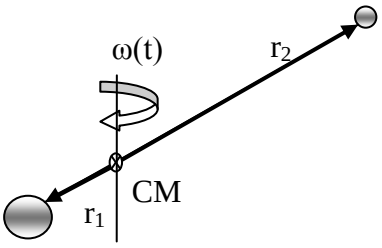
Haciendo un desarrollo análogo al análisis elemental de las trayectorias hecho al principio llegamos a

$$\left.\begin{array}{l} E_{elíptica} = -\dfrac{GMm}{a+p}; \; L_{elíptica} = \pm\mu\sqrt{2G(M+m)\dfrac{pa}{a+p}}; \; \varepsilon_{elíptica} = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{\mu(GMm)^2}} \\ a_{elíptica} = -G\dfrac{Mm}{2E} + \sqrt{\left(G\dfrac{Mm}{2E}\right)^2 + \dfrac{L^2}{2\mu E}}; \; p_{elíptica} = -G\dfrac{Mm}{2E} - \sqrt{\left(G\dfrac{Mm}{2E}\right)^2 + \dfrac{L^2}{2\mu E}} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} E_{hiperbólica} = \dfrac{GMm}{a-p} \\ L_{hiperbólica} = \pm\mu\sqrt{2G(M+m)\dfrac{pa}{a-p}} \end{array}\right\}$$

Note el lector que estas ecuaciones son válidas en nuestro sistema de coordenadas inercial y no en un sistema de coordenadas solidario con una de las masas. Si fuese el caso deberían aparecer términos correspondientes con fuerzas inerciales (centrífuga, Coriolis…). Podemos resolver estas ecuaciones, como se verá en la sección sobre la ecuación de Binet, y obtener una expresión para el vector *r(t)*. Sin embargo esto no nos informa todavía sobre la posición de los dos cuerpos en nuestro sistema de coordenadas. Para resolver esto podemos proceder así en nuestro sistema de coordenadas

$$\overline{p}_1 + \overline{p}_2 = 0 = \frac{d}{dt}\left(m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2\right) \Rightarrow m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2 = cte$$

Hemos introducido un sistema de coordenadas inercial mediante la propiedad de que la suma de impulsos mecánicos es nula. Sin embargo esto no determina completamente el sistema de coordenadas y aún tenemos la posibilidad de elegir el origen, la coordenada *(0,0,0)*, del sistema de coordenadas. Según el resultado anterior y el álgebra vectorial elemental siempre podemos elegir un origen que verifique



$$m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 = 0$$

El sistema de coordenadas que hemos definido de esta forma no es mas que el <u>*sistema de coordenadas asociado al centro de masas del sistema de dos cuerpos*</u>. Podemos relacionar inmediatamente el vector *r(t)* relativo y los vectores r_1 y r_2 en este sistema de coordenadas

$$\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 \; ; \; m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 = 0 = m_1\left(\bar{r}_2 - \bar{r}\right) + m_2\bar{r}_2 \Rightarrow$$
$$\bar{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\bar{r} = \frac{\mu}{m_2}\bar{r}; \quad \bar{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\bar{r} = -\frac{\mu}{m_1}\bar{r}$$

En el caso de que uno de los objetos sea de una masa muy superior, $m_1 >> m_2$, entonces es $r_1 \approx 0$ y dicho objeto masivo se mantiene prácticamente en reposo en el origen de nuestro sistema de coordenadas. En este caso el vector relativo *r(t)* coincide prácticamente con la posición del otro objeto (r_2) en nuestro sistema de coordenadas. Esta es la aproximación Newtoniana clásica del movimiento de los planetas alrededor del sol.

Dado que el producto escalar de los vectores r_1 y r_2 por el vector *L* se anula, podemos decir que la trayectoria de las dos masas está en un mismo plano. La figura adjunta representa el movimiento del sistema en ese plano. Los vectores r_1 y r_2 dividen al vector *r* en dos partes proporcionales en todo instante de tiempo y por tanto el centro de masas (*CM*), origen de nuestro sistema de coordenadas, es un punto fijo por el que siempre pasa el vector *r(t)* . Según esto las dos masas se mueven en un plano girando con la misma velocidad angular *ω(t)* respecto del punto fijo representado por el centro de masas CM. Si 1 representa el objeto de mayor masa, vemos que puede sufrir cierta oscilación en su movimiento alrededor del centro de masas. Esta oscilación en la posición de las estrellas puede detectarse y se utiliza para determinar la presencia de planetas asociados. Para soluciones en forma de órbita circular el vector *r(t)* será de módulo constante y el movimiento equivale al de dos masas conectadas por una barra rígida que giran en un plano respecto al centro de masas. Note el lector como hemos definido nuestro sistema de coordenadas a partir del principio de conservación del impulso mecánico y no del momento angular o de la energía. El método seguido es aplicable también al caso de dos masas conectadas por un *muelle sin masa* que siga la ley de Hooke : $F=k(r-r_0)$. Las fuerzas de reacción de las masas sobre el muelle verifican para el centro de masas (cm) del muelle $-F_1-F_2=m_{muelle}a_{cm\text{-}muelle} \rightarrow m_{muelle} \approx 0 \rightarrow F_1=-F_2$, de modo que en esta aproximación con $m_{muelle}=0$ las fuerzas que ejerce el muelle sobre las masas en contacto con su extremos son fuerzas de acción-reacción y la energía potencial del muelle solo varía con $r=r_2-r_1$:

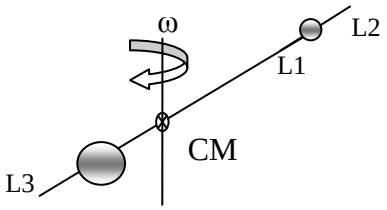
$$\bar{p} = \mu\bar{v} \; ; -k\left(\bar{r} - \bar{r}_0\right) = \frac{d\bar{p}}{dt} = \mu\frac{d^2}{dt^2}\left(\bar{r} - \bar{r}_0\right) ; \; E = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}k\left(\bar{r} - \bar{r}_0\right)^2 ; \; \bar{r}_2 = \frac{\mu}{m_2}\bar{r} \; ; \; \bar{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1}\bar{r}$$

<u>*Puntos de Lagrange*</u>

Imaginemos el sistema gravitatorio formado por la tierra y la luna. Los dos astros siguen una trayectoria aproximadamente circular respecto al centro de masas. La frecuencia angular de este movimiento se calcula fácilmente. Si la masa de la tierra es *M* y la de la luna es *m* la segunda ley de Newton para la luna será

$$\frac{GMm}{r^3}\bar{r} = m\omega^2\frac{\mu}{m}\bar{r} \Rightarrow \omega^2 = G\frac{M+m}{r^3}$$

Introducimos ahora un tercer cuerpo en el sistema de masa despreciable frente a la tierra y la luna. Los puntos de Lagrange corresponden al problema de determinar la posición relativa de este tercer cuerpo de modo que siga un movimiento circular uniforme cuyo centro es el centro de masas y con la misma frecuencia angular ω del sistema de dos cuerpos. De esta forma el sistema de tres cuerpos gira rígidamente respecto a su centro de masas. Una primera solución implica colocar el tercer cuerpo en la línea que une los centros de masa de la tierra y de la luna; tal como indican los puntos *L* en el dibujo. La ecuación de Newton en todos estos casos es la misma



$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{GM}{r_M^3}\bar{r}_M - \dfrac{Gm}{r_m^3}\bar{r}_m = -\omega^2\left(\dfrac{\mu}{m}\bar{r} + \bar{r}_m\right) \\ \bar{r}_M - \bar{r}_m = \bar{r} \end{array}\right\}$$

donde r_M y r_m son radios vectores al punto *L* con origen en el centro de la tierra (*M*) y el centro de la luna (*m*), y *r* es el radio vector al centro de la luna con origen el centro de la tierra. Para cada punto de Lagrange obtenemos el sistema escalar correspondiente en términos de módulos de distancias; por ejemplo para *L1*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{GM}{r_M^2} - \dfrac{Gm}{r_m^2} = \omega^2\left(\dfrac{\mu}{m}r - r_m\right) \\ r_m + r_M = r \end{array}\right\};\ \Rightarrow r_m \approx r\sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

que conduce a una ecuación de 5º orden en r_m con una solución real aproximada como se indica. Este mismo valor resulta ser válido para *L2*. Finalmente podemos plantear puntos de Lagrange que no estén en la línea de unión tierra-luna sino en otro punto del plano orbital formando un triángulo que gira rígidamente con los otros dos puntos. Si la posición del tercer cuerpo es r_3, la posición del centro de la tierra es r_1 y la del centro de la luna es r_2, medidas respecto al centro de masas; La dinámica de giro respecto al centro de masas exige

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{GM}{r_M^3}\bar{r}_M - \dfrac{Gm}{r_m^3}\bar{r}_m = -\omega^2\bar{r}_3 \\ \bar{r}_M = \bar{r}_3 - \bar{r}_1\ ;\ \bar{r}_m = \bar{r}_3 - \bar{r}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow -\left(\frac{M}{r_M^3} + \frac{m}{r_m^3}\right)\bar{r}_3 + \frac{m}{r_m^3}\bar{r}_2 + \frac{M}{r_M^3}\bar{r}_1 = -\frac{\omega^2}{G}\bar{r}_3$$

dado que el vector r_3 y los vectores r_1 ,r_2 son linealmente independientes el resultado anterior exige eliminar las componentes que no dependan de r_3. Esto puede conseguirse fácilmente si r_M=r_m=*R*, ya que el numerador correspondiente es la posición del centro de masas respecto al centro de masas, es decir, se anula. Tenemos por tanto

$$\frac{M+m}{R^3} = \frac{\omega^2}{G} = \frac{M+m}{r^3} \Rightarrow r = R$$

y por tanto el punto de Lagrange buscado están en el vértice de un triángulo equilátero de lado igual a la distancia tierra-luna. Serán dos puntos de Lagrange mas *L4* y *L5*, ya que dado el lado tierra-luna, existen dos triángulos equiláteros posibles sobre el plano orbital. En el sistema Sol-Júpiter los puntos *L4, L5* están ocupados por los denominados *asteroides troyanos* y su observación astronómica evidencia que su movimiento es mas complejo que el del modelo de los puntos de Lagrange. Este movimiento se compone del movimiento circular propio del punto de Lagrange y un movimiento epicíclico alrededor del propio punto de Lagrange. De modo que los asteroides troyanos ocupan una estrecha banda a lo largo de un sector de la trayectoria orbital de Júpiter. Esto es aplicable a todos los puntos de Lagrange.

Podemos ver la posibilidad de subórbitas epicíclicas alrededor de los puntos de Lagrange en el sistema tierra-luna utilizando un sistema de coordenadas asociado al radio vector tierra luna y con origen el centro de masas del sistema. Este sistema de coordenadas gira en el plano orbital con velocidad angular ω y en este sistema un observador percibirá el efecto de las fuerzas centrífugas y de Coriolis además de las gravitatorias. De la propia definición de los puntos de Lagrange *L1,L2,L3* resulta que la fuerza centrífuga y la gravitatoria prácticamente están compensadas para una partícula que se mueva en las proximidades de estos puntos[4]: tomando la ecuación anterior en términos aproximados

$$\frac{GM}{r_M^2} - \frac{Gm}{r_m^2} \approx \omega^2 \left(\frac{\mu}{m} r - r_m \right)$$

En esta aproximación la partícula no necesariamente se mueve en el plano orbital tierra-luna y la fuerza de Coriolis pasa a ser determinante en la trayectoria. Para una trayectoria circular uniforme alrededor del punto de Lagrange podemos aproximar

$$2\omega v \sin(\theta) \approx \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow v \approx 2\rho\omega \sin(\theta)$$

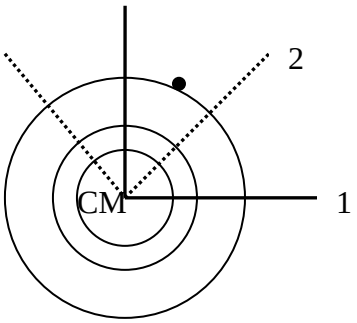
donde v es la velocidad en el sistema de coordenadas no inercial ,ρ es la distancia del objeto orbitante al punto de Lagrange y θ el ángulo entre ω y v. Para una órbita epicíclica paralela al plano orbital tierra-luna $\theta=\pi/2$.

<u>*Ecuación diferencial de Binet y trayectorias orbitales.*</u>

En un sistema de coordenadas cartesiano inercial (x,y) en el plano orbital y con origen en el centro de masas, podemos expresar la conservación de la energía y del momento angular de esta forma:

$$E = \frac{1}{2}\mu \left[\left(\frac{d\Delta x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta y}{dt} \right)^2 \right] - \frac{GMm}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}; \quad \frac{L}{\mu} dt = \Delta x d(\Delta y) - \Delta y d(\Delta x)$$

donde (Δx, Δy) corresponde al vector entre las dos masas en interacción. Al conseguir estas integrales de la 2ª ley de Newton se ha reducido el orden de las derivadas de modo que han desaparecido las diferenciales segundas y solo aparecen diferenciales de primer orden. Esto permite utilizar los términos diferenciales como variables; en concreto podemos eliminar la variable dt para encontrar la ecuación de la trayectoria



$$E = \frac{L^2}{2\mu} \left[\frac{1 + \left(\frac{d\Delta y}{d\Delta x} \right)^2}{\left(\Delta x \left(\frac{d\Delta y}{d\Delta x} \right) - \Delta y \right)^2} \right] - \frac{GMm}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Pese a tener un aspecto complejo, formalmente debemos considerarla una ecuación más sencilla ya que hay una reducción en la información proporcionada: de conocer la posición de la partícula en cada instante de tiempo a conocer solo la trayectoria que sigue. Sin embargo esta

[4]Es una situación similar al caso del movimiento de una pelota en una plataforma que gira que aparece en el trabajo sobre cinemática y dinámica del sólido rígido.

ecuación diferencial resulta todavía complicada y es conveniente ver intuitivamente el origen de esta complicación. Primeramente hay que darse cuenta de que la *intensidad* de la fuerza de Newton de la gravedad no distingue puntos específicos del espacio, sino superficies esféricas alrededor del centro de fuerzas. La ecuación diferencial anterior es válida para el *conjunto de sistemas de referencia* cartesianos planos con origen el centro de masas. El dibujo adjunto representa dos de esos sistemas de referencia: 1 con *ejes coordenados* en línea gruesa y 2 con *ejes coordenados* en línea punteada. Estos sistemas de referencia se diferencian en un giro arbitrario entre sus ejes. El punto negro representa un punto arbitrario. Vemos que las *coordenadas cartesianas (x,y)* de este punto son distintas en el sistema 1 y en el sistema 2. Pero si utilizamos *coordenadas polares* (*R,Φ)* vemos que un punto arbitrario tiene <u>la misma</u> coordenada radial en 1, en 2 y en general en *todos* los sistemas de referencia en que es válida la ecuación diferencial anterior. Intuitivamente esta simetría anuncia una simplificación en la ecuación diferencial si expresamos dicha ecuación en coordenadas polares; además veremos que podemos aprovechar el hecho de la existencia de soluciones circulares para la trayectoria de la forma *dR/dΦ=0*. Si *r* es el segmento ente los dos cuerpos en interacción y *Φ* el ángulo de este segmento con la dirección de referencia:

$$\Delta x = r\cos(\phi);\ \ \Delta y = rsen(\phi)$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right] - \frac{GMm}{r};\quad \frac{1}{dt} = \frac{L}{\mu}\frac{1}{r^2 d\phi} \Rightarrow \quad E = \frac{L^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{GMm}{r}$$

Esta expresión lleva directamente a un proceso de integración que permite obtener la función *Φ(r)* de la trayectoria en coordenadas polares. Sin embargo todavía es posible simplificar la ecuación diferencial anterior haciendo el cambio *u=1/r*

$$\frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi} \rightarrow E = \frac{L^2}{2\mu}\left[\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2\right] - u\,GMm$$

si derivamos la ecuación anterior respecto al ángulo polar estamos de nuevo reduciendo información de la ecuación y por tanto simplificándola. Esta información eliminada en la derivación deberá ser incluida como *condición de contorno* en el proceso de integración:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)\left[\frac{L^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u\right) - GMm\right] = 0$$

La ecuación anterior tiene dos soluciones:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{r} = cte$$

que representa dos trayectorias circulares r_1, r_2 respecto al centro de masas, ya que existen la proporcionalidades $\bar{r}_2 = \frac{\mu}{m_2}\bar{r};\quad \bar{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1}\bar{r}$. Pero dado que la derivada de *u* no es necesariamente nula siempre, obtenemos también la ecuación diferencial de *Binet*

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm\mu}{L^2}$$

que corresponde a una *ecuación armónica* , similar a la oscilación elástica de un muelle, que incluye una solución particular constante y necesita dos constantes de integración asociadas a condiciones de contorno:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{GMm\mu}{L^2} + K\cos(\phi - \phi_0)$$

Los valores *K* y Φ_0 son constantes de integración de la ecuación diferencial de segundo grado. El valor *K* se puede deducir de la ecuación diferencial de la Energía a partir de la cual dedujimos la ecuación de Binet; como hemos dicho incluimos de nuevo esta información como condición de contorno : tomando en la fórmula anterior el valor $\Phi_0=0$ como la dirección del periastro (*p*) o valor mínimo del radio vector r_{min} (y por tanto $\Phi = 0$)

$$E = \frac{L^2}{2\mu p^2} - G\frac{Mm}{p} \Rightarrow \frac{1}{p^2} - 2G\frac{Mm\mu}{L^2}\frac{1}{p} - \frac{2\mu E}{L^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{GMm\mu}{L^2} \pm \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{GMm\mu}{L^2}\right)^2} \Rightarrow$$

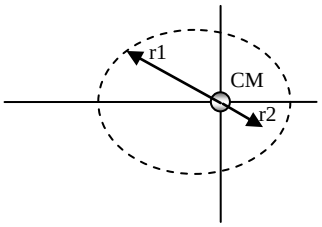
$$K = \pm\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{GMm\mu}{L^2}\right)^2} \rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{GMm\mu}{L^2} \pm \left(\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{GMm\mu}{L^2}\right)^2}\right)\cos(\phi - \phi_0)$$

En el caso de la *elipse* es *E<0* y la distancia mínima en el periastro (*p*) verifica

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{p} = \frac{GMm\mu}{L^2} + \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{GMm\mu}{L^2}\right)^2}$$

que para $\Phi_0 = 0$ corresponde con el caso *K>0* :

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm\mu}{L^2} + \left(\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{GMm\mu}{L^2}\right)^2}\right)\cos(\phi)$$



Introduciendo la excentricidad tenemos

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm\mu}{L^2}\left(1 + \varepsilon\cos(\phi)\right) \Rightarrow r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon\cos(\phi)}; \; r_0 = \frac{L^2}{GMm\mu}$$

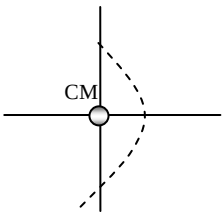
Para el caso en que la raíz cuadrada , o la excentricidad, se anulen, la ecuación representa una trayectoria *circular*:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{GMm\mu}{L^2}; \; E = -\frac{1}{2}\mu\left(\frac{GMm}{L}\right)^2 = -\frac{GMm}{2r_0}$$

Para el caso de la *hipérbola* es *E>0* y la distancia mínima en el periastro (*p*) verifica:

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{p} = \frac{GMm\mu}{L^2} + \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{GMm\mu}{L^2}\right)^2}$$

que para $\Phi_0 = 0$ corresponde con el caso *K>0*:

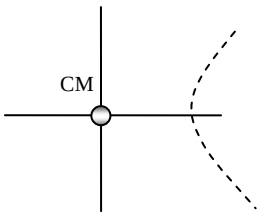


$$\frac{1}{r} = \frac{GMm\mu}{L^2} + \left(\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{GMm\mu}{L^2}\right)^2}\right)\cos(\phi)$$

Para el caso *E=0* la ecuación representa una *parábola.*

La solución hiperbólica con *E>0* y $\frac{1}{p}=\frac{GMm\mu}{L^2}-\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2}+\left(\frac{GMm\mu}{L^2}\right)^2}$ implica una distancia negativa *p<0* ; sin embargo es posible encontrarle sentido físico a este resultado si lo multiplicamos por -1 y consideramos que la interacción es repulsiva en vez de atractiva. Este es el caso de una fuerza central Coulombiana entre <u>cargas del mismo signo</u> cuya trayectoria corresponde a la rama repulsiva de la hipérbola:

$$\frac{1}{r}=\left(\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2}+\left(\frac{Qq\mu}{4\pi\varepsilon L^2}\right)^2}\right)\cos(\phi)-\frac{Qq\mu}{4\pi\varepsilon L^2}$$



Finalmente note el lector el procedimiento empleado. Se parte de la conservación de la energía, que es una ecuación diferencial; y se deduce por derivación la ecuación de Binet. Las soluciones de esta ecuación son conocidas y las constantes de integración pueden deducirse de valores puntuales de la ecuación de la energía que actúa como ahora como *condición de contorno* sobre la ecuación diferencial deducida de ella misma.

<u>*La segunda Ley de Kepler.*</u>

La segunda ley de Kepler establece que el área *S* barrida sobre el plano de la órbita del radio vector que une el planeta y el foco de fuerzas, el centro del sol, aumenta proporcionalmente al tiempo transcurrido; es decir que la derivada *dS/dt* es una constante. El área *dS* está directamente relacionada con el momento angular *L* a través del significado geométrico del producto vectorial de esta forma

$$\bar{L}=\mu\bar{r}\times\bar{v}=\mu\frac{\bar{r}\times d\bar{r}}{dt}=2\mu\frac{d\bar{S}}{dt}\ ;\ d\bar{S}=\bar{r}\times d\bar{r}$$

dado que la dirección y sentido de los vectores *L* y *S* no varían con el tiempo, podemos plantear la relación anterior con módulos

$$\frac{dS}{dt}=\frac{L}{2\mu}$$

que reproduce la 2ª ley de Kepler, ya que *L* y *μ* son constantes.

<u>*La tercera Ley de Kepler.*</u>

Partiendo de la segunda ley de Kepler la constancia de *dS/dt* significa que podemos calcular esta derivada haciendo el cociente entre el área de la elipse que sigue el planeta y su periodo orbital T. El área de la elipse es igual al producto de π por el *semieje mayor (a+p)/2* y por el *semieje menor* √*ap* de la elipse, que expresamos en términos del apoastro y periastro

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{T}\frac{a+p}{2}\sqrt{ap}\\ \frac{L}{2\mu}=\frac{1}{2}\sqrt{2G(M+m)\frac{ap}{a+p}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\pi}{T}\frac{a+p}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2G(M+m)}{a+p}}\Rightarrow\ T^2=\frac{4\pi^2}{G(M+m)}\left(\frac{a+p}{2}\right)^3$$

que es la expresión de la tercera ley de Kepler. Sin embargo podemos llegar al mismo resultado por otra vía. En el caso de órbitas cerradas planetarias, si multiplicamos por

un diferencial de tiempo *dt* la expresión del principio de conservación de la energía *E* e integramos en un periodo orbital *T* tenemos los siguiente resultados

$$\left.\begin{array}{l} ET = \frac{1}{2}\mu\int_0^T v^2 dt - GMm\int_0^T \frac{dt}{r} \\ \frac{d}{dt}\left(\bar{v}\bullet\bar{r}\right) = \frac{d\bar{v}}{dt}\bullet\bar{r} + v^2 \Rightarrow \int_0^T v^2 dt = \bar{v}\bullet\bar{r}\Big|_0^T + \frac{GMm}{\mu}\int_0^T \frac{dt}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow ET = -\frac{GMm}{2}\int_0^T \frac{dt}{r}\ ;\ dt = \frac{\mu r^2}{L}d\theta \Rightarrow$$

$$ET = -\frac{GMm\mu}{2L}\int_0^{2\pi} r d\theta \quad \equiv \quad 2TLE = -GMm\mu\int_0^{2\pi} r d\theta;$$

donde utilizamos la masa reducida μ , desarrollamos una integral por partes para calcular la integral del cuadrado de la velocidad y utilizamos el hecho de que en cada ciclo se repiten las condiciones cinemáticas del planeta. Si sustituimos en este resultado los valores de *L* y *E* para órbitas elípticas y utilizando el resultado de la tercera ley de Kepler que ya hemos calculado el lector puede calcular el valor de la integral; pero aún podemos intentar calcular la integral directamente utilizando la ecuación de la trayectoria elíptica

$$r = \frac{r_0}{1+\varepsilon\cos(\theta)}\ ;\ r_0 = \frac{L^2}{GMm\mu}\ ;\ \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu(GMm)^2}} \Rightarrow \int_0^{2\pi} r d\theta = r_0\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos(\theta)}$$

donde hemos introducido la excentricidad $\varepsilon = (a-p)/(a+p)$ de la elipse. Si desarrollamos en serie (de McLaurin) el integrando tenemos

$$\int_0^{2\pi} r d\theta = r_0\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos(\theta)} \approx r_0\int_0^{2\pi} d\theta\left(1-\varepsilon\cos(\theta)+\varepsilon^2\cos^2(\theta)-\varepsilon^3\cos^3(\theta)+\varepsilon^4\cos^4(\theta).....\right)$$

y en tercera aproximación tenemos

$$\int_0^{2\pi} r d\theta \approx 2\pi r_0\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{3\varepsilon^4}{8}...\right) \Rightarrow ET \approx -\pi L\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{3\varepsilon^4}{8}...\right) \Rightarrow \frac{GMm}{p+a}T \approx \pi\mu\sqrt{2G(M+m)\frac{pa}{p+a}}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{3\varepsilon^4}{8}...\right)$$

Introduciendo un radio medio $r_m = (a+p)/2$ y una amplitud de variación $\delta = (a-p)/2$ de modo que $\delta/r=\varepsilon$:

$$\frac{GMm}{2r_m}T \approx \pi\mu\sqrt{2G(M+m)\frac{r_m^2-\delta^2}{2r_m}}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{3\varepsilon^4}{8}...\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{G(M+m)}}{2r_m}T \approx \pi\sqrt{r_m}\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{3\varepsilon^4}{8}...\right)$$

se puede comprobar que la serie corresponde exactamente a un desarrollo respecto de ε=0 de $1/\sqrt{1-\varepsilon^2}$ de modo que el resultado exacto es

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{G(M+m)}}{2\pi}T = r_m^{3/2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}r_m^3$$

que corresponde a la *tercera ley de Kepler generalizada*, que en la deducción expuesta incluye la masa del cuerpo orbitante o planeta (*m*) como consecuencia de la mecánica de Newton. En el enunciado original de Kepler la constante de proporcionalidad entre T^2 y r^3 era la misma para todos los planetas, lo cual está de acuerdo con nuestro resultado ya que la masa del sol (*M*) es muy superior a la de

cualquier planeta. Este resultado permite también calcular el tiempo de duración de una órbita de transferencia de Hohman T_H como

$$T_H = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\sqrt{G(M+m)}} r_m^{3/2}$$

donde r_m es el radio medio de la órbita de transferencia; utilizando la notación de la imagen y ejemplo hechos antes de esta sección sobre órbitas de transferencia de Hohman será $r_m = (d_M+d_T)/2$.

<u>*Ecuación general de Binet para fuerzas centrales.*</u>

Para el caso de una fuerza central de la forma general $F=-k/r^n$ el cálculo de la energía potencial es inmediato y la conservación del momento angular se mantiene con la misma forma matemática que hemos visto; de modo que es fácil generalizar los resultados anteriores de este modo

$$\overline{F} = -\frac{k}{r^n}\left(\frac{\overline{r}}{r}\right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right] - \frac{1}{n-1}\frac{k}{r^{n-1}}; \quad \frac{L}{\mu}dt = r^2 d\phi \Rightarrow E = \frac{L^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{1}{n-1}\frac{k}{r^{n-1}}$$

$$u = 1/r \Rightarrow \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi} \rightarrow E = \frac{L^2}{2\mu}\left[\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2\right] - \frac{k}{n-1}u^{n-1}$$

y derivando el resultado respecto al ángulo polar tenemos

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)\left[\frac{L^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u\right) - ku^{n-2}\right] = 0$$

de modo que podemos poner la ecuación general de Binet para fuerzas centrales así

$$\left.\begin{array}{l} \overline{F} = F(r)\left(\frac{\overline{r}}{r}\right) = -\frac{k}{r^n}\left(\frac{\overline{r}}{r}\right) \\ u = 1/r \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{L^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u\right) - ku^{n-2} = 0 \equiv F(u) = -\frac{L^2}{\mu}u^2\left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u\right);$$

<u>*El vector de Runge y la precesión del perihelio de Mercurio.*</u>

La ley de Newton de la gravedad universal aplicada al sistema solar dió una explicación precisa, según las capacidades de medida de los siglos XVIII y XIX, del movimiento de planetas y cometas en base al modelo de interacción entre dos cuerpos: el sol y cada uno de los planetas. Sin embargo la ley de gravedad universal implica que también deben existir fuerzas, mayores o menores, de cada planeta con el resto. La existencia de estas fuerzas se podría observar en trayectorias de los planetas apartadas de la elipse. Tal vez el caso más impresionante de este hecho fue la predicción (*Le Verrier*) de la existencia del planeta Neptuno en base a las perturbaciones observadas en la trayectoria del planeta Urano. Otro hecho experimental relevante relacionado con esto es la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio. La órbita de este planeta es una elipse, pero el eje mayor de esta elipse, con un foco fijo en el sol, gira muy lentamente (574 segundos de arco por siglo) en el propio plano de la órbita. Este giro se denomina precesión del perihelio. El cálculo de esta precesión la realizó *Le Verrier* mediante un complejo sistema de aproximaciones sucesivas y empleando el cálculo numérico para el efecto de cada planeta sobre la órbita de Mercurio. Actualmente este tipo de cálculos son propios de las computadoras

programables. Junto con trabajos previos de *Laplace*, también fue capaz de demostrar que, salvo cuerpos de masa relativamente pequeña, la existencia de *Júpiter*, *Saturno* y *Urano* hacían del sistema solar un sistema fundamentalmente estable.

En la aproximación Newtoniana de un sistema inercial de coordenadas con origen el sol partimos de un vector que es, para un planeta dado, el producto vectorial del impulso mecánico *p* por el momento angular orbital *L*. Nos interesa la variación de este vector con el tiempo

$$\overline{B} = \overline{p} \times \overline{L}; \quad \frac{d\overline{B}}{dt} = \frac{d\overline{p}}{dt} \times \overline{L} + \overline{p} \times \frac{d\overline{L}}{dt}$$

la variación de la cantidad de movimiento del planeta (de masa *m*) se debe a la fuerza de gravedad Newtoniana del sol (de masa *M*) y una *componente perturbativa* que llamaremos *f.* La variación del momento angular orbital del planeta (*L*) se debe solo a *f*

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = -\frac{GMm}{r^3}\overline{r} + \overline{f}; \quad \frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{r} \times \overline{f}; \quad \overline{L} = \overline{r} \times \overline{p}$$

a continuación analizamos el primer término del vector *dB/dt* introducido al principio

$$\frac{d\overline{p}}{dt} \times \overline{L} = \left(-\frac{GMm}{r^3}\overline{r} + \overline{f}\right) \times \left(\overline{r} \times \overline{p}\right) = -\frac{GMm}{r^3}\overline{r} \times \left(\overline{r} \times \overline{p}\right) + \overline{f} \times \overline{L}$$

para el primer término dependiente de la gravedad solar del resultado anterior y teniendo en cuenta la relación vectorial ***p****=mdr/dt* , el vector unitario u_r y las propiedades del triple producto vectorial tenemos

$$-\frac{GMm}{r^3}\overline{r} \times \left(\overline{r} \times \overline{p}\right) = -\frac{GMm^2}{r^3}\overline{r} \times \left(\overline{r} \times \frac{d\overline{r}}{dt}\right); \; \overline{r} = r\overline{u_r} \Rightarrow$$

$$-\frac{GMm}{r^3}\overline{r} \times \left(\overline{r} \times \overline{p}\right) = -\frac{GMm^2}{r}\overline{u_r} \times \left(\overline{u_r} \times \frac{d(r\overline{u_r})}{dt}\right) = -\frac{GMm^2}{r}\overline{u_r} \times \left(\overline{u_r} \times \left(\overline{u_r}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\overline{u_r}}{dt}\right)\right) =$$

$$-GMm^2\overline{u_r} \times \left(\overline{u_r} \times \frac{d\overline{u_r}}{dt}\right) = -GMm^2\left[\overline{u_r}\left(\overline{u_r} \bullet \frac{d\overline{u_r}}{dt}\right) - \frac{d\overline{u_r}}{dt}\left(\overline{u_r} \bullet \overline{u_r}\right)\right] = GMm^2\frac{d\overline{u_r}}{dt}$$

donde se ha utilizado la regla del triple producto vectorial. Sustituyendo los resultados obtenidos en la ecuación inicial tenemos

$$\frac{d}{dt}\left[\overline{p} \times \overline{L} - GMm^2\overline{u_r}\right] = \overline{f} \times \overline{L} + \overline{p} \times \left(\overline{r} \times \overline{f}\right)$$

se define el *vector de Runge R* como

$$\overline{R} = \overline{p} \times \overline{L} - GMm^2\overline{u_r} \Rightarrow \frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{f} \times \overline{L} + \overline{p} \times \left(\overline{r} \times \overline{f}\right)$$

Caso de perturbaciones despreciables

En el caso de tomar *f=0* tenemos que el vector de Runge es una *constante* del movimiento que no varía con el tiempo. Podemos visualizar el valor de R en el perihelio del planeta y ver que la dirección de este vector es paralela al eje mayor de la elipse. Más aún, podemos encontrar fácilmente la ecuación de la trayectoria multiplicando escalarmente el vector de Runge por el radio vector *r* desde el foco solar

$$\bar{r} \bullet \bar{R} = Rr\cos(\phi) = \bar{r} \bullet \left(\bar{p} \times \bar{L}\right) - GMm^2 \bar{r} \bullet \overline{u_r} = \bar{L} \bullet \left(\bar{r} \times \bar{p}\right) - GMm^2 r = L^2 - GMm^2 r \Rightarrow$$
$$\frac{L^2}{r} = R\cos(\phi) + GMm^2$$

comparando esto con resultados anteriores, tenemos que la dirección del vector de Runge es la del eje mayor y el sentido es desde el foco solar al perihelio del planeta.

Caso de término polar no despreciable

La forma del sol no es una esfera perfecta, sino mas ancha en el ecuador; de modo que a la ley de newton hay que añadirle una componente dipolar adicional que hará las veces de componente perturbativa *f*. En este caso *f* provoca un cambio en la dirección y el sentido del vector de Runge. Si el valor de *f* es lo bastante pequeño podemos ver el proceso como un giro del eje mayor de una trayectoria orbital esencialmente elíptica del planeta. El término polar para una órbita en un plano ecuatorial respecto al sol será una función de la forma $f(r)u_r$; donde u_r es el vector unitario en la dirección del centro solar hasta el centro del planeta. Con esto tenemos

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = f(r)\overline{u_r} \times \bar{L} + \bar{p} \times \left(\bar{r} \times \bar{f}(r)\overline{u_r}\right) = f(r)\overline{u_r} \times \bar{L}$$

a partir de aquí, si suponemos que el proceso se aproxima a un cambio de dirección o precesión del vector de Runge y no de su módulo, la precesión ω debe cumplir

$$f(r)\overline{u_r} \times \bar{L} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{R}$$

el vector ω debe ser perpendicular al plano de la órbita de Mercurio; por otra parte, si multiplicamos la expresión anterior por *R*, vector que está en el plano de la órbita, tenemos

$$\bar{R} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{R}\right) = \bar{R} \times \left(f(r)\overline{u_r} \times \bar{L}\right) \Rightarrow \bar{\omega}R^2 = -f(r)R\cos(\phi)\bar{L} \Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{f(r)}{R}\cos(\phi)\bar{L}$$

donde el ángulo es entre el radio vector y el vector de Runge, y por tanto en un ciclo es aproximadamente igual al ángulo entre el radio vector y el eje mayor de la elipse. Note el lector que, según el signo del coseno, el valor de ω cambia de sentido. Para obtener un resultado práctico debemos hacer el promedio de la expresión anterior en una órbita de mercurio, cuyo periodo llamamos T, factorizando términos constantes tenemos

$$\left\langle \bar{\omega} \right\rangle = -\frac{\bar{L}}{R}\left\langle f(r)\cos(\phi) \right\rangle = -\frac{\bar{L}}{R}\frac{1}{T}\int_0^T f(r)\cos(\phi)dt = -\frac{\bar{L}}{R}\frac{1}{T}\int_0^T f(r)\cos(\phi)\frac{dt}{d\phi}d\phi$$

del módulo del momento angular tenemos

$$L = mr^2\frac{d\phi}{dt}$$

lo que nos lleva a

$$\left\langle \bar{\omega} \right\rangle = -\frac{\bar{L}}{R}\frac{m}{TL}\int_0^{2\pi} r^2 f(r)\cos(\phi)d\phi$$

para una órbita elíptica de pequeña excentricidad ε, próxima a una órbita circular de radio r_0, podemos tomar estas aproximaciones

$$r \approx r_0(1-\varepsilon\cos(\phi));\ \varepsilon << 1$$
$$f(r) \approx f(r_0) - \varepsilon r_0 \cos(\phi) f'(r_0)$$

lo que nos lleva a

$$\langle \overline{\omega} \rangle = -\frac{\overline{L}}{R}\frac{m r_0^{\ 2}}{TL}\int_0^{2\pi}(1-2\varepsilon\cos(\phi)+\varepsilon^2\cos^2(\phi))\big(f(r_0)-\varepsilon r_0\cos(\phi)f'(r_0)\big)\cos(\phi)d\phi$$

al expandir la expresión anterior, dado que todos los términos cuentan al menos con un factor coseno, vemos que solo aportan al promedio los términos con coseno al cuadrado

$$\langle \overline{\omega} \rangle = \frac{\overline{L}}{R}\frac{m r_0^{\ 2}\varepsilon}{TL}\int_0^{2\pi}(2\cos^2(\phi)f(r_0)+r_0\cos^2(\phi)f'(r_0)+\varepsilon^2 r_0\cos^4(\phi)f'(r_0))d\phi$$

prescindiendo del término en épsilon al cuadrado dentro de la integral tenemos un promedio para la precesión de la órbita de

$$\langle \omega \rangle = \frac{m r_0^{\ 2}\varepsilon}{RT}(f(r_0)+\frac{1}{2}r_0 f'(r_0))$$

Caso de influencia del resto de los planetas

En este caso la componente perturbativa es la suma de las fuerzas newtonianas debidas al resto de los planetas. Enumerando el resto de los planetas con el subíndice *i* y utilizando los desarrollos previos tenemos

$$\overline{\omega} = \frac{1}{R^2}\left[\overline{R}\times\left(\sum \overline{f_i}\times\overline{L}\right)+\overline{R}\times\left[\overline{p}\times\left(\overline{r}\times\sum\overline{f_i}\right)\right]\right] = \frac{1}{R^2}\sum\overline{R}\times\left(\overline{f_i}\times\overline{L}\right)+\overline{R}\times\left[\overline{p}\times\left(\overline{r}\times\overline{f_i}\right)\right] = \sum\overline{\omega_i}$$
$$\overline{\omega_i} = \frac{1}{R^2}\left[\overline{R}\times\left(\overline{f_i}\times\overline{L}\right)+\overline{R}\times\left[\overline{p}\times\left(\overline{r}\times\overline{f_i}\right)\right]\right]$$

y por tanto podemos estudiar la influencia de cada planeta por separado y sumar las contribuciones de cada uno a la precesión de la órbita de Mercurio. Realizar este cálculo con métodos numéricos requiere utilizar un sistema de coordenadas para el sistema solar en el que se conozcan las posiciones de los planetas en ciertos instantes de tiempo discretos.

Vector de Runge en el sistema de coordenadas del centro de masas

Utilizando lo desarrollado en la sección correspondiente tenemos en el sistema de coordenadas centro de masas las siguiente relaciones para el vector de Runge

$$\overline{r} = \overline{r_m} - \overline{r_M}\ ;\quad \overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}\ ;\quad \mu = \frac{Mm}{M+m}$$
$$\overline{p} = \mu\overline{v};\quad \frac{d\overline{p}}{dt} = -\frac{GMm}{r^3}\overline{r}+\overline{f};\quad \overline{L} = \overline{r}\times\overline{p};\quad \frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{r}\times\overline{f}$$

$$\overline{R} = \overline{p}\times\overline{L} - GMm\mu\overline{u_r}\ ;\quad \frac{d\overline{R}}{dt} = \overline{f}\times\overline{L}+\overline{p}\times\left(\overline{r}\times\overline{f}\right)$$

Desarrollo en serie multipolar del potencial clásico.

El desarrollo del modelo Copernicano llega a la necesidad de considerar a la tierra con forma de elipsoide no completamente esférico. Esto supone modificar la Ley de Newton de la gravedad entre masas puntuales o perfectamente esféricas y homogeneas. El desarrollo multipolar es una forma de aproximarnos a esta situación.

Suponemos una distribución de cargas o masas puntuales q_n acotada en un volumen. Colocamos nuestro sistema de coordenadas mas o menos en el centro de dicho volumen. Designamos el vector numerador de una carga o masa *n* como R_n y el punto de observación del campo como *r*. Para una carga o masa determinada R_n su potencial asociado en el punto de observación *r* varía según una función inversa de la distancia entre la carga/masa y el punto de observación. Esta función tiene la característica de que si el punto de observación del campo se aleja suficientemente podemos tomar los valores R_n formalmente como pequeñas variaciones δr del punto de observación *r*; de modo que podemos plantear el siguiente desarrollo en serie de Taylor respecto al punto *r* de observación del campo

$$\left|\bar{r}-\bar{R}^n\right|^{-1}=\left|\bar{r}+\delta\bar{r}\right|^{-1}=r^{-1}-\sum_i X_n^i\left.\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_i}\right|_r+\frac{1}{2}\sum_{i,j}X_n^iX_n^j\left.\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial(x_i,x_j)}\right|_r+\ldots\ldots$$

$$\delta\bar{r}=-\bar{R}_n=-(X_n^1,X_n^2,X_n^3)\ ;\ i,j=1,2,3$$

el potencial neto en el punto de observación *V(r)* será la suma de la contribución de todas las cargas/masas

$$4\pi\varepsilon_0V(\bar{r})=\sum_n\frac{q_n}{\left|\bar{r}-\bar{R}_n\right|}=\frac{1}{r}\sum_n q_n-\sum_i\left(\sum_n q_nX_n^i\right)\left.\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_i}\right|_r+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\sum_n q_nX_n^iX_n^j\right)\left.\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial(x_i,x_j)}\right|_r+\ldots.$$

donde podemos asociar los términos dependientes del índice *n* debido a que las derivadas se toman respecto del punto de observación *r*, que es el mismo para todas las cargas de la distribución. El Laplaciano nulo de la función *1/r* en el punto de observación puede utilizarse para introducir modificaciones en la segunda aproximación utilizando el tensor elemental δ_{ij}; pero sin modificar su valor numérico

$$\left.\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x_1^2}\right|_r+\left.\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x_2^2}\right|_r+\left.\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x_3^2}\right|_r=0\Rightarrow q_nR_n^2\sum_{i,j}\delta_{ij}\left.\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial(x_i,x_j)}\right|_r=0\Rightarrow$$

$$4\pi\varepsilon_0V(\bar{r})=\frac{M}{r}-\bar{P}\bullet\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{6}\sum_{i,j}\left(\sum_n q_n\left\{3X_n^iX_n^j-R_n^2\delta_{ij}\right\}\right)\left.\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial(x_i,x_j)}\right|_r+\ldots\quad(1)$$

$$M=\sum_n q_n\ ;\bar{P}=\sum_n q_n\left(X_n^1,X_n^2,X_n^3\right)$$

veremos el significado de esta modificación planteando el desarrollo multipolar partiendo ahora de los polinomios de Legendre [11]

$$\left|\bar{r}-\bar{R}_n\right|^{-1}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\theta_n)\left(\frac{R_n}{r}\right)^l\Rightarrow$$

$$4\pi\varepsilon_0V(\bar{r})=\sum_n\frac{q_n}{\left|\bar{r}-\bar{R}_n\right|}=\frac{1}{r}\sum_n q_n+\frac{1}{r^2}\left(\sum_n q_nR_n\cos(\theta_n)\right)+\frac{1}{r^3}\sum_n q_nR_n^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2(\theta_n)-1\right)+\ldots(2)$$

Este planteamiento es mas riguroso en el sentido de que aparece explícitamente las relaciones R_n/r (<< 1). Podemos demostrar que esta expresión (2) es equivalente a la (1). Los términos mas complicados son los de 2º orden en (1) y (2).Simplificando para una partícula ($R_n \equiv R$) y partiendo del término correspondiente de (2) tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{\bar{r} \bullet \bar{R}}{rR} \\ Q = \dfrac{1}{2r^3} R^2 \left(3\cos^2(\theta) - 1\right) \\ \bar{u} = \dfrac{\bar{r}}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow Q = \frac{1}{2r^3}\left(3\left(\bar{u} \bullet \bar{R}\right)^2 - R^2\right); \quad u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \Rightarrow 2r^3 Q = \begin{cases} 3\left(u_1^2 R_1^2 + u_2^2 R_2^2 + u_3^2 R_3^2\right) - R^2\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right) \\ + 3u_1 u_2 R_1 R_2 + 3u_2 u_1 R_2 R_1 \\ + 3u_1 u_3 R_1 R_3 + 3u_3 u_1 R_3 R_1 \\ + 3u_2 u_3 R_2 R_3 + 3u_3 u_2 R_3 R_2 \end{cases}$$

el resultado anterior es una suma de productos de componentes que puede ponerse como *forma cuadrática* utilizando el tensor elemental δ_{ij} de esta forma

$$2r^3 Q = \sum_{i,j} Q_{ij} u_i u_j \Rightarrow Q_{ij} = 3R_i R_j - R^2 \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2r^3} \sum_{i,j} \left(3R_i R_j - R^2 \delta_{ij}\right) u_i u_j$$

donde Q_{ij} son los componentes del tensor simétrico asociado a la forma cuadrática. Por otro lado, si calculamos las derivadas parciales de *1/r* y sustituimos su valor en (1) tenemos

$$\left.\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial\left(x_i, x_j\right)}\right|_r = 3\frac{u_i u_j}{r^3} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}\,;\ (R_i \equiv X^i) \rightarrow$$

$$\frac{1}{6}\sum_{i,j}\left(3X^i X^j - R^2\delta_{ij}\right)\left(3\frac{u_i u_j}{r^3} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}\right) = \frac{1}{2r^3}\sum_{i,j}\left(3X^i X^j - R^2\delta_{ij}\right)u_i u_j - \frac{1}{6r^3}\sum_{i,j}\left(3X^i X^j - R^2\delta_{ij}\right)\delta_{ij}$$

$$\sum_{i,j}\left(3X^i X^j - R^2\delta_{ij}\right)\delta_{ij} = \sum_i 3\left(X^i\right)^2 - R^2 = 3R^2 - 3R^2 = 0 \ \ (traza\ nula) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6}\sum_{i,j}\left(3X^i X^j - R^2\delta_{ij}\right)\left.\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial\left(x_i, x_j\right)}\right|_r = Q = \frac{1}{2r^3}\sum_{i,j}\left(3R_i R_j - R^2\delta_{ij}\right)u_i u_j$$

La consecuencia principal del análisis multipolar es que el campo de una distribución cuya carga neta sea cero (*M=0*), no supone un campo nulo a largas distancias. Esto es relevante en física atómica en relación a las fuerzas de Van der Waals. Las moléculas de los gases no tienen una carga neta, pero existen interacciones entre ellas que, como hemos visto, son de origen electromagnético. El lector debe notar la similitud entre el tensor Q_{ij} y el tensor de inercia I_{ij} de un sólido rígido (ver trabajo sobre sólido rígido). En los dos casos se trata de magnitudes que dependen de la distribución de materia. Los tensores Q_{ij} ,I_{ij} dependen en general del sistema de coordenadas utilizado y del origen escogido, de la misma forma que el momento dipolar (*P*); pero evidentemente esta elección no debe afectar el potencial neto en el punto de observación *V(r)*. Además en el caso de Q_{ij} y *P* la existencia de cargas eléctricas positivas y negativas permite que en algunos casos *P* o Q_{ij} si sean independientes del sistema de coordenadas; lo cual tiene *relevancia física*. Esto no es posible en el caso del campo gravitatorio, donde no hay “cargas gravitatorias” (masas) negativas. Para el caso de un sistema de dos cargas iguales y opuestas , el momento dipolar es el producto del módulo de una de las cargas por un vector con origen la carga negativa y final en la carga positiva. Dado que los átomos se componen de distribuciones de cargas iguales y opuestas neutras en conjunto, el comportamiento dipolar aparece en la materia que conocemos; y el carácter independiente del sistema de coordenadas hace que se puedan manejar los dipolos moleculares como fuentes del campo eléctrico. Si tenemos dos de estos dipolos iguales y opuestos, debido a su

carácter vectorial el dipolo total sumará cero; pero el lector puede comprobar que el término cuadrupolar no es nulo y, si se consideran las cargas del cuadrupolo en los vértices de un cuadrado, las componentes cuadrupolares son también independientes del sistema de coordenadas.

Dado que ambos Q_{ij} ,I_{ij} son tensores simétricos podemos encontrar un sistema de coordenadas que diagonalice las componentes del tensor de modo que sea Q_{ij}=0 para $i \neq j$. Además , de su definición, *la traza de* Q_{ij} *es siempre nula* : $Q_{xx}+Q_{yy}+Q_{zz}=0$, *en cualquier sistema de coordenadas*. Las simetrías de la distribución de materia pueden aprovecharse para encontrar simplificaciones mediante la elección adecuada del sistema de coordenadas, por ejemplo si la distribución de carga (toda del mismo signo) corresponde a un elipsoide de revolución y tomamos como eje *Z* el eje de revolución tendremos $Q_{xx}=Q_{yy}=Q_{\perp}$; $2Q_{\perp}+Q_{zz}=0$ y el momento cuadrupolar tendrá solo una componente independiente. Esto también es cierto para el potencial gravitatorio de la tierra aproximada como un elipsoide de revolución.

Cada término de la expansión multipolar es una solución de la ecuación de Laplace en zonas alejadas de las masas/cargas. Utilizando el álgebra del operador gradiente desarrollado en el trabajo sobre mecánica de fluidos y para los dos primeros términos de la expansión tenemos

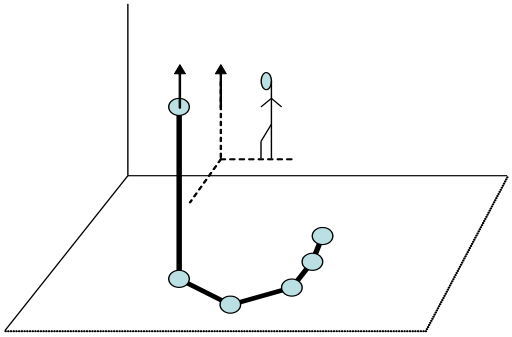
$$4\pi\varepsilon V(r) = \frac{M}{r} + \overline{P} \bullet \nabla \frac{1}{r} ....;\ M, \overline{P}\ constantes, \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla^2 \dfrac{M}{r} = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \nabla\left(\overline{P} \bullet \nabla \dfrac{1}{r}\right) = \overline{P} \times \left(\nabla \times \nabla \dfrac{1}{r}\right) + \left(\overline{P} \bullet \nabla\right)\nabla \dfrac{1}{r} = \left(\overline{P} \bullet \nabla\right)\nabla \dfrac{1}{r} \\ \nabla \times \left(\overline{P} \times \nabla \dfrac{1}{r}\right) = -\left(\overline{P} \bullet \nabla\right)\nabla \dfrac{1}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2\left(\overline{P} \bullet \nabla \dfrac{1}{r}\right) = \nabla \bullet \left[\nabla\left(\overline{P} \bullet \nabla \dfrac{1}{r}\right)\right] = -\nabla \bullet \left[\nabla \times \left(\overline{P} \times \nabla \dfrac{1}{r}\right)\right] = 0 \end{array}\right\}$$

Finalmente hay que recalcar que el análisis multipolar en base a la serie de Taylor solo tiene sentido para funciones similares a *1/r* : funciones decrecientes en módulo y con derivadas decrecientes en módulo; y con estas condiciones el análisis multipolar se utiliza con una variedad de funciones en ramas muy distintas de la física y las matemáticas. Sería un error hacer lo mismo para la función *cos(k(r-R)),* por mucho que sea *r >>R*.

<u>*Problema de la bola y la cadena. Gravedad y segunda ley de Newton para partículas de masa variable.*</u>

Una bola de masa m_0 *está unida a una cadena con densidad lineal de masa* ρ. *Se lanza lo bola hacia arriba con velocidad inicial* v_0. *Calcular la altura máxima a que llega la bola.*



Podemos introducirnos en este problema por medio de una aproximación: tomamos el sistema como un conjunto de masas puntuales unidas por cuerdas “sin masa”. Inicialmente se lanza la primera masa que alcanzará cierta velocidad en el instante anterior a que la siguiente masa en el suelo es sometida a un tirón hacia arriba. Este proceso supone un intercambio de impulso entre las dos masas afectadas. Podemos suponer que el intercambio de impulso debido

a este tirón es prácticamente instantáneo, es decir, ocupa un tiempo que se puede considerar tan pequeño como se quiera; lo cual está de acuerdo con la aproximación de cuerda sin masa, ya que una cuerda sin masa y longitud constante "permite" propagación de fuerzas a velocidad infinita. Podemos hablar por tanto del "instante del tirón". Un *observador en caída(ascensión) libre* en el campo gravitatorio y que en el instante del tirón se mueve con la misma velocidad que la masa en cabeza (imagen), percibe la interacción ente las dos masas compensada en cuanto al efecto de la gravedad. Esto corresponde al *principio de equivalencia* introducido por la teoría general de la relatividad y según este principio nuestro observador libre es *inercial* y solamente observará el efecto de choque asociado al tirón. Podemos suponer que existe conservación del impulso mecánico y que la velocidad imprimida a la segunda masa es la misma que la velocidad que adquiere la masa en cabeza. Apelando a nuestra intuición del movimiento podemos "ver" que la parte de la cadena en movimiento se mueve con la misma velocidad que la masa en cabeza (v'_1), ya que no hay razón para que los eslabones en movimiento se acumulen. Con estas condiciones, la conservación del impulso mecánico para el *observador libre instantáneamente inercial* se plantea así

$$m_1 v'_1 + m_2 (v'_1 - v') = 0 \rightarrow v'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v'$$

Vemos que la velocidad final después del tirón puede ser un valor no infinitesimal. Si tomamos dos masas iguales tenemos que, para el observador libre la masa en cabeza experimentaría un cambio instantáneo de velocidad de valor $v'/2$; lo cual supone una aceleración infinita. Para aplicar el análisis matemático elemental debemos buscar una situación en que el valor v'_1 pueda ser tan pequeño como queramos (dv'). Esto se consigue haciendo que la segunda masa tenga también un valor *dm* tan pequeño como se quiera; además podemos hacer que este valor converja uniformemente con la longitud de la cuerda $\rho = dm/dl$. Si definimos *m* como la masa total en movimiento (cadena+bola) en un instante determinado, entonces *dm* representa la masa que es elevada en ese instante. Con estas condiciones la ecuación anterior queda, despreciando infinitésimos de 2º orden, así

$$mdv' + dm(dv' - v') \equiv mdv' - v'dm = 0$$

expresando esta ecuación para el observador en tierra tenemos, para el caso continuo con una masa en vanguardia de valor m_0

$$(m_0 + \rho h)(\frac{dv}{dt} - g) + v\rho \frac{dh}{dt} \equiv (m_0 + \rho h)\left(\frac{dv}{dt} - g\right) + \rho(v)^2 = 0$$

donde *h* es la altura respecto del suelo que toma la columna vertical formada por la masa m_0 y la cadena y g = -9.8 m/s^2 es la aceleración de la gravedad. Haciendo el cambio de variable $x = m_0 + \rho h$, podemos asumir las dependencias funcionales $t(x)$ y $v(x)$; con lo que el operador derivada temporal se transforma así $dv(x)/dt = (dv(x)/dx) * \rho * v(x)$ *(regla de la cadena de derivadas con* $v(x)=dh/dt$*) y* tenemos una ecuación fácilmente resoluble

$$\rho x v(x) \frac{d}{dx}\left(xv(x)\right) = x^2 g$$

Note el lector este detalle: hemos pasado de una primera ecuación diferencial en la variable tiempo a una segunda ecuación diferencial dependiente esencialmente de la *trayectoria*. Esto supone que *la segunda ecuación resume o reduce información respecto de la primera*; ya que perdemos, intencionadamente, la información del

estado del sistema en un instante *t* determinado. Esta reducción de información debería simplificar la ecuación diferencial, como es el caso.

El lector puede comprobar que existirá disipación de energía en el proceso : la altura máxima alcanzada por el centro de masas no equivale a la energía cinética inicial. En la máxima altura *v=0* y por tanto *dv/dt=g*: la caída desde altura máxima es una caída libre. La ecuación diferencial que hemos manejado se puede transformar así

$$(m_0+\rho h)(\frac{dv}{dt}-g)+v\rho\frac{dh}{dt}=0 \Rightarrow m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}=mg;\ m=(m_0+\rho h)\Rightarrow$$
$$\frac{d}{dt}(mv)=mg$$

El lado izquierdo es la derivada del impulso mecánico total de la cadena, ya que la masa de la cadena que queda en el suelo tiene velocidad cero y no aporta nada. El lado derecho es la *fuerza total externa* sobre la cadena, ya que el peso de la masa de la cadena en el suelo se compensa con la fuerza de contacto normal con el suelo. Por tanto vemos que la ecuación diferencial está de acuerdo con la 2ª ley de Newton; pero aún hay un problema con la ecuación anterior; tal como está no cumple con el *principio de relatividad*.

El resultado anterior no es aplicable directamente para otro observador inercial en movimiento relativo uniforme; como sería de esperar para una ley física. Del lado derecho de la igualdad tenemos la fuerza de gravedad que si es invariante entre sistemas inerciales, pero el lado izquierdo tiene un término *vdm/dt* que cambia de valor según el sistema inercial considerado debido a la forma en que aparece la velocidad *v*. La forma correcta de la 2ª ley de Newton incluyendo variaciones de masa es, en términos vectoriales

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v})-\bar{v}_0\frac{dm}{dt}=m\frac{d\bar{v}}{dt}+(\bar{v}-\bar{v}_0)\frac{dm}{dt}=m\bar{g}$$

donde v_0 es la velocidad inicial del elemento de masa *dm* que es elevado en el instante *dt* y v-v_0 es el cambio de velocidad de dicho elemento de masa. En nuestro caso resultó ser v_0=0 en nuestro sistema de coordenadas. La aparición de la diferencia de velocidades hace que la ley anterior sea invariante entre observadores inerciales.

En esta forma, la ley es aplicable directamente al problema del movimiento de un cohete espacial de masa *m* con *dm/dt<0* y v_0-*v=c* corresponde a la velocidad relativa al propio cohete de los gases expulsados; velocidad relativa que se supone constante. Considerando un movimiento vertical del cohete que para *t=0* parte con *v=0* tenemos

$$m\frac{dv}{dt}-c\frac{dm}{dt}=mg \Rightarrow \frac{dv}{dt}-c\frac{d}{dt}\ln(m)=g \Rightarrow v=\int gdt+c\ln\frac{m}{m_0}$$

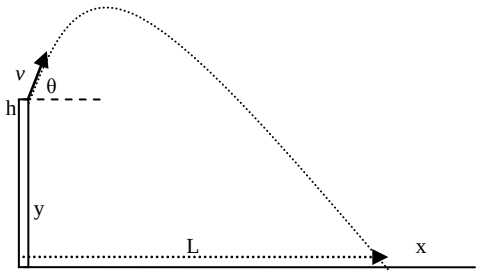
con *g* y *c* valores negativos por ser vectores apuntando hacia el suelo. Vemos que para que el cohete se eleve debe ser *v>0*, lo cual solo es posible con una gran gasto de masa expulsada a una gran velocidad *c*. Los cohetes deben alcanzar la órbita correspondiente en un tiempo relativamente breve (< 10 minutos). Por otra parte la trayectoria no es realmente vertical, como ya se comentó en la sección de aplicaciones prácticas.

De este modo la 2ª Ley de Newton se generaliza así en el caso de un sistema de coordenadas no inercial (ver trabajo sobre sólido rígido):

$$m\bar{a}_A = \left(\sum_i \overline{F_i}\right) - \Delta\bar{v}\Big|_I \frac{dm}{dt} - m\bar{a}_{DI}(t) - m\bar{\alpha}\times\bar{r} - m\bar{w}\times\left(\bar{w}\times\bar{r}\right) - 2m\bar{w}\times\bar{v}_A$$

donde Δv_I es el cambio de velocidad del elemento *dm* en el sistema inercial en reposo instantáneo con la partícula de masa *m.*

<u>*Alcance máximo de proyectiles lanzados desde una altura h*</u>



El dibujo muestra el lanzamiento de un proyectil desde una altura *h* con una velocidad inicial *v* formando un ángulo *θ* con el eje *x horizontal.* Para cada ángulo de disparo tenemos asociada un alcance *[x=L(θ),y=0]* y queremos saber cual es el ángulo que produce un mayor alcance para una velocidad inicial dada. Se presentan las ecuaciones cinemáticas en los ejes x-y; y el resultado de eliminar el tiempo en la ecuación y:

$$\left.\begin{array}{l} x: L(\theta) = v\cos(\theta)t(\theta) \\ y: 0 = h + v\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = h\cos^2(\theta) + L\sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{g}{2v^2}L^2 \quad (EqL(\theta))$$

el máximo alcance supone *dL/dθ=0*, con lo que derivando el resultado anterior nombrado *EqL(θ)* tenemos una relación que debe cumplirse para *L* máximo:

$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \Rightarrow 0 = -2h\sin(\theta)\cos(\theta) + L\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) \Rightarrow L = h\tan(2\theta)$$

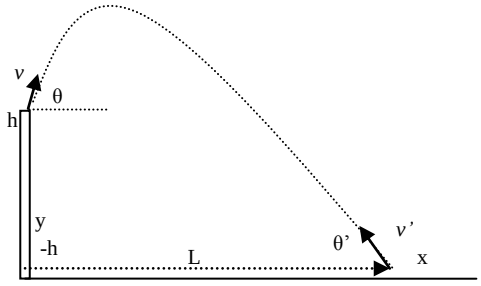
Si es *h=0* y según este resultado, la única posibilidad para que *L* tenga un valor mayor que 0 es que la expresión *h*tan(2θ)* sea una indeterminación del tipo 0*∞; lo que corresponde a *θ=45º.* Sustituyendo este resultado en *EqL(θ)* y dividiendo todo por *h*tan(2θ)* ,dado que es un valor no nulo tenemos

$$\left[\frac{\cos^2(\theta)}{\tan(2\theta)} + \sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{g}{2v^2}h\tan(2\theta)\right]h\tan(2\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1+\cos(2\theta)}{\tan(2\theta)} + \cos(2\theta)\tan(2\theta) - \frac{g}{v^2}h\tan(2\theta) = 0$$

podemos poner todo en función de *tan(2θ)* llegando a

$$\pm\sqrt{1+\tan^2(2\theta)} = \frac{g}{v^2}h\tan^2(2\theta) - 1 \Rightarrow \left[\left(\frac{gh}{v^2}\right)^2\tan^2(2\theta) - \left(2\frac{gh}{v^2}+1\right)\right]\tan^2(2\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$L = h\tan(2\theta) = \frac{v^2}{g}\sqrt{1+2\frac{gh}{v^2}}$$



Dado que la dinámica es reversible, obtendremos la misma trayectoria si rebotamos el proyectil en dirección contraria con la velocidad *v'* de llegada al suelo, obteniendo también una trayectoria del alcance máximo, pero en este caso hay que hacer el cambio *h→-h* en *EqL(θ)*, ya que el proyectil acaba a una altura *h* y por tanto tenemos

$$L = -h\tan(2\theta') = \frac{(v')^2}{g}\sqrt{1-2\frac{gh}{(v')^2}}$$

dado que el alcance *L* del tiro directo y del tiro inverso debe ser el mismo por ser la misma trayectoria tenemos

$$\tan(2\theta') = -\tan(2\theta) \Rightarrow 2\theta' = -2\theta + \pi \Rightarrow \theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$$

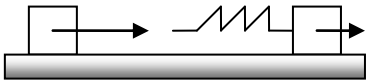
Si introducimos la energía mecánica $E=\frac{1}{2}mv^2+mgh$ el lector puede comprobar que el alcance máximo del tiro, en alto o desde hondonada, verifica la relación

$$L = \frac{2}{mg}\sqrt{E(E-mgh)} = \begin{cases} h\tan(2\theta) \\ -h\tan(2\theta') \end{cases} ; \ \theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$$

resultado válido en un sistema de coordenadas en el que el eje *x* coincide con la horizontal del suelo y *h* es la altura respecto al suelo.

<u>*Centro de masas y muelle sin masa.*</u>

Un cuerpo de masa de 3 kg. se desliza, sin fricción, sobre una mesa horizontal con una velocidad inicial 9 m/s. Frente a él, moviéndose en la misma dirección y sentido se encuentra el cuerpo de masa 4 kg. cuya velocidad inicial es 3 m/s, éste tiene unido un resorte en la parte de atrás, cuya constante elástica es k = 1120 N/m, ¿cuál será la máxima compresión del resorte cuando los cuerpos choquen?



Las leyes físicas se aplican en cualquier punto del espacio e instante del tiempo. Si podemos, debemos elegir los instantes y puntos en que la aplicación de las leyes sea la mas sencilla posible. La máxima compresión del muelle corresponde al mínimo de distancia entre las masas. En el instante de la máxima compresión la velocidad relativa entre masas es 0, ya que corresponde con la derivada temporal, y por tanto las masas tienen la misma velocidad para cualquier observador inercial. Por tanto en el momento de máxima compresión cada parte del sistema se mueve con la misma velocidad del centro de masas del sistema. En este estado se pueden calcular la modificación de energía cinética de cada masa, despreciando la mas del muelle, y sumarlas. Se verá que la suma no es nula. De acuerdo con el principio de conservación de la energía esta energía debe compensarse con la energía absorbida por el muelle.

Referencias

[1] *Espacio, tiempo, materia y vacío*. Sección 11:problemas y cuestiones; choque elástico de dos partículas. En esta misma web y por este mismo autor.
[2] *Órbita de Hohmann*
http://es.wikipedia.org/wiki/Órbita_de_transferencia_de_Hohmann
[3]*Introducción a la dinámica celeste*
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/celeste.htm
[4] *Asistencia gravitacional*
http://es.wikipedia.org/wiki/Asistencia_gravitacional
[5] *Leyes de Kepler* http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kepler
[6] *Modelo de Bohr*
http://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_atómico_de_Bohr
[7] *Puntos de Lagrange*
http://es.wikipedia.org/wiki/Puntos_de_Lagrange
[8]*Cinemática del sólido rígido: Teorema de Chasles.*
http://es.wikipedia.org/wiki/Cinemática_del_sólido_rígido
[9] Gnomon : http://fr.wikipedia.org/wiki/Gnomon
[10] Manto terrestre : http://es.wikipedia.org/wiki/Manto_terrestre
[11] *Sobre la ecuación de ondas*. En esta misma web y por este mismo autor.