Título del Trabajo	Introducción a la Mecánica de Fluidos.
Nombre	Enrique Cantera del Río
Filiación	C/Padre Benito Menni-6-2-E 47008
	Valladolid (España)
Correo electrónico	<u>benarrob@gmail.com</u>
Resumen	Introducción a la Mecánica de Fluidos
	para primeros cursos de carreras
	científico-técncias.
Version 4 <sup>a</sup>	Incluye ampliación del apéndice
	matemático con secciones sobre
	interpretación vectorial de las
	transformaciones de coordenadas y
	flujos bidimensionales.

# INTRODUCCION A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Introducción

Presión Hidrostática

Columna de agua en equilibrio Sifón Prensa Hidráulica Sobre-presiones Experiencia de Torricelli Sistemas de coordenadas no inerciales Altímetro de presión Mareas Momento angular hidrostático Momento de carena Calor y densidad de un fluido. El globo aerostático

#### Movimiento de fluidos

La presión en un fluido en movimiento. Líneas de corriente Análisis matemático de campos 2ª Ley de Newton para un elemento de fluido Conservación de la masa Sistema de ecuaciones para un fluido sin rozamiento interno

#### Visualización y ejemplos

Tubo de Venturi Velocidad de salida de un fluido Sifón Tubo de Pitot Sustentación Flujo compresible. Movimiento subsónico y supersónico Equilibrio Geostrófico El golpe de ariete Aliviaderos en grandes presas Cavitación y Sono-Luminiscencia Campos asociados a un fluido.Entalpía. Paradoja de D´Alembert

Ondas superficiales en el agua.

Sistema de coordenadas intrínseco de una corriente estacionaria

Ampliación del uso del sistema de coordenadas intrínseco Ecuaciones de Saint-Venant

Viscosidad

Flujo de Couette Ecuación de Navier-Stokes Flujo de Poiseuille y viscosidad en corrientes libres Efecto Coanda Arrastre de objetos en una corriente fluida

#### Capa Límite

Ecuaciones de Navier-Stokes para la capa límite Separación de la capa límite

#### Apéndice :

Vectores superficie.

Aritmética del producto escalar y el producto vectorial en coordenadas Cartesianas ortogonales globales o locales.

Calculo vectorial en componentes.

Teoremas de la divergencia y el rotacional generalizados para tensores. Componentes Intrínsecas de Helmholtz de un campo vectorial.

Divergencia y rotacional de un campo que se expresa como el producto de una matriz por un campo vectorial.

Divergencia y rotacional del producto de tensores.

Teorema de Helmholtz.

Vorticidad.

Vorticidad y conservación del momento angular en un fluido.

Energía mecánica y energía interna en un fluido.

Momento angular de un fluido. Simetría del tensor de esfuerzos.

Interpretación vectorial de las transformaciones de coordenadas : bases covariante y contravariante.

*Transformaciones de coordenadas de las operaciones gradiente, divergencia y rotacional. Caso de coordenadas esféricas y cilíndricas. Función corriente y flujos bidimensionales.* 

#### INTRODUCCIÓN

Dada la estrecha relación de nuestra especie con el agua, a lo largo del tiempo se ha ido acumulando una gran experiencia sobre el comportamiento físico del agua. En el propio lenguaje se fijan ideas como las corrientes, los remolinos, las turbulencias, las olas...Conceptos que son resultados directos de la experiencia y que serán refinados por la Física en la mecánica de fluidos. Incluso el concepto de presión del agua es un resultado relativamente directo de la experiencia. Un buceador nota rápidamente este efecto de la presión en sus tímpanos a medida que desciende bajo la superficie del agua; y en general los tímpanos son sensibles a los cambios de presión como los debidos a las ondas sonoras.

En cuanto al control físico del movimiento del agua tenemos los testigos históricos tales como canales de riego en el Egipto antiguo, acueductos, molinos y norias Romanos. El empuje de elevación de todo cuerpo sumergido parcial o totalmente en el agua se utilizó en la construcción de barcos desde tiempo inmemorial.

Leonardo Da Vinci, en el renacimiento, registra sus observaciones sobre el reposo y el movimiento del agua en varios cuadernos de trabajo:

"...las superficies de todos los líquidos en reposo, que se encuentren unidos entre sí por debajo, siempre tienen la misma altura."

"...en todos los casos en que hay movimiento de agua, hay gran parecido con el movimiento del aire."

"Para percibir la corriente de agua esparcir pequeñas semillas...de tal modo que se distribuyan por el seno del agua. El movimiento de estas semillas indicará cuales son las partes del agua que se mueven mas o menos rápidamente..."

"Si un canal experimenta un ensanchamiento brusco a cada lado, el agua forma remolinos a ambos lados del ensanchamiento..."

"El agua discurre mas rápido por el centro de canales rectos que por sus costados o en su fondo. Y mas rápido cerca de la superficie que cerca del fondo."

La mecánica de fluidos es la continuación natural de la mecánica elemental. Conceptos tales como las fuerzas de contacto : normales y rozamiento evolucionan hacia los conceptos de presión y viscosidad. Esta evolución tiene una parte matemática realmente relevante, ya que presiones y viscosidades adoptan ahora la forma matemática de tensores.

# PRESIÓN HIDROSTÁTICA

Según el principio de Arquímedes, todo cuerpo total o parcialmente sumergido en agua, experimenta una fuerza ascendente equivalente al peso del agua que el volumen de dicho cuerpo desaloja. Hay que decir que esta ley no es exclusiva del agua, sino de cualquier material en estado de fluido, como pueden ser líquidos y gases; pero para concretar supondremos que utilizamos agua como fluido.



En este contexto imaginemos un prisma de sección triangular que introducimos horizontalmente en el seno de un recipiente con agua. La imagen representa las fuerzas que actúan sobre los lados del prisma en una sección triangular recta del prisma. Las fuerzas  $F_i$  actúan en la normal a la cara correspondiente del prisma de la misma forma que la fuerza de contacto normal de un objeto que se desliza sin rozamiento por un plano inclinado. Por tanto

estamos suponiendo que no existe rozamiento, en este contexto denominado viscosidad, entre el prisma y el agua. Estas fuerzas representan la acción del agua sobre el prisma y por tanto la resultante de estas fuerzas debe ser el empuje descrito en el principio de Arquímedes. Por otra parte sobre el prisma actúa también la fuerza asociada a su peso (P). La fuerza resultante del peso y del empuje ascensional tendrá cierto valor. Dependiendo de este valor, el prisma se hundirá si prevalece el peso o alcanzará la superficie del agua si prevalece el empuje. En el caso límite en que el empuje y el peso sean iguales entonces se alcanza el equilibrio hidrostático y el prisma no se mueve de su posición. En este caso la masa del prisma es igual que la masa de agua desalojada por su volumen, es decir, el prisma tiene la misma densidad que el agua. Si el prisma es homogéneo con densidad constante, este caso tiene una propiedad interesante fácilmente accesible a la experiencia: el equilibrio hidrostático que se alcanza es un equilibrio indiferente; el prisma permanece en la posición en que se haya colocado y no tiene ninguna tendencia a girar. Por tanto, medido respecto de un punto cualquiera, el momento total asociado a las fuerzas Fi sobre el prisma compensa exactamente el momento asociado al peso del prisma en este caso.

Volviendo al equilibrio de fuerzas podemos poner :  $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{P} = 0$ 

Según el contexto del dibujo y dado que los vectores que manejamos están en un mismo plano, como operación matemática siempre es posible descomponer el vector *P* en suma de 2 vectores  $\Delta P_2$ ,  $\Delta P_3$  linealmente independientes en dicho plano y perpendiculares a las caras respectivas del prisma. De esta forma la expresión anterior queda

$$(\overline{F}_1) + (\overline{F_2 + \Delta P_2}) + (\overline{F_3 + \Delta P_3}) = 0$$



Las componentes vectoriales que a parecen agrupadas en paréntesis representan geométricamente un triángulo vectorial que además es semejante a la sección triangular del prisma, debido a la perpendicularidad de las componentes vectoriales. La relación de semejanza se puede expresar como

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2 + \Delta P_2}{S_2} = \frac{F_3 + \Delta P_3}{S_3} = \langle p \rangle$$

donde S representa el área de las caras del prisma, es decir, el producto de la longitud / de los lados del triángulo por la altura del prisma; altura que es la misma para todas las caras.

#### Primer paso al límite

En la expresión anterior, podemos variar la forma de la sección triangular del prisma. Por ejemplo podemos tomar sucesivos prismas que vavan abatiendo el lado 2 sobre el lado 1, manteniendo constante la longitud del lado 1 y anulando progresivamente el lado 3. Esta operación, en el limite, supone anular los valores  $\Delta P_2$ ,  $\Delta P_3$ ; ya que estas fuerzas son componentes del peso y por tanto son proporcionales a la masa contenida en el prisma. En el límite del que hablamos el prisma se transforma en una superficie, no tiene volumen y por tanto el prisma deja de tener masa. Si en el proceso límite los valores de F1 y  $F_2$  se mantienen significativamente superiores a los de  $\Delta P_2$ ,  $\Delta P_3$ , entonces llegamos a la siguiente configuración:



Sobre una superficie S1, sin masa, inmaterial, aparecen dos fuerzas iguales y de sentido contrario, una por cada lado. Interpretamos este resultado así : la superficie S1 separa dos partes del fluido. Las fuerzas internas del fluido son fuerzas de contacto que se manifiestan en la dos fuerzas iguales y de sentido contrario, una por cada fluido son fuerzas de contacto que se manifiestan en la superficie de separación entre las partes del fluido y

cumplen con la 3<sup>a</sup> ley de Newton ; el principio de acción y reacción. Por otra parte el resultado se ha obtenido en un proceso en que las fuerzas F son aplicadas a una superficie material; por continuidad también debemos aceptar el resultado si S1 es la superficie de separación entre el agua y otro cuerpo; este cuerpo puede ser otro fluido ,como el caso del aire. A nivel atómico, podemos imaginar que estas fuerzas son el resultado de la repulsión de las nubes electrónicas de los átomos situados a ambos lados de la superficie S1. Note el lector que las fuerzas F1 siempre serán perpendiculares a la superficie S1, independientemente de la orientación de dicha superficie.

#### Segundo paso al límite

Lo anterior muestra que las fuerzas internas en el agua, esto es la presión, converge con la superficie sobre la actúan, de modo que podemos poner la presión media sobre una superficie como

$$\langle p \rangle = \frac{F}{S}$$

si hacemos la superficie tan pequeña como queramos alrededor de un punto, entonces la fuerza correspondiente irá disminuyendo también, pero podemos suponer la convergencia y definir la presión en dicho punto como

$$p = \frac{dF}{dS}$$

la existencia de este límite es , en algún sentido, un acto de fé similar al de la definición de la velocidad instantánea. En principio pueden aparecer indeterminaciones matemáticas del tipo 0/0; pero la hipótesis que se acepta es la del comportamiento matemáticamente continuo de las magnitudes físicas. Si hacemos los dos pasos al límite en uno para el caso de un prisma de sección triangular cuyos lados son tan pequeños como queramos tenemos

$$\frac{dF_1}{dS_1} = \frac{dF_2}{dS_2} = \frac{dF_3}{dS_3} = p$$

de modo que para una superficie elemental centrada en un punto, la presión es independiente de la orientación de dicha superficie y siempre perpendicular a ella.

#### Columna de agua en equilibrio



La imagen representa un recipiente con agua en reposo. Definimos una porción del agua mediante un prisma recto de sección  $\Delta$ S, altura  $\Delta$ z, masa  $\Delta$ m y densidad de masa por unidad de volumen p. Las fuerzas de presión que actúan sobre este prisma se representan en el dibujo. Dado que la porción de agua está en reposo las fuerzas de presión en la horizontal deben compensarse. Las fuerzas en la vertical deben compensar el peso de la columna de agua

$$p_{\text{superior}}\Delta S - p_{\text{inferior}}\Delta S + \Delta m g = 0 \rightarrow p_{\text{superior}} - p_{\text{inferior}} + \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta z} g\Delta z = 0 \rightarrow p_{\text{inferior}} = p_{\text{superior}} + \rho g\Delta z$$

El razonamiento hecho es válido también para una columna de aire en una zona de aire en reposo, sin viento. Por supuesto en este caso se debe utilizar la densidad del aire.

Si la parte superior de la columna de agua llega hasta la superficie con el aire, entonces la presión superior es igual a la presión atmosférica en el punto en cuestión. En la superficie de separación entre aire y agua podemos aplicar lo dicho en la sección "primer paso al límite" sobre la continuidad de la presión.

Si ahora hacemos la altura  $\Delta z$  de la porción de agua tan pequeña como queramos, entonces el análisis de fuerzas en la horizontal da

$$p_{derecha}dS' - p_{izquierda}dS' = 0 \rightarrow p_{izquierda} = p_{derecha}$$

Note el lector que este resultado permite tomar  $\Delta x$ , la distancia horizontal, tan grande como permita el recipiente. Por tanto la presión hidrostática como función de las coordenadas solo depende de la altura z, en la dirección del campo gravitatorio : p=p(z). En el caso de

un recipiente de forma irregular, la diferencia de presión entre dos puntos se puede calcular combinando los resultados anteriores para distintas columnas de agua en equilibrio como muestra el dibujo; tomando la presión como una magnitud matemáticamente continua.

#### Sobre-presión

El siguiente dibujo representa un depósito de agua conectado a una tubería muy estrecha y alta. Si tenemos el depósito lleno y empezamos a llenar la tubería de agua, debido a la dependencia de la presión con la altura p(z), podemos aumentar enormemente la presión sobre zonas próximas al fondo, lo que supone un aumento de la fuerza que el agua hace sobre el recipiente equivalente al producto de la presión por la superficie correspondiente. Esto aumenta la tensión en las paredes del depósito; a tal extremo que incluso es posible romper las paredes del depósito. En tiempos de los Romanos se utilizaba una técnica de minería denominada "ruina montium". De esta forma se excavaban altos pozos y galerías en las zonas apropiadas de una montaña. Al introducirse grandes cantidades de agua el *golpe de ariete* fracturaba zonas de la montaña que después caían abajo por efecto de la gravedad.

El lector no debe creer que este efecto viola la conservación de la energía y que es posible realizar un gran trabajo con un escaso aporte de energía. Si el depósito empieza a romperse por la presión, entonces empezará a derramarse agua y en muy poco tiempo la altura de agua de la tubería habrá disminuido considerablemente, disminuyendo también la presión sobre el fondo. Sin embargo, para romper la materia, basta un instante en que la presión sea lo bastante grande.

Experiencia de Torricelli



La imagen muestra el sistema utilizado por Torricelli para medir la presión atmosférica. La cubeta inferior contiene mercurio, un elemento fluido y líquido en condiciones habituales de presión y temperatura. Inicialmente llenamos el tubo completamente con mercurio líquido. Lo taponamos de modo que no queda nada de aire dentro del tubo. Ponemos el tubo boca abajo dentro de la cubeta y destapamos la boca del tubo dentro de la cubeta. La columna de mercurio desciende una cierta cantidad hasta que se alcanza el equilibrio hidrostático. El nivel de la

cubeta está a la presión atmosférica y a la zona de vacío de la parte superior del tubo podemos asociar una presión nula, ya que suponemos que no existe materia allí, está vacía. Por tanto tenemos

 $p_{atmosféria} = \rho_{mercurio} g h$ 

siendo *h* la altura de la columna de mercurio desde el nivel de la cubeta. A parte de poder medir los cambios de la presión atmosférica relacionados con

los cambios de tiempo meteorológico, la experiencia de Torricelli es el primer momento en física en que se genera un vacío de materia. De esta forma se pudo comprobar que la luz era capaz de atravesar el vacío, mientras que el sonido necesita de un medio material para su propagación. Posteriormente se comprobó que el vacío generado en el experimento es solo aproximado y que hay que considerar la existencia de una presión, aunque extremadamente baja y despreciable frente a la presión atmosférica, de vapor de mercurio en equilibrio con el propio mercurio líquido.

Una pipeta es un instrumento muy utilizado en química para trasladar líquidos en pequeñas cantidades. Su mecanismo de funcionamiento es similar al tubo del experimento de Torricelli, solo que ahora el tubo está abierto por los dos extremos. Un extremo se introduce en el líquido que se desea trasladar, por el otro extremo una persona genera con su boca una pequeña succión que elimina aire de la parte superior del tubo. Esta succión, al eliminar aire, disminuye la presión de dicho aire en esta zona, lo que provoca una subida de la columna de líquido para llegar al equilibrio hidrostático. Después se tapona la parte superior con el dedo gordo para evitar que el aire entre y ya se puede trasladar el líquido. Un caso similar es el de un vaso lleno de agua cuya boca se tapa y se invierte. En el interior del vaso se genera un efecto de succión que disminuye la presión respecto a la atmosférica y mantiene el agua dentro del vaso.

Sifón



La imagen muestra un recipiente con agua y un tubo en forma de U con una de sus ramas en el interior del recipiente. Inicialmente tenemos el tubo lleno de agua y evitamos que se escape tapando la correspondiente boca del tubo. Este tapón debe ejercer una presión adecuada al estado de equilibrio hidrostático en la

boca del tubo, de modo que la presión en lo alto del tubo sea la misma al ser calculada desde las dos columnas de agua:

$$\left. \begin{array}{c} p_{atm} = p_u + \rho g h_1 \\ p_{boca} = p_u + \rho g h_2 \end{array} \right\} \Longrightarrow p_{boca} - p_{atm} = \rho g \left( h_2 - h_1 \right)$$

donde  $p_u$  es la presión en la parte mas alta del tubo. Si  $h_1 > h_2$  entonces la presión en la boca sería menor que la atmosférica en el equilibrio. Un tapón bien ajustado crearía un efecto de vacío similar al caso de Torricelli capaz de disminuir la presión en la boca. Si  $h_1=h_2$  entonces  $p_{boca}=p_{atm}$  y no es necesario el tapón; en este caso la presión atmosférica sería suficiente para mantener el sifón en equilibrio hidrostático. Pero si  $h_2 > h_1$  el tapón debe ejercer una presión superior a la atmosférica en el estado de equilibrio mecánico. Si abrimos el tapón, la boca queda inmediatamente a la presión atmosférica y por tanto fuera del equilibrio mecánico: las diferencias de presiones con la boca no equilibran el peso de la correspondiente columna de agua. Por tanto el agua empieza a caer por el tubo por diferencia de presiones y el nivel del tanque disminuye, aumentando la altura  $h_1$  en un intento de nivelarse con la altura de

la boca externa del tubo  $h_1=h_2$ . De este modo el sistema busca el equilibrio mecánico con  $p_{boca}=p_{atm}$  y  $h_1=h_2$ .

Este es el mismo comportamiento que el caso de los vasos comunicantes. Dos (o mas) vasos de agua de diferentes formas, alturas y niveles de agua están



formas, alturas y niveles de agua están comunicados por su parte inferior con una válvula de paso. Cuando se abre la válvula de paso el agua empieza a moverse por diferencia de presión debido a los distintos niveles iniciales del agua en cada vaso. El proceso

finaliza cuando los niveles de los dos vasos se igualan y por tanto la presión en el fondo de los vasos es la misma.

Todavía queda física por explicar en el caso del sifón que veremos en la parte de dinámica de fluidos.

#### Prensa hidráulica



El dispositivo de la figura consta de dos vasos comunicantes llenos de agua. Como sabemos el equilibrio de presiones requiere que el agua llegue a la misma altura en los dos vasos. Posteriormente se aplican unos pistones (en azul) y se aplican sendas fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  en cada uno de los vasos. Si estas fuerzas son tales que se mantiene el nivel en los vasos, entonces la presión justo debajo de los pistones debe ser la misma, y por tanto

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \rightarrow F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

relación que es similar a la de la palanca; de modo que si la relación de secciones  $S_2/S_1$  es lo bastante grande, una fuerza relativamente pequeña  $F_1$ , puede equilibrar a otra  $F_2$  relativamente grande. Las imprentas antiguas se basaban en la presión de las planchas con los caracteres alfabéticos sobre el papel. Estas planchas se colocarían en el lado de  $F_2$  de modo que estuviesen muy cerca de un tope con el papel y un pequeño desplazamiento de  $F_1$  provocaría una gran compresión del papel contra las planchas, que quedan grabadas en el papel. Si en el lado de  $F_1$  se conecta a una tubería con agua a presión, el sistema funciona como un elevador hidráulico.

#### Altímetro de presión.

ds

Podemos imaginar una columna vertical de aire de sección dS en una atmósfera en equilibrio estático. Un elemento de volumen de esta columna está sometida a una presión superior y otra inferior que deben contrarrestar el peso de dicho elemento de volumen de aire dV, aplicando la ley de Newton de la gravedad:

$$dpdS = dm \frac{GM}{r^2} = dV\rho \frac{GM}{r^2}; dV = dSdr \rightarrow dp = \rho \frac{GM}{r^2} dr$$

donde  $\rho$  es la densidad del aire. Si aplicamos la ecuación de los gases ideales al aire :  $p = \rho RT/m_{mol}$ , donde  $m_{mol}$  es la masa molar del aire; por tanto, suponiendo la temperatura T constante

$$\frac{dp}{p} = \frac{GM}{RTm_{mol}}\frac{dr}{r^2} \to \int_{p0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_{r0}^{r} \frac{GM}{RTm_{mol}}\frac{dr}{r^2} \to \ln(p) - \ln(p_0) = -\frac{GM}{RTm_{mol}}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

El resultado es una relación entre la presión atmosférica y la altura. Esta relación se utiliza en los altímetros de presión, adecuadamente calibrados en los parámetros  $p_0$ ,  $r_0$ ,  $m_{mol}$  y T para aproximar la altura (r) según medidas de presión. Estos dispositivos se utilizan en aviones y se calibran para las condiciones de los aeropuertos en que se realizará el aterrizaje, sin embargo el sistema es poco fiable en caso de una atmósfera no estable cerca de borrascas y centros de bajas presiones, donde la presión cambia abruptamente. Los aviones disponen también de radio-altímetros. Existe otro modelo atmosférico útil que en vez de temperatura constante supone a la columna de aire compuesta de segmentos adiabáticos contiguos.

Equilibrio hidrostático en un sistema de coordenadas no inercial



El dibujo adjunto muestra un recipiente cerrado con agua en su interior. El recipiente gira respecto del eje z a una velocidad constante, de modo que el movimiento de giro se transmite poco a poco al fluido. Finalmente, para un observador asociado al sistema de coordenadas rotante (x,y,z), la superficie del agua adoptará la forma estable de un paraboloide de revolución. Este observador, no inercial, puede utilizar también las leyes de la presión hidrostática, pero en el equilibrio hidrostático debe introducir también la aceleración centrífuga, descrita en [1]. Para describir

completamente el campo de presiones p(x,y,z) para este observador podemos tomar dos columnas de agua : 1 y 2, una horizontal y otra vertical de sección dS'. En la columna 1 horizontal la presión en los extremos derecho e izquierdo debe compensar el efecto de la fuerza centrífuga, que actúa en esta dirección.

$$(p_{derecha} - p_{izquierda}) dS' = \left( \int_{x=0}^{x=x} dp \right) dS' = \int_{x=0}^{x=x} dm \, w^2 \, x = \int_{x=0}^{x=x} \rho \, dS' \, dx \, w^2 x \rightarrow$$

$$p_{derecha} - p_{izquierda} = \int_{x=0}^{x=x} \rho \, w^2 x \, dx = \frac{1}{2} \rho \, w^2 x^2$$

Para la columna 2 vertical las presiones superior e inferior deben compensar el peso de la columna, que es la fuerza que actúa en esta dirección vertical. El resultado obviamente coincide con el encontrado anteriormente

$$p_{\text{inf erior}} = p_{\text{superior}} + \rho g z$$

Por tanto la diferencia de presión entre el origen de coordenadas y un punto de la superficie del agua será

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{1}{2}\rho w^2 x^2 - \rho g z$$

Por otro lado, podemos hacer el cálculo de este cambio de presión utilizando dos columnas complementarias 1' y 2' en la zona de aire. Esto nos lleva a este resultado

$$\frac{1}{2}\rho_{agua}w^{2}x^{2} - \rho_{agua}g z = \Delta p = \frac{1}{2}\rho_{aire}w^{2}x^{2} - \rho_{aire}g z$$

resultado que es compatible con la ecuación de una parábola :  $z = ax^2$ 

Mareas



El dibujo adjunto representa la interacción entre la Tierra y el Sol, separados una distancia *d* entre sus centros, de cara a un cálculo sencillo de las mareas causadas por el Sol. Suponemos que la tierra es un planeta líquido, que no gira respecto su eje de rotación y perfectamente esférico. El sistema de coordenadas que utilizaremos es un *sistema de* 

coordenadas en caída libre en el campo gravitatorio solar solidario a la tierra (que suponemos no gira respecto a su eje norte-sur, de modo que hacemos abstracción de las fuerzas centrífuga y de Coriolis) y cuyo origen se mantiene unido al centro de la tierra; por tanto sigue el movimiento del centro de la tierra en el campo gravitatorio solar. Imaginemos dos columnas de agua, 1 y 2 tal como aparecen en el dibujo. En ambas columnas se ha marcado un elemento de fluido. El cálculo de la variación de presión en estas columnas debe hacerse en términos diferenciales, puesto que la gravedad terrestre ya no es constante en dimensiones tan grandes y además hay que considerar el efecto de la gravedad solar sobre las columnas. Vamos a calcular la diferencia de presión  $P_2$ - $P_1$  desde el sistema de coordenadas en caída libre definido antes, para lo que aplicaremos la fórmula

$$dp = \rho \big[ g(r) + \Delta g(r) \big] dr$$

donde g(r) hace referencia al campo gravitatorio de la tierra y  $\Delta g(r)$  hace referencia a las alteraciones correspondientes al campo gravitatorio solar. El elemento de fluido en la columna 1 está afectado por el campo gravitatorio solar  $s_1$ , pero esta es la visión desde un sistema de coordenadas inercial centrado en el sol. Respecto de nuestro sistema de coordenadas la cinemática exige compensar la aceleración *s* de cualquier cuerpo asociada al campo gravitatorio solar con la aceleración  $s_0$  asociada al movimiento de nuestro sistema de coordenadas. De este modo tenemos, en módulo ( $M_s$ = masa del sol)

$$\Delta g_1(r) = \left(\bar{s}_1 - \bar{s}_0\right) \bullet \bar{u}_r \approx \frac{GM_s}{d^2} \frac{r}{d}$$

donde  $u_r$  es un vector unitario paralelo a la columna  $P_1$  y apuntando al centro de la tierra. Para el elemento de fluido de la columna 2 debemos hacer la misma compensación. Para ello podemos desarrollar en serie el campo solar respecto del origen de coordenadas

$$s_{2} = \frac{GM_{s}}{(d+r)^{2}} = \frac{GM_{s}}{d^{2}} \frac{1}{(1+\frac{r}{d})^{2}} \approx \frac{GM_{s}}{d^{2}} \left[ 1 - \frac{2r}{d} \right] \quad (r << d)$$
$$\Delta g_{2}(r) = \bar{s}_{2} - \bar{s}_{0} = -\frac{2GM_{s}}{d^{2}} \frac{r}{d}$$

Con esto podemos calcular la variación de presión P2-P1

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \rho \int_{R}^{0} \Delta g_1(r) dr + \rho \int_{0}^{R} \Delta g_2(r) dr$$
$$P_2 - P_1 = \rho \int_{R}^{0} \frac{GM_s}{d^3} r \, dr - \rho \int_{0}^{R} \frac{2GM_s}{d^3} r \, dr = -\rho \int_{0}^{R} \frac{3GM_s}{d^3} r \, dr = -\rho \frac{3GM_s}{2d^3} R^2$$

donde R es el radio terrestre. El término asociado a la gravedad terrestre g(r) no aparece en esta diferencia de presiones debido a que consideramos la tierra perfectamente esférica.

En consecuencia vemos que el efecto de la gravedad solar en una tierra líquida, que no gira respecto a si misma y perfectamente esférica es una disminución de la presión en 2 respecto de la presión en 1. Por tanto la tendencia al equilibrio hidrostático exige un movimiento de agua desde la zona 1 a la zona 2; es decir, la altura del mar en la zona 2 debe ser superior a la altura del mar en la zona 1 en una cantidad  $\Delta h$  que compense la discrepancia de presiones calculada

$$\rho \frac{3GM_s}{2d^3} R^2 = \rho g \Delta h \to \Delta h = \frac{3GM_s}{2gd^3} R^2$$

donde g es la aceleración de la gravedad terrestre en su superficie. Haciendo cuentas la altura es de aproximadamente 25 centímetros. Un cálculo similar para la Luna resulta en 35 centímetros. Note el lector que este resultado correspondería a  $\Delta h$  en alta mar y que esto supone en realidad un gran volumen de agua desplazada. Debido al giro de la tierra, las mareas acaban en las cercanías de las masas continentales, donde el mar tiene menos profundidad y esto hace que la marea gane en altura y velocidad, aún mas si pasa por estrechos poco profundos, como el Canal de la Mancha o el estrecho de Gibraltar. Dado que la atmósfera también se comporta como un fluido, también hay mareas atmosféricas [2].

Momento angular hidrostático



Un recipiente contiene agua en estado de reposo. Esto significa que las distintas porciones de agua que

podamos imaginar están en reposo relativo. Esto es lo que pasa también en el caso del sólido rígido. Si consideramos una porción de agua en forma arbitraria, el equilibrio hidrostático exige que :

1-El efecto de las fuerzas de presión (*pdS*) sobre la superficie equilibre el peso (*P*)

2-El momento de fuerzas sobre la porción de fluido sea nula:(CM=centro de masas)

$$\sum_{vi} \bar{r}_{vi} \times (\bar{g} \, dm_{vi}) + \sum_{si} \bar{r}_{sj} \times (p_{sj} \, d\bar{S}_{sj}) = \overline{r_{agua}}^{CM} \times (m_{agua} \bar{g}) + \overline{M}_h = 0$$

donde se distingue con el subíndice *vi* el momento de fuerzas asociado a la fuerza de gravedad sobre cada elemento de volumen de fluido de nuestra porción arbitraria y con el subíndice *si* la componente de momento de fuerzas asociada a la presión sobre los elementos de superficie correspondientes. El vector superficie *dS* es un vector perpendicular al elemento de superficie y dirigido hacia el interior de nuestra porción arbitraria de agua. De esta forma la expresión vectorial *pdS* representa el vector fuerza asociada a la presión sobre la superficie.

El primer término de la ecuación de momentos corresponde al momento de fuerzas asociado al peso actuando sobre el centro de masas de la porción de agua y la segunda componente es el *momento de fuerzas hidrostático*  $M_h$ . Obtendremos el mismo resultado para el caso de un objeto material de la misma forma y con la misma densidad del agua colocado en el mismo lugar en el interior del recipiente con agua en reposo : la superficie limitante es geométricamente la misma y el peso es el mismo que en el caso anterior; por tanto la distribución de fuerzas sobre este objeto es la misma. Mas aún, si cambiamos la densidad del objeto manteniendo su forma y su posición en el agua, las fuerzas de contacto que actúan sobre su superficie no cambiarán respecto del caso inicial y por tanto el momento hidrostático seguirá siendo

$$\overline{M}_{h} = \overline{r_{agua}}^{CM} \times (-m_{agua}\overline{g})$$

donde la masa *m* es la masa de agua desalojada por el objeto. Efectivamente el peso de esa masa actuando en la dirección contraria a la gravedad g es el empuje del que habla el principio de Arquímedes y la expresión anterior asocia un punto de aplicación a esta fuerza de empuje hidrostático situándola en el centro de masas del "objeto de agua". Vemos que este empuje es independiente del material del objeto y solo depende de su forma y posición en el agua. En cuanto al momento de fuerzas asociado a la gravedad  $M_g$ , será ahora

$$\overline{M}_{g} = \overline{r_{objeto}}^{CM} \times (m_{objeto} \overline{g})$$

Note el lector que el momento de fuerzas asociado a la gravedad ahora depende de  $r^{CM}_{objeto}$  y no de  $r^{CM}_{agua}$ ; esta diferencia es para considerar que el objeto no tiene por que tener una densidad homogénea y constante como el agua. Si el objeto tuviese una densidad constante, entonces el centro de gravedad del objeto  $r^{CM}_{objeto}$  y el centro de empuje hidrostático del "objeto agua"  $r^{CM}_{agua}$  coinciden; en este caso los momentos de fuerza gravitatorio e

hidrostático no están compensados, pero al coincidir el centro de gravedad y el centro de empuje hidrostático, esto hace que no haya un par de fuerzas actuando sobre el objeto y por tanto el objeto, inicialmente, no gira respecto de si mismo, si no que efectúa un desplazamiento sin giro al ascender o descender en el fluido. En cambio si la densidad del objeto no es homogénea entonces es posible que el centro de empuje y el centro de gravedad no coincidan y haya un par de fuerzas que haga girar el objeto respecto de su centro de masas.

#### Momento de carena.

Si echamos una canica en un vaso de agua, el nivel del agua asciende en el valor correspondiente al volumen de la canica. Esto es así por que el agua es un líquido incompresible: no se puede modificar apreciablemente su volumen por medios físicos. Debido al aumento de altura de la columna de agua en el vaso, la presión en el fondo aumenta; de modo que hay una modificación del campo de presiones p(x,y,z) en el vaso. Esta modificación de la presión depende de la relación entre el volumen de la canica y el del agua. Si el



recipiente fuese una piscina olímpica el cambio en el nivel de la piscina debido a la caída de una canica sería inapreciable y el campo de presiones sería prácticamente el mismo. En el caso de un barco en el mar se puede asegurar que el ascenso del nivel del mar por efecto del barco es despreciable. Esto supone que el campo de presiones en el mar es el mismo con y sin barco.

El dibujo adjunto representa el perfil transversal de un barco en su longitud media y el eje de simetría medio. La flotación del barco se debe al empuje asociado al volumen de agua desalojada,

volumen que podemos ver en la porción de barco que hay debajo de la línea horizontal cortada que representa el nivel del mar estable. Sin embargo, además de que el barco flote en condiciones estables, también hace falta que sea estable, es decir, que si las condiciones de navegación inclinan el casco a un lado u otro el barco pueda recuperarse. Si aplicamos una fuerza para ladear el casco de un barco desde su posición normal podemos tener una situación como la del dibujo. Si eliminamos esta fuerza el barco buscará de nuevo su posición normal o se inclinará mas hasta caer dependiendo del momento de fuerzas asociado a la gravedad y a la presión sobre el casco. En cuanto a las fuerzas de presión, nos fijamos a uno y otro lado de cada elemento de casco en el perfil del barco. Cuando el perfil es aire-aire, el momento de fuerzas asociado a la presión se anula prácticamente, ya que la superficie interior y la exterior son prácticamente paralelas, los elementos de superficie se pueden elegir de igual tamaño a ambos lados y la presión a ambos lados es prácticamente la misma.



En los elementos aire-agua, la zona en contacto con agua está sometida a la misma presión que en ese punto que si no estuviese el barco, ya que el campo de presiones no varía por la presencia del barco. Nos falta calcular el momento de fuerzas asociado a la presión del aire en contacto con el casco en esta zona interna del barco. La zona interior de aire se puede asociar a un "objeto-aire" limitado por una

superficie tan cercana como queramos a la zona interior del casco y la superficie del nivel del mar. El dibujo representa una zona del casco y del "objeto-aire", muy próximos entre si. Las flechas continuas son las fuerzas que el aire hace sobre la superficie del objeto-aire y sobre el interior del casco. Las flechas punteadas son las fuerzas que la presión del agua hace sobre la parte externa del casco. El "objeto-aire" es una porción de fluido en equilibrio y por tanto respecto al centro de masas (*C*) de este "objeto-aire" el momento de fuerzas es cero. Se sigue que el momento de fuerzas correspondiente con la superficie cercana al casco del "objeto-aire". Como estas últimas fuerzas sobre el "objeto-aire" son de igual intensidad y opuestas (acción-reacción) a las fuerzas de presión del aire sobre la superficie interna del casco, tenemos que el momento de fuerzas asociado a la superficie del nivel del mar el momento de fuerzas asociado a la superficie del nivel del mar es igual a la componente de momento que faltaba por calcular en el lado interno del casco. Podemos poner en fórmulas el proceso seguido:

$$\overline{M}_{casco}^{aire-agua} = \overline{M}_{casco}^{agua} + \overline{M}_{casco}^{aire}$$

$$\overline{M}_{objeto-aire}^{prox.casco} + \overline{M}_{objeto-aire}^{nivel-mar} + \overline{r}^{CM} \times m_{objeto-aire} \overline{g} = 0$$

$$\overline{M}_{casco}^{aire} = -\overline{M}_{objeto-aire}^{prox.casco}$$

$$\rightarrow \overline{M}_{casco}^{aire-agua} = \overline{M}_{casco}^{agua} + \overline{M}_{objeto-aire}^{nivel-mar} + \overline{r}^{CM} \times m_{objeto-aire} \overline{g}$$

en la 2<sup>a</sup> expresión se ha generalizado el cálculo del momento angular del "objeto-aire" respecto de un punto cualquiera que no tiene por que ser el centro de masas de dicho objeto( $r^{CM}$  representa la posición del centro de masas del objeto-aire). En la última expresión la suma de los momentos notados con M mayúscula en la parte derecha de la igualdad se aproximan mucho al momento de fuerzas de un "objeto-agua" limitado por la superficie del casco en contacto con el agua y la superficie del mar; excluyendo el propio casco de la nave y despreciando por pequeña la intersección entre la superficie del nivel del mar y el casco en  $M^{nivel-mar}_{objeto-aire}$ 

$$\overline{M}_{casco}^{agua} + \overline{M}_{objeto-aire}^{nivel-mar} = \overline{M}_{objeto-agua} = r^{-CM} \times -m_{objeto-agua}\overline{g}$$

$$\rightarrow \overline{M}_{casco}^{aire-agua} = r^{-CM} \times (m_{objeto-aire} - m_{objeto-agua})\overline{g} = \overline{M}_{carend}$$

donde la masa del objeto-aire es despreciable frente a la masa del objeto-agua. Este "objeto-agua" es justamente el agua desalojada por el barco del que habla del principio de Arquímedes. ( $r^{CM}$  representa la posición del centro de masas del objeto-aire que es la misma posición que para el objeto-agua, supuestas ambas densidades homogéneas). El momento de fuerzas calculado

anteriormente se denomina momento de carena y está asociado al empuje hidrostático del mar sobre el barco. El centro de masas correspondiente se denomina centro de empuje o de carena. En el contexto del dibujo completo del barco, el momento de carena corresponde a la porción de agua desalojada entre el casco y el nivel de superficie y *C* es el centro de empuje correspondiente. Por otro lado el centro de gravedad *G*, que depende de la distribución de masa del barco, se sitúa en algún punto del eje de simetría del barco. Podemos ver que, dependiendo de la posición del centro de gravedad, el par de fuerzas formado por el empuje y el peso tienden a normalizar la



posición del barco, en el caso de G1 y a volcarlo completamente en el caso G2. Existe también un punto intermedio M, prolongación de la fuerza de empuje sobre el eje de simetría, tal que si el centro de gravedad está en ese punto, entonces el par de fuerzas es nulo y el barco, por si mismo, no tiene tendencia a girar hacia ningún lado. Si repetimos la

experiencia de inclinar el barco en varios ángulos y calculamos para cada ángulo la localización del centro de empuje *C* podemos ver que, para ángulos relativamente pequeños, los centros de empuje se van colocando aproximadamente sobre un círculo cuyo centro es precisamente el punto *M*, que recibe el nombre del metacentro y es un punto singular del barco. Por tanto la estabilidad del barco requiere que el centro de gravedad no esté por encima del metacentro del barco.

### Calor y densidad de un fluido. El globo aerostático.



Un globo aerostático es básicamente una bolsa que puede ser llenada con algún tipo de gas. Si la densidad del gas de la bolsa es menor que la densidad atmosférica, entonces el principio de Arquímedes nos dice que el aire exterior ejercerá un empuje hacia arriba sobre la bolsa proporcional al peso del aire desalojado. Dependiendo del volumen de la bolsa, esto puede ser suficiente para elevar una carga adicional ligada a la bolsa. Una forma de

llenar la bolsa con gas de baja densidad consiste en calentar el propio aire atmosférico por medio de un quemador, como puede verse en la imagen. Al calentar el aire este se dilata en el interior de la bolsa y, dado que el volumen máximo de la bolsa es fijo, la densidad del aire dentro de la bolsa debe disminuir.

El caso del globo aerostático ilustra claramente el efecto del calor sobre fluidos como el aire o el agua. El calor/frío provoca la dilatación/compresion de estos fluidos y un cambio en su densidad, de modo que siempre que existan fenómenos caloríficos en fluidos como el agua, ya no puede considerarse incompresible. Como consecuencia aparecen corrientes en estos fluidos derivados del principio de Arquímedes. La corriente del golfo es un ejemplo a gran escala de este comportamiento. Podemos ver al Caribe y el golfo de México como una gran "bolsa de agua". El calor del sol se absorbe rápidamente en las aguas superficiales lo que provoca una dilatación. Esta

dilatación provoca la corriente del golfo que, pasando por el estrecho de Florida llega hasta latitudes tan altas como Escocia en Europa. En estas zonas la corriente pierde calor y es una de las razones del clima relativamente benigno de Escocia. La pérdida de calor de la corriente significa un aumento de la densidad del agua al enfriarse. Sin embargo esto no significa que la corriente quede cortada. Por el contrario, el aumento de densidad hace que la corriente pase al fondo oceánico y se dirija por esta vía hacia zonas ecuatoriales mas cálidas. Esto conforma una corriente cerrada que distribuye calor entre zonas calientes y zonas frías del planeta y es un auténtico regulador térmico del que depende la habitabilidad del norte de Europa. Los cambios de densidad del agua son un factor clave en el mantenimiento de estas corrientes oceánicas; pero la densidad del agua también depende del contenido de sal del agua. Las aguas del atlántico norte pierden calor por efecto de los vientos y la evaporación. Esto produce un aumento en la densidad del agua lo suficiente como para hundirse en el fondo oceánico. Pero el proceso de calentamiento global genera agua sin sal procedente de deshielo, y existe la posibilidad de una disminución de la salinidad en el atlántico norte por el rápido deshielo en Groenlandia. Esta disminución de la salinidad supone una disminución en la densidad del agua y un riesgo para el mantenimiento de las corrientes oceánicas.

El caso del globo aerostático indica que la densidad de fluidos como el aire o el agua es función de la temperatura  $\rho(T)$ . Sin embargo si los elementos de fluido siguen un proceso con intercambios de calor y rozamiento interno despreciables, entonces el proceso es adiabático : dS=0; al menos durante tiempos relativamente largos, como el caso del calor contenido en el globo aerostático. Para un fluido próximo a *gas ideal*, la ecuación adiabática correspondiente al volumen asociado a la unidad de masa (inverso de la densidad  $\rho$ ) es

$$p\rho^{-\gamma} = cte; \ \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

de modo que en estas condiciones podemos poner la dependencia  $\rho(p)$  que corresponde a un *fluido barotrópico*. Otro caso posible es cuando el gas sigue una transformación Isoterma, de modo que la ecuación de estado nos lleva directamente a  $\rho(p)$ 

$$p\rho^{-1} = cte;$$

En general los procesos en gases con índice politrópico[4] *n* constante o función de la presión son procesos barotrópicos. Como veremos, los fluidos barotrópicos son un tópico importante en mecánica de fluidos. El carácter adiabático (o politrópico) también está presente en el fenómeno de propagación del sonido en un fluido.

# **MOVIMIENTO DE FLUIDOS.**

# La presión en un fluido en movimiento.

En el siglo XVIII parecía evidente que las leyes de Newton estaban en el fundamento de toda la física. A nivel fundamental estas leyes se aplican a elementos de materia o partículas y por tanto es necesario aclarar que se entiende en nuestro caso por partícula de fluido. Desde el punto de vista matemático un elemento de fluido es un volumen de fluido tan pequeño como se quiera en todas sus dimensiones. Sobre esta partícula actuarán las fuerzas de presión del resto del fluido y de la gravedad; esto en las experiencias comunes sobre el movimiento de fluidos. La resultante de estas fuerzas determinará la aceleración que afecta a la partícula de fluido mediante la 2ª ley de Newton. Note el lector que en el caso de fluido en movimiento podemos seguir manteniendo las conclusiones sobre la presión presentadas en la sección de hidrostática, es decir, que la presión siempre actúa en la perpendicular a una superficie de contacto; sea este contacto entre el agua y otro material o entre dos partes del mismo fluido. Esto es así por que la resultante de las fuerzas asociadas a la presión y a la gravedad es una fuerza sobre una partícula de fluido que es un elemento de volumen. Es decir, la resultante es una fuerza distribuida en volumen, igual que lo es la fuerza de gravedad; en cambio la presión es señal de una fuerza distribuida en superficie. De este modo podemos reproducir el razonamiento hecho sobre la presión tomando un prisma elemental solidario al movimiento del fluido y que abate progresivamente dos de sus caras, eliminando en el límite de esta forma las fuerzas distribuidas en volumen y manteniendo el resultado sobre la presión ya señalado antes.

Una característica importante de algunos fluidos es que en su movimiento mantienen una densidad constante; mientras el fluido solo esté afectado por fuerzas clásicas y no por cambios de temperatura y/o composición química del fluido por ejemplo. El agua se considera un fluido incompresible, es decir, que mantiene su volumen aunque cambie su forma en las condiciones físicas aludidas; y por tanto su densidad se mantendrá constante. El aire puede ser comprimido o expandido mas fácilmente, pero estas acciones están asociadas normalmente a un cambio de su temperatura; sin embargo existe una margen experimental en que el aire puede considerarse incompresible y que se aclarará mas adelante. Se insiste otra vez en que en el análisis del movimiento de fluidos que se presenta aquí solo se considerará la influencia de fuerzas mecánicas, y no la influencia de los cambios de temperatura y/o composición química; influencia que también existe.

# Líneas de corriente

Podemos refinar ahora las experiencias de Leonardo sobre la detección del movimiento del agua utilizando *partículas-test* sólidas. En el caso de fluidos que mantienen constante su densidad podemos utilizar como partícula-test un elemento de volumen de un material rígido, con la misma densidad del agua y que no experimente rozamiento con el agua. No podemos, físicamente, sustituir un elemento de fluido por la partícula-test correspondiente que ocupe su lugar.

Aunque ambos mantienen su volumen, el elemento de fluido puede cambiar su forma durante el movimiento, pero la partícula-test no. Sin embargo si consideramos partículas-test de un tamaño muy pequeño, en el límite, las fuerzas de presión y gravedad sobre esta partícula-test serán las mismas que sobre la partícula real de agua y por tanto el movimiento del agua será el mismo movimiento que el de la partícula-test.

Utilizando una gran cantidad de estas partículas se puede en principio medir el campo de velocidades u(x,y,z,t) de un fluido transparente en movimiento puesto en condiciones reproducibles de laboratorio; es decir, que si repetimos mas tarde la experiencia, obtendremos el mismo valor de u(x,y,z,t). Esto no es tan sencillo como parece, ya que el movimiento de un fluido puede estar afectado por turbulencias, vórtices o remolinos que pueden ser difíciles de controlar y predecir. El caso mas sencillo para el análisis del movimiento de un fluido es el caso de movimiento estacionario, es decir, el movimiento de nuestras partículas de test solo depende de las coordenadas de posición (x,y,z)y no del tiempo : u(x,y,z). Si registramos trayectoria en el fluido de una partícula test que parte de un punto  $x_0, y_0, z_0$ ; entonces cualquier otra partícula-test que parta del mismo punto seguirá esta misma trayectoria. Desde el punto de vista mecánico esto es así por que sobre ambas partículas actúan las mismas fuerzas y parten de la misma situación inicial. Este es el determinismo de la mecánica clásica. Dibuiando las travectorias de todas las posibles partículastest obtenemos las líneas de corriente del fluido en condiciones estacionarias. En condiciones no estacionarias también se pueden definir las línea de corriente del campo para un instante dado  $u(x,y,z,t_0)$ ; pero en este caso las líneas de corriente no están relacionadas con travectorias de una partícula-test. La ecuación diferencial que sigue un elemento *dl* de estas líneas de campo es

$$\overline{u} \times d\overline{l} = 0 = (u_x, u_y, u_z) \times (dx, dy, dz) = 0$$

Como regla heurística, para una corriente de fluido que se mueve suavemente y sin turbulencias, estado de movimiento denominado régimen laminar; las líneas de corriente tienden a rodear suavemente los obstáculos o límites que dicha corriente va encontrando.

#### Análisis matemático de campos

Un campo, desde el punto de vista físico, es una zona del espacio en la que se distribuye alguna característica física que puede ser objeto de medida. Así tenemos un campo de velocidades, de presiones, densidades, un campo gravitatorio, un campo eléctrico....Matemáticamente se trata de funciones escalares o vectoriales que dependen de las tres coordenadas espaciales y, si el campo es no-estacionario, del tiempo : f(x,y,z,t). Si f(x,y,z) es un campo escalar, podemos analizar la variación de f() sobre una curva parametrizada como x(l),y(l),z(l); donde elegimos l como la longitud sobre la misma curva a partir de un punto de ella. De esta forma podemos calcular la derivada df/dl y la variación df al movernos sobre la curva parametrizada. Pero el teorema fundamental del cálculo vectorial introduce el producto escalar para el cálculo de esta variación, fusionando de esta forma cálculo y álgebra vectorial, y definiendo la operación básica de análisis de campos : el gradiente:

$$df = \frac{df(x(l), y(l), z(l))}{dl} dl = \left[\nabla f\right] \bullet d\bar{l} \Rightarrow \frac{df(x(l), y(l), z(l))}{dl} = \left[\nabla f\right] \bullet \bar{e}_l ; \bar{e}_l = \frac{d\bar{l}}{dl}$$

donde, referidos al punto correspondiente del espacio en que se hace el análisis, *dl* es el vector desplazamiento elemental sobre la curva, *e<sub>l</sub>*es un vector unitario tangente a la curva y  $\nabla f$  es el vector *gradiente*. La expresión anterior define el vector gradiente como un límite cuando *dl* $\rightarrow$ 0, y de existir este límite debe ser *independiente de la ruta tomada por dl*. De este modo determinamos las componentes del vector gradiente si tomamos sucesivamente como curvas las líneas coordenadas que pasen por el punto en el que se calcula la derivada. En coordenadas Cartesianas será

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\nabla f\right] \bullet \bar{e}_x \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y} = \left[\nabla f\right] \bullet \bar{e}_y \ ; \ \frac{\partial f}{\partial z} = \left[\nabla f\right] \bullet \bar{e}_z \ ; \ df = \nabla f \bullet d\bar{l} \ ; \ dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

la independencia del límite respecto a la ruta seguida por dl sigue manteniéndose, solo que cada ruta utilizada solo permiten calcular una componente del límite vectorial que define al gradiente. Una generalización inmediata para f(x,y,z,t) nos lleva a

$$df = \nabla f \bullet d\bar{l} + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Una función vectorial equivale a tres funciones escalares en general distintas. En el análisis matemático de funciones de varias variables independientes son de la mayor importancia las integrales de superficie y de línea. Según la naturaleza del campo estas integrales se pueden relacionar con propiedades físicas importantes. En el caso de la hidrodinámica, la integral de superficie del campo de velocidades se relaciona directamente con la conservación de la masa, como veremos, y la integral de línea está relacionada con el carácter rotacional del campo, es decir, con la *tendencia* del campo de velocidades a producir vórtices o remolinos. En el caso del campo electromagnético, la integral de superficie está relacionada con la carga eléctrica y la integral de línea con la inducción electromagnética. Los teoremas de la divergencia y del rotacional amplían la fusión entre cálculo y álgebra y son, matemáticamente, condiciones necesarias para cualquier campo vectorial de comportamiento continuo

 $\oint \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S} = \oint \overline{\nabla} \bullet \overline{f}(x, y, z, t) dV \Rightarrow \overline{\nabla} \bullet \overline{f}(x, y, z, t) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S}}{\Delta v} \quad teorema \ de \ la \ divergencia$   $\oint \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{l} = \int \left[ \overline{\nabla} \times \overline{f}(x, y, z, t) \right] \bullet d\overline{S} \Rightarrow \overline{\nabla} \times \overline{f}(x, y, z, t) \Big|_{\Delta \overline{S}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S}}{\Delta S} \quad teorema \ de \ la \ divergencia$ 

El teorema de la divergencia transforma una integral del campo sobre una superficie cerrada en una integral de la divergencia del campo sobre el volumen definido por dicha superficie. El teorema del rotacional transforma una integral del campo sobre una línea cerrada en una integral de superficie sobre cualquier superficie limitada por dicha línea cerrada; como una pompa que empieza a salir de un pompero. Note el lector que estas integrales se evalúan

sobre líneas, superficies y volúmenes, en un instante t el mismo para todos los puntos del espacio afectados. Es decir, se evalúan simultáneamente en todos los puntos del espacio afectados. Note el lector que los propios teoremas sirven para definir cuantitativamente la divergencia y el rotacional<sup>1</sup> de un campo, y que la invarianza frente a cambios de sistemas de coordenadas de volúmenes, superficies y producto escalar supone necesariamente el carácter invariante de la divergencia frente a cambios de sistema de coordenadas. Sobre el carácter vectorial de los elementos de superficie planos (dS) el lector puede consultar el apéndice matemático. La dirección de los vectores dS en las integrales es siempre perpendicular a la superficie y el sentido es : 1-Para una superficie cerrada este sentido es hacia el exterior del volumen delimitado: 2-Para una superficie abierta este sentido depende según la regla de la rosca de la tuerca o de la mano derecha del sentido de circulación de dl en la integral de línea correspondiente. Note el lector que la definición dada de divergencia y rotacional introduce cierta generalización ya que solo se necesita que las correspondientes integrables; funciones sean no necesariamente diferenciables. Vemos que en el análisis matemático de campos adquiere relevancia el uso del operador gradiente en formas análogas al caso del álgebra vectorial. El rotacional de un campo se expresa como el producto vectorial del gradiente y el campo vectorial. La divergencia se expresa como el producto escalar del gradiente por el campo vectorial.

$$\overline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right);$$

$$\overline{\nabla} \bullet \overline{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left(f_x, f_y, f_z\right) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z};$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(f_x, f_y, f_z\right) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}\right)$$

puesto que el lenguaje matemático de los campos depende del operador gradiente, el lector necesitará un uso ágil del álgebra de este operador; de la misma forma que en el caso de análisis de funciones de una variable se necesita utilizar la derivada de una función. Existe una regla sencilla para calcular la acción del operador gradiente sobre el producto de dos campos. La regla consiste en aplicar la propiedad de la derivada de un producto de funciones que equivale a considerar, alternativamente, una y otra función constantes de cara a la derivación y sumar los resultados

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial}{\partial x}(f_pg + fg_p) = f_p \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}g_p = f \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}g$$

los valores afectados por el subíndice *p* no deben considerarse como variables, sino como valores numéricos evaluados en el punto de derivación correspondiente. Descomponiendo el producto en una suma similar a la anterior, lo siguiente que debemos hacer es utilizar las reglas habituales del álgebra vectorial, incluyendo el producto mixto y el doble producto vectorial :

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> El subíndice del rotacional indica la componente de este en la dirección definida por  $\Delta S$  y el sentido definido a partir del sentido de circulación de la integral de línea (regla de la rosca de la tuerca o de la mano derecha).

para cualesquiera vectores  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ 

$$\overline{A} \bullet (\overline{B} \times \overline{C}) = (\overline{A} \times \overline{B}) \bullet \overline{C} = (\overline{C} \times \overline{A}) \bullet \overline{B} \qquad producto \quad mixto$$
$$\overline{A} \times (\overline{B} \times \overline{C}) = \overline{B}(\overline{A} \bullet \overline{C}) - \overline{C}(\overline{A} \bullet \overline{B}) \qquad doble \ producto \ vectorial$$

además el producto mixtorepresenta físicamente el volumen del paralelepípedo formado a partir de  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ 

....y reordenar los términos siguiendo el álgebra vectorial asegurando que el operador gradiente no actúe derivando un término que se ha establecido como constante numérica.

$$\nabla(fg) = \nabla(f_pg + fg_p) = f_p \nabla g + g_p \nabla f$$

$$\overline{\nabla} \bullet (f\overline{g}) = \overline{\nabla} \bullet (f_p\overline{g} + f\overline{g}_p) = f_p\overline{\nabla} \bullet \overline{g} + \overline{g}_p \bullet \overline{\nabla} f$$

$$\overline{\nabla} \times (f\overline{g}) = \overline{\nabla} \times (f_p\overline{g} + f\overline{g}_p) = f_p\overline{\nabla} \times \overline{g} + (\overline{\nabla}f) \times \overline{g}_p$$

$$\overline{\nabla} (\overline{g} \bullet \overline{f}) = \overline{\nabla} (\overline{g}_p \bullet \overline{f} + \overline{g} \bullet \overline{f}_p) = \overline{g}_p \times (\overline{\nabla} \times \overline{f}) + (\overline{g}_p \bullet \overline{\nabla})\overline{f} + \overline{f}_p \times (\overline{\nabla} \times \overline{g}) + (\overline{f}_p \bullet \overline{\nabla})\overline{g}$$

$$\overline{\nabla} \bullet (\overline{f} \times \overline{g}) = \overline{\nabla} \bullet (\overline{f_p} \times \overline{g} + \overline{f} \times \overline{g}_p) = \overline{f_p} \bullet (\overline{g} \times \overline{\nabla}) + \overline{g}_p \bullet (\overline{\nabla} \times \overline{f}) = -\overline{f_p} \bullet (\overline{\nabla} \times \overline{g}) + \overline{g}_p \bullet (\overline{\nabla} \times \overline{f})$$

$$\overline{\nabla} \times (\overline{f} \times \overline{g}) = \overline{\nabla} \times (\overline{f_p} \times \overline{g} + \overline{f} \times \overline{g}_p) = (\overline{\nabla} \bullet \overline{g})\overline{f_p} - (\overline{f_p} \bullet \overline{\nabla})\overline{g} - (\overline{\nabla} \bullet \overline{f})\overline{g_p} + (\overline{g_p} \bullet \overline{\nabla})\overline{f}$$

Otra relación también válida en base al álgebra vectorial es

$$\overline{f} \bullet \left[ \overline{\nabla} g \right] = \left[ \overline{f} \bullet \overline{\nabla} \right] g$$

Un campo vectorial también puede representar el movimiento de una partícula: se puede escribir la velocidad de una partícula como v(x(t),y(t),z(t)) = v(t). Donde las funciones x(t),y(t),z(t) determinan la posición de la partícula en cada instante de tiempo. Por tanto las propiedades cinemáticas de una partícula : *posición, velocidad, aceleración*; se pueden representar mediante campos vectoriales que solo dependen del tiempo. Así, si elegimos g=v(t) en la expresión del gradiente del producto escalar tendremos

$$\overline{v}(t) \times \left(\overline{\nabla} \times \overline{f}(x, y, z, t)\right) = \overline{\nabla}(\overline{v}(t) \bullet \overline{f}(x, y, z, t)) - (\overline{v}(t) \bullet \overline{\nabla})\overline{f}(x, y, z, t)$$

ya que las derivadas parciales de v(t) respecto de las coordenadas espaciales (x,y,z) son nulas.

En general, en un campo f(x,y,z,t) podemos considerar el movimiento de una partícula o elemento de fluido según una trayectoria, de modo que los valores del campo para esta partícula serán f(x(t),y(t),z(t),t); lo que permite calcular la derivada temporal completa de f(t) y relacionarla con las derivadas parciales correspondientes

$$\frac{d\overline{f}}{dt} = \frac{\partial\overline{f}}{\partial t} + (\overline{v} \bullet \nabla)\overline{f} \quad ; \ \overline{v} = velocidad \ partícula$$

el término afectado por la velocidad se denomina a veces *derivada o término convectiva*. Por otro lado, si en la misma fórmula del gradiente del producto escalar elegimos f = g = u(x,y,z,t) tenemos

$$\overline{u}(x, y, z, t) \times \left(\overline{\nabla} \times \overline{u}(x, y, z, t)\right) = \frac{1}{2} \overline{\nabla} \left[\overline{u}(x, y, z, t)\right]^2 - (\overline{u}(x, y, z, t) \bullet \overline{\nabla}) \overline{u}(x, y, z, t)$$

resultado que será utilizado mas adelante en el análisis del campo de velocidades de un fluido.

También podemos incluir en el álgebra del operador gradiente expresiones en las que aparecen productos de este operador por si mismo, lo que conduce a derivadas parciales de 2º orden. En este caso la aplicación del álgebra vectorial es mas directa

$$\overline{\nabla} \bullet \left[ \overline{\nabla} f \right] = \left[ \overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \right] f$$

$$\overline{\nabla} \times \left[ \overline{\nabla} \times \overline{g} \right] = \overline{\nabla} \left[ \overline{\nabla} \bullet \overline{g} \right] - \left[ \overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \right] \overline{g}$$

$$\overline{\nabla} \bullet \left[ \overline{\nabla} \times \overline{g} \right] = \left[ \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \right] \bullet \overline{g} = 0$$

$$\overline{\nabla} \times \left[ \overline{\nabla} f \right] = \left[ \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \right] f = 0$$

$$\overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} = \overline{\nabla}^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}, - \frac{\partial^2}{\partial z \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

La anulación de la última expresión se debe a que las derivadas parciales cruzadas conmutan para cualquier par de variables si los campos correspondientes son continuos y derivables.

Para completar el carácter vectorial de operador gradiente, es necesario determinar las reglas de cambio de sistema de referencia. Si tenemos un sistema de coordenadas cartesianas (*xyz*), otro sistema de coordenadas alternativo ( $\alpha\beta\gamma$ ), que no tienen por que ser cartesianas, y un campo escalar  $f(\alpha,\beta,\gamma,t)$ , siempre podemos considerar el campo  $f(\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z),\gamma(x,y,z),t)$  utilizando las funciones de transformación entre los dos sistemas coordenados. Podemos calcular la componente del gradiente en la dirección x utilizando la regla de la cadena para funciones compuestas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \beta}, \frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)$$

lo que nos permite utilizar la siguiente expresión para el gradiente utilizando el álgebra de matrices

$$\overline{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \end{pmatrix}$$

Las coordenadas  $(\alpha\beta\gamma)$  pueden ser cartesianas en distinta referencia (giradas y/o desplazadas) respecto de (*xyz*), o coordenadas esféricas, cilíndricas, etc, en la misma referencia que (*xyz*). El gradiente puede expresarse en distintas coordenadas, pero siempre como derivadas parciales de coordenadas cartesianas. Es decir, siempre como el lado izquierdo de la expresión anterior y a veces como el vector de derivadas parciales del lado derecho. Para una ampliación sobre esto consulte el apéndice de transformaciones.

#### 2<sup>a</sup> Ley de Newton para un elemento de fluido



El dibujo representa un volumen de fluido de forma cúbica en un tiempo dado. La materia contenida en este volumen está afectada por las fuerzas de contacto superficial derivadas de la presión y la fuerza de gravedad distribuida en volumen. Según el teorema del centro de masas de la mecánica, la acción de las fuerzas sobre la materia

contenida en el volumen de control en un instante *dt* generarán un cambio en la posición *dr* y en la velocidad *dv* de su centro de masas. En principio la materia fluida puede adoptar una forma distinta de la cúbica al final de este proceso, incluso cambiar de volumen y por tanto de densidad<sup>2</sup>. Sin embargo creemos que tomando el límite de un elemento de volumen muy pequeño, la diferencia entre la velocidad del centro de masas y la velocidad del fluido es despreciable. El análisis de fuerzas en la dirección *x* sería así :

$$(p_i - p_d)dS_x + dm g_x = dm a_x; \Delta x = x_i - x_d \rightarrow \left(\frac{p_i - p_d}{x_i - x_d}\right)\Delta x dS_x + dm g_x = dm a_x$$

donde *dm* es la masa contenida en el elemento de volumen y es igual al producto de la densidad en ese punto y ese instante por el volumen. Los subíndices *i* y *d* hacen referencia a izquierda y derecha respecto al centro de coordenadas. El cociente entre paréntesis representa, en el límite en que  $\Delta x$  tiende a cero, la derivada parcial del campo de presiones p(x,y,z,t) respecto de la coordenada *x* en el punto  $x_0, y_0, z_0$ . Por otro lado  $\Delta x dS_x$  es el volumen del elemento de fluido *dV*, pero con signo negativo ya que  $\Delta x < 0$ . Si repetimos el planteamiento para los otros dos ejes *y*,*z* obtendremos conclusiones similares

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = \rho a_x; -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = \rho a_y; -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = \rho a_z \rightarrow$$
$$-\nabla p + \rho \overline{g} = \rho \overline{a}; \ \rho = \frac{dm}{dV} = \rho(x, y, z, t)$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Ver en el apéndice el Teorema de Helmholtz.

Para deducir esta ecuación diferencial hemos utilizado un sistema de coordenadas x, y, z en reposo local a un elemento de fluido, pero evidentemente la ecuación es válida en todos los sistemas de referencia inerciales posibles. En caso de utilizar un sistema de coordenadas no inercial, debemos introducir las fuerzas de inercia correspondientes, que son siempre fuerzas de volumen. Siguiendo la exposición hecha en [1] la ley de fuerzas para un sistema no inercial es

$$\rho \overline{a}_{A} = -\nabla p + \rho \overline{g} - \rho \overline{a}_{DI}(t) - \rho \overline{\alpha} \times \overline{r} - \rho \overline{w} \times (\overline{w} \times \overline{r}) - 2\rho \overline{w} \times \overline{v}_{A}$$

donde  $v_A$  y  $a_A$  son la velocidad y aceleración del elemento de fluido respecto al sistema de coordenadas no inercial;  $a_{DI}$  es la aceleración de desplazamiento entre el sistema de referencia no inercial y el inercial. Para una comprensión mas sencilla de los vectores implicados, el lector puede considerar un instante en que los dos sistemas de coordenadas involucrados en la expresión anterior : el inercial y el no-inercial, coinciden; es decir, la matriz de transformación correspondiente a dicho instante es la matriz identidad.

Anteriormente se ha introducido el campo de velocidades de un fluido a partir de medidas sobre partículas-test. Podemos expresar la velocidad de las expresiones anteriores, que se refiere a una partícula-test concreta, por medio del campo de velocidades u(x,y,z,t). Basta considerar que para nuestra partícula-test las coordenadas espaciales serán una función del tiempo :  $u(x_i(t),y_i(t),z_i(t),t)$ , donde *i* designa una partícula concreta; de modo que tenemos, utilizando las reglas de derivación parcial y de función compuesta:

$$\frac{d\overline{v}_{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\overline{u}(x_{i}(t), y_{i}(t), z_{i}(t), t) = \frac{dx_{i}}{dt}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + \frac{dy_{i}}{dt}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} + \frac{dz_{i}}{dt}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{u}}{\partial t}$$

$$pero \ \overline{v}_{A} = \left(\frac{dx_{i}}{dt}, \frac{dy_{i}}{dt}, \frac{dz_{i}}{dt}\right) = \overline{u}(x_{i}, y_{i}, z_{i}, t) \text{ por la definición del campo de velocidades}$$

$$y \text{ entonces} \quad \frac{d\overline{v}_{A}}{dt} = \left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right)\overline{u} + \frac{\partial\overline{u}}{\partial t}$$

ya que las derivadas parciales se evalúan en el punto  $(x_i, y_i, z_i)$  que ocupa el elemento de fluido en el instante *t*, con lo que la 2<sup>a</sup> Ley de Newton expresada en términos del campo de velocidades u(x, y, z, t) es

$$\rho\left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right)\overline{u} + \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \overline{g} - \rho \overline{a}_{DI}(t) - \rho \overline{\alpha} \times \overline{r} - \rho \overline{w} \times \left(\overline{w} \times \overline{r}\right) - 2\rho \overline{w} \times \overline{u}$$

Para el caso de un sistema de coordenadas inercial, la 2<sup>a</sup> Ley de Newton, queda así:

$$\rho\left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right)\overline{u} + \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\overline{\nabla}p + \rho \overline{g}; \quad (\overline{u} \bullet \overline{\nabla})\overline{u} = \frac{1}{2}\overline{\nabla}(u^2) - \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{2}\overline{\nabla}(u^2) + \frac{1}{\rho}\overline{\nabla}p + \overline{\nabla}V = \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) - \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$$

donde V representa el potencial gravitatorio, relacionado con la intensidad de campo gravitatorio g por la operación gradiente. Note el lector que si la ecuación dinámica anterior es de validez general, entonces sus soluciones

generales serán muy complejas ya que debe incluir casos de movimiento turbulento de fluidos. En el caso mas sencillo de un fluido en movimiento estacionario su campo de velocidades será u(x,y,z), es decir, no depende del tiempo; con lo que la derivada parcial correspondiente se anula. En condiciones de densidad constante podemos introducir la densidad dentro del gradiente así:

$$\overline{\nabla}(\frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} + V) = \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u})$$

Si integramos esta expresión a lo largo de una *línea de corriente*, cuyos elementos dr son paralelos al campo vectorial u(x,y,z) en cada punto

$$\int_{1}^{2} \overline{\nabla} (\frac{1}{2} \rho u^{2} + p + \rho V) \bullet d\overline{r} = \Delta_{linea-corriente} (\frac{1}{2} \rho u^{2} + p + \rho V)$$
$$\int_{1}^{2} \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) \bullet d\overline{r} = \int_{1}^{2} (\overline{u} \times d\overline{r}) \bullet (\overline{\nabla} \times \overline{u}) = 0 \quad (\overline{u} \ y \ d\overline{r} \ paralelos)$$

$$\Delta_{linea-corriente}(\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho V) = 0$$

ecuación válida para una línea de corriente de un fluido en movimiento estacionario y de densidad invariable. Si suponemos además que el campo de velocidades del fluido es *irrotacional*<sup>3</sup> :  $\nabla \times \overline{u} = 0$ , entonces el resultado anterior es válido para cualquier línea de integración elegida, es decir, para cualesquiera dos puntos en el fluido:

$$\Delta(\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho V) = 0$$

este resultado se conoce como Ecuación de Bernouilli.

Leyes de conservación.



El movimiento fluido se suele realizar a través de conducciones normalmente impermeables y que evitan la perdida de fluido. Consideremos el estado de todo el campo de velocidades en un instante  $t_0$  determinado:  $u(x,y,z,t_0)$ . Consideremos los puntos en una superficie cerrada dentro del fluido en ese instante. El valor del campo u en los distintos puntos de la superficie nos informa del movimiento del fluido allí, de modo que permiten decir que, en un instante dt, un elemento de fluido sobre la superficie en el punto (x,y,z) se habrán desplazado dr = $u(x,y,z,t_0)dt$ . Según sea el valor de u en

el punto considerado, el s desplazamiento de cada elemento puede suponer *entrar* al interior de la superficie, *salir* al exterior de la superficie o *mantenerse* sobre la superficie. Vamos a dividir la superficie en pequeños elementos de

S vdt  $\theta$   $\vec{v}$ 

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Ver la sección sobre análisis matemático de campos.

superficie a los que vamos a asignar un valor dS y una dirección y sentido dado por la perpendicular al elemento de superficie dS y sentido hacia el exterior de la superficie completa. En este contexto la cantidad

$$d\overline{r} \bullet d\overline{S} = \left[\overline{u}(x, y, z, t_0) \bullet d\overline{S}\right] dt \qquad (1)$$

representa el volumen de fluido que ha entrado o salido a través de la superficie en el punto asociado a dS. Si u(x,y,z,t) y dS son perpendiculares no hay ni entrada ni salida de fluido. Si multiplicamos la expresión anterior por la densidad en el punto correspondiente tendremos la masa de fluido que ha entrado o salido de la superficie. Si integramos la expresión anterior en la variable dS tendremos la masa de fluido neta que ha entrado o salido del volumen limitado por la superficie S. Asignando a la masa saliente un valor positivo y a la entrante negativo; debido a la elección en la dirección del vector elemento de superficie dS, hacia el exterior del volumen cerrado limitado por S. Si en el volumen interior de la superficie S no puede haber procesos de creación o destrucción de masa, entonces la masa que sale o entra a través de S debe estar compensada con la disminución o aumento de la masa de fluido en el volumen limitado por S y en el mismo instante dt

$$\begin{split} \left[ \oint \rho(x, y, z, t_0) \overline{u}(x, y, z, t_0) \bullet d\overline{S} \right] dt + \left[ \oint \rho(x, y, z, t_0 + dt) dV - \oint \rho(x, y, z, t_0) dV \right] = 0 \rightarrow \\ \left[ \oint \rho(x, y, z, t_0) \overline{u}(x, y, z, t_0) \bullet d\overline{S} + \oint \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{t=t0} dV \right] dt \rightarrow \\ \oint \rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S} + \oint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \end{split}$$

y según el teorema de la divergencia, podemos transformar la integral de superficie en una de volumen así

$$\oint \rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S} = \oint \overline{\nabla} \bullet \left[ \rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \right] dV$$

y por tanto, combinando los dos resultados, y al ser la relación válida para cualquier volumen, elemental o no, llegamos a la ecuación diferencial de continuidad.

$$\begin{split} \oint \overline{\nabla} \bullet \Big[ \rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \Big] dV + \oint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \rightarrow \\ \overline{\nabla} \bullet \Big[ \rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \Big] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{split}$$

El planteamiento hecho para la conservación de la masa se puede ampliar fácilmente para otras magnitudes físicas sometidas también a principios de conservación. La materia que atraviesa la superficie cerrada, además de masa, también transporta *impulso mecánico*, *impulso angular* y *energía*. Si multiplicamos la expresión (1) anterior por la densidad y por la componente x de la velocidad del fluido, ambos en el punto correspondiente, tendremos la cantidad de movimiento en la dirección x que ha entrado o salido de la superficie. En este caso en el volumen interior de la superficie S si que hay procesos de creación o destrucción de impulso mecánico debidos a las *fuerzas* que actúan sobre el sistema : la presión distribuida sobre al superficie S y la

gravedad distribuida en el volumen acotado por *S*. En este caso el impulso mecánico del fluido que atraviesa *S* en la dirección *x* mas la modificación del impulso mecánico del fluido en la dirección *x* en dicho volumen, no cancelan; sino que debe ser igual al impulso mecánico en la dirección *x* generado por las fuerzas en el fluido acotado por S; todo evaluado en el mismo instante *dt* 

$$\begin{split} \left[\oint \rho(x, y, z, t_0) u_x \overline{u}(x, y, z, t_0) \bullet d\overline{S}\right] dt + \\ \left[\oint \rho(x, y, z, t_0 + dt) u_x(x, y, z, t_0 + dt) dV - \oint \rho(x, y, z, t_0) u_x(x, y, z, t_0) dV\right] = \\ dt \left[-\oint p\overline{e_x} \bullet d\overline{S} + \oint \rho\overline{e_x} \bullet \overline{g} dV\right] \rightarrow \\ \oint \left[\rho(x, y, z, t) u_x \overline{u}(x, y, z, t) + p\overline{e_x}\right] \bullet d\overline{S} + \oint \left[\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} - \rho\overline{e_x} \bullet \overline{g}\right] dV = 0 \end{split}$$

donde  $e_x$  es un vector unitario en la dirección positiva del eje de coordenadas x que utilizamos para proyectar las fuerzas sobre dicho eje. Aplicando nuevamente el teorema de la divergencia tenemos, para todas las componentes

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} - \rho \bar{e}_x \bullet \bar{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t)u_x \bar{u}(x, y, z, t) + p \bar{e}_x\right) = 0$$
  
$$\frac{\partial \rho u_y}{\partial t} - \rho \bar{e}_y \bullet \bar{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t)u_y \bar{u}(x, y, z, t) + p \bar{e}_y\right) = 0$$
  
$$\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} - \rho \bar{e}_z \bullet \bar{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t)u_z \bar{u}(x, y, z, t) + p \bar{e}_z\right) = 0$$

ecuaciones que expresan la conservación del impulso mecánico. La parte a la izquierda del signo "+" de las ecuaciones se puede poner fácilmente en forma vectorial. En la parte derecha, los argumentos sobre los que actúa la divergencia son vectores que se pueden organizar como columnas de una matriz o tensor de dos índices *i,j* así ( $\delta_{ij}$  símbolo de kronecker,  $\delta_{ij}$  =1 si i=j, =0 si no)

$$\begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{pmatrix} = (\tau_{ij}) = \mathbf{\tau}; \quad \tau_{ij} = \rho u_i u_j + p \delta_{ij}$$

debido a la simetría del tensor<sup>4</sup> podemos expresar las ecuaciones utilizando el álgebra vectorial y de matrices como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \right] - \rho \overline{g}(x, y, z) + \overline{\nabla} \bullet \mathbf{\tau} = 0$$
$$\overline{\nabla} \bullet \mathbf{\tau} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left( \begin{matrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{matrix} \right)$$

la matriz introducida no hace referencia a ningún cambio de coordenadas y tiene unidades de presión. Matemáticamente es un tipo de número compuesto denominado *tensor*. La expresión anterior supone una ampliación del concepto

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Ver apéndice sobre la generalización del teorema de la divergencia y del rotacional.

de divergencia, que se aplica no solo a vectores, sino también a tensores; lo mismo es aplicable al teorema integral de la divergencia. En este caso, la divergencia de un tensor es un vector. El lector no debe ver la exposición hecha como un mero juego matemático. El tensor introducido es un objeto de la mayor importancia y veremos que el rozamiento interno en fluidos añade nuevos valores a las componentes de este tensor. Las tensiones internas en un sólido elástico también se representan mediante un tensor similar; de hecho este es el origen físico de la palabra "tensor".

#### Sistema de ecuaciones para un fluido sin rozamiento interno.

Por supuesto los resultados encontrados en base a la 2<sup>a</sup> Ley de Newton y en base a los principios de conservación deben ser *compatibles*. De modo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para la hidrodinámica de un fluido sin rozamiento interno

$$\rho\left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right)\overline{u} + \rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\overline{\nabla}p(x, y, z, t) + \rho\overline{g}(x, y, z)$$
$$\overline{\nabla} \bullet \left[\rho(x, y, z, t)\overline{u}(x, y, z, t)\right] + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial\rho u_x}{\partial t} - \rho\overline{e_x} \bullet \overline{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t)u_x\overline{u}(x, y, z, t) + p\overline{e_x}\right) = 0$$
$$\frac{\partial\rho u_y}{\partial t} - \rho\overline{e_y} \bullet \overline{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t)u_y\overline{u}(x, y, z, t) + p\overline{e_y}\right) = 0$$
$$\frac{\partial\rho u_z}{\partial t} - \rho\overline{e_x} \bullet \overline{g} + \nabla \bullet \left(\rho(x, y, z, t)u_z\overline{u}(x, y, z, t) + p\overline{e_z}\right) = 0$$

Si hacemos el producto de la 2<sup>a</sup> ecuación por el campo de velocidades *u* y sumamos con la primera ecuación tenemos

$$\rho\left(\overline{u}\bullet\overline{\nabla}\right)\overline{u}+\overline{u}\left(\overline{\nabla}\bullet\left[\rho\overline{u}\right]\right)+\rho\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\overline{u}=-\overline{\nabla}p+\rho\overline{g}\rightarrow$$
$$\left(\rho\overline{u}\bullet\overline{\nabla}\right)\overline{u}+\overline{u}\left(\overline{\nabla}\bullet\left[\rho\overline{u}\right]\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\overline{u}\right]=-\overline{\nabla}p+\rho\overline{g}$$

particularizando para la componente x

$$\left(\rho \overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right) u_x + u_x \left(\overline{\nabla} \bullet \left[\rho \overline{u}\right]\right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho u_x\right] = -\left[\overline{\nabla} p\right] \bullet \overline{e}_x + \rho \overline{g} \bullet \overline{e}_x$$

utilizando las relaciones de la sección anterior sobre análisis matemático de campos tenemos

$$\begin{bmatrix} \overline{\nabla}p \end{bmatrix} \bullet \overline{e}_x = \overline{\nabla} \bullet \begin{bmatrix} p\overline{e}_x \end{bmatrix}$$
$$(\rho \overline{u} \bullet \overline{\nabla})u_x + u_x (\overline{\nabla} \bullet \begin{bmatrix} \rho \overline{u} \end{bmatrix}) = \nabla \bullet (\rho u_x \overline{u})$$

que nos lleva a la 3<sup>a</sup> ecuación en la componente *x*, demostrando de esta manera la compatibilidad del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho u_x \right] - \rho \, \overline{g} \bullet \overline{e}_x + \nabla \bullet \left( \rho u_x \overline{u} + p \overline{e}_x \right) = 0$$

# VISUALIZACIÓN y EJEMPLOS

Flujo incompresible en el Tubo de Venturi



La imagen representa una tubería que se estrecha, atravesada por *agua* en movimiento estacionario. Note el lector que el estrechamiento del tubo es progresivo y no abrupto, de modo que no provoque vórtices, turbulencias o rotaciones del fluido como se indicó en la introducción. Por tanto el campo de

velocidades se supone irrotacional. Las líneas del campo de velocidades se adaptan a la forma de la tubería y en estado estacionario representa la trayectoria que seguiría una partícula-test. Los tubos de medida de arriba son de un diámetro muy pequeño, en ellos el líquido está en reposo; una partícula-test nunca acaba en ellos. Estos tubos miden la presión según la expresión  $p_1$ - $p_{atm}=\rho gh_1$ ,  $p_2$ - $p_{atm}=\rho gh_2$ , donde  $p_{atm}$  es la presión atmosférica y la suponemos aproximadamente igual en los puntos señalados en el dibujo. En rigor en esos puntos la presión atmosférica no es la misma debido a la altura de la correspondiente columna de aire, pero debido a la baja densidad del aire y al alto valor de la presión atmosférica la aproximación está justificada.

Según el dibujo la altura de las correspondientes columnas  $h_1,h_2$  respecto al borde del tubo es distinta y por tanto las presiones  $p_1,p_2$  son distintas. Si suponemos que el fluido mantiene constante su densidad se puede aplicar la ecuación de *Bernoulli* entre dos puntos cualesquiera del fluido

$$\Delta(\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho V) = 0$$

Por otra parte, si tomamos una superficie cerrada de integración igual al lateral del tubo y sus secciones transversales de área *A1* y *A2*, la ecuación de conservación de la masa se transforma en

$$\oint \rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S} = \oint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 = \rho \left[ \int \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{A}_1 - \int \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{A}_2 \right]$$

ya que la densidad es una constante y en el lateral del tubo el campo de velocidades es perpendicular a la superficie y por tanto no hay flujo de fluido por esta superficie. Si suponemos la velocidad del fluido es aproximadamente la misma en todos los puntos de una sección transversal entonces la relación anterior se transforma en

$$\rho(u_2 A_2 - u_1 A_1) = 0 \rightarrow u_2 A_2 = u_1 A_1$$

dado que las velocidades son perpendiculares a las superficies en A<sub>1</sub> y A<sub>2</sub>. Aplicando la ecuación de *Bernouilli* entre dos puntos cualquiera a ambos lados del estrechamiento tenemos

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 + \rho V_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_2 + \rho V_2 = \frac{1}{2}\rho u_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 + p_2 + \rho V_2$$
$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] = p_2 - p_1 + \rho \left(V_2 - V_1\right)$$

El potencial gravitatorio se puede tomar V = gh en este caso, y el origen de alturas h puede ser el eje central del tubo. El cambio de potencial gravitatorio a ambos lados es un valor acotado proporcional a la diferencia entre la raíz *cuadrada* del área  $A_1$  y la raíz cuadrada del área  $A_2$ ; de modo que si la relación de superficies  $A_1/A_2$  y la velocidad del fluido  $u_1$  son relativamente grandes, deben ser esencialmente la presión y el término asociado a la velocidad los que balanceen la ecuación anterior:

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 \left[ 1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \right] \approx p_2 - p_1$$

dado que  $A_1 > A_2$  resulta que  $p_1 > p_2$ , tal como indica el dibujo.

Velocidad de salida del fluido de un depósito

La imagen adjunta representa un depósito de fluido con un área transversal  $S_1$ . En la zona sin fluido hay aire a presión P. El fluido sale por el agujero del fondo de área  $S_2$  con una presión igual a la presión atmosférica  $P_a$ . Tal como se hace

el planteamiento, el movimiento de este fluido no es estacionario y no se verifica  $\partial u / \partial t = 0$  para cualquier punto (x,y,z) ; pero si el orificio de salida es relativamente pequeño, la caída del nivel de fluido se puede considerar relativamente lenta de modo que la parcial respecto al tiempo del campo de velocidades se puede despreciar. Podemos ver esto aplicando la conservación de la masa a una superficie cerrada definida por el lateral del depósito y las áreas  $S_1$  en la superficie del fluido y  $S_2$  en la salida

$$u_2 S_2 = u_1 S_1 \quad S_1 \implies S_2 \rightarrow u_1 \approx 0 \rightarrow \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \approx 0$$

Por otra parte, el estrechamiento brusco  $S_2$  puede producir turbulencias, salvo que el movimiento del fluido en el tanque sea relativamente lento y solo adquiera una velocidad notable en puntos cercanos al agujero de salida. Esto es parecido al desagüe de un pilón, los objetos flotantes lejos del estrecho aliviadero se mueven muy lentamente hacia él y solo aceleran significativamente al acercarse al aliviadero. Resumimos estas aproximaciones con la hipótesis de que el fluido evoluciona de una forma cuasi-estacionaria y por tanto podemos aplicar la ecuación de Bernouilli para un punto en la superficie del líquido y otro en el agujero de salida; lo que permite calcular la velocidad de salida del fluido

$$p + \rho gh = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_{atm} \rightarrow u_2 = \sqrt{2 \frac{p - p_{atm}}{\rho} + 2gh}$$



Si la presión interna *p* es muy pequeña es posible que la velocidad de salida del fluido se anule y el fluido se mantenga en equilibrio hidrostático. Esto es justamente lo que ocurre en la experiencia de Torricelli con  $p \approx 0$ 

$$u_2 = 0 \rightarrow 2\frac{p - p_{atm}}{\rho} + 2gh = 0 \rightarrow p_{atm} = p + \rho gh$$



El resultado sobre la velocidad de salida del fluido es aplicable en caso de que el agujero de evacuación no esté en el fondo del depósito, sino a una lado. En este caso h representa la altura entre la superficie del fluido y el agujero de evacuación. El dibujo adjunto recupera el ejemplo de sobre-presión de la sección de estática; incluyendo una válvula de salida al fondo del tanque. Cuando esta se abre la velocidad inicial de salida del fluido será  $u = \sqrt{2gh}$  donde h es la altura entre la válvula y el nivel del agua en el tubo adjunto. Sin embargo si el diámetro del tubo y de la válvula son similares la altura de la columna de agua caerá muy rápidamente hasta el nivel del tangue. Otra configuración es la evacuación de un depósito elevado por un tubo de servicio. Con la válvula cerrada el tubo está lleno de agua en reposo y en el instante de apertura de la válvula el agua del tubo se moviliza con la misma velocidad en todo él. Este cambio brusco de velocidad nos dice que el principio de Bernouilli no es aplicable al tubo. Si el agua evacuada llena completamente el tubo la conservación de la masa nos dice que en todos los puntos del tubo la velocidad debe ser la misma. Por tanto la velocidad de salida en este caso corresponde con la altura entre el agujero en la base del depósito y la superficie del agua. La presión en la parte alta del tubo conectada al depósito podemos suponerla similar a la atmosférica.

En el caso del primer depósito sin tubo de servicio, el flujo de salida es similar al que cae de un grifo casero y el lector puede comprobar que el chorro se va haciendo mas estrecho al caer. Si recurrimos otra vez a la ecuación de Bernouilli (flujo cuasi-estacionario) para dos puntos, arriba y abajo del chorro

$$\frac{1}{2}\rho u_{arriba}^{2} + p_{atm} + \rho V_{arriba} = \frac{1}{2}\rho u_{abajo}^{2} + p_{atm} + \rho V_{abajo}$$

donde aproximamos que todo el chorro está a la presión atmosférica. Dado que el potencial gravitatorio *V* es superior arriba que abajo, la velocidad arriba debe ser menor que abajo. Aproximando la ley de conservación de la masa para la correspondiente superficie de integración formada por las secciones horizontales  $S_{arriba}$ ,  $S_{abajo}$  y la superficie lateral del chorro

$$u_{arriba} S_{arriba} \approx u_{abajo} S_{abajo}; u_{arriba} < u_{abajo} \rightarrow S_{arriba} > S_{abajo}$$

Sin embargo el cálculo se trata de una aproximación ya que as líneas de corriente en el chorro no son perpendiculares a las secciones horizontales  $S_{arriba}$ ,  $S_{abajo}$ 

patm

patr

# Sifón

Todavía queda física por explicar en el caso del sifón que vimos en la parte estática. Inicialmente al destapar la boca externa el agua cae por su peso y arrastra el resto del agua. En la boca interna del tubo el agua empieza a



moverse y según la ecuación de Bernouilli se produce el siguiente cambio en la boca interna

 $p_0 + \rho gh = const_0 \rightarrow p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho gh = const$ 

Si no hay un cambio brusco, como una onda de choque o impacto físico, es natural considerar que la función de Bernouilli mantiene una continuidad y es  $const_0=const$ . Esto equivale a una *evolución cuasi-estacionaria continua* del fluido. Lo cual supone que el movimiento del fluido introduce un descenso en la presión de la boca interna del tubo. Dado que el fluido del tanque a la misma altura que la boca interna se moverá mas lentamente, tenemos una diferencia de presiones que impulsa el agua hacia la boca interna.

Algo similar ocurre cuando se empañan los cristales dentro de un coche por condensación del vapor de agua. Si se cierran bien las ventanillas y la ventilación exterior y se pone a funcionar el ventilador interno, el movimiento del aire supone una ligera bajada de presión que facilita eliminar la condensación en los cristales.

El hecho de que el agua del tubo se ponga en movimiento supone que la su velocidad se mantiene constante en todo el tubo, dado que la anchura del tubo es constante y el agua es incompresible. La velocidad *v* de salida del fluido se puede calcular como  $v = \sqrt{2gh_0}$ , donde  $h_0$  es la altura entre la boca interior y la superficie del agua según la teoría vista en la sección anterior.

# Tubo de Pitot



El dispositivo de la imagen forma un tubo abierto en las zonas  $A, B \ y \ C$ . Cuando el líquido interno del tubo coloreado en rojo, que puede ser mercurio, está en equilibrio aparece una diferencia de alturas en las dos ramas del codo. Esto se debe a diferencia de presiones en las ramas A y B-C del tubo. En la rama B-C del tubo el fluido (en azul) está en reposo dentro del tubo a la presión  $P_B$ , aproximadamente

igual a  $P_c$ , que debe ser la misma que fuera del tubo, debido a la situación estática dentro del tubo. Por otra parte, en la rama A el fluido (azul) también está en reposo. Si el tubo es suficientemente "aerodinámico" y no provoca turbulencias en la corriente, que suponemos estacionaria. En el punto A la corriente forma un *punto de remanso*, de modo que la velocidad de la corriente es nula en A. Aplicando el teorema de Bernouilli entre A y el punto D:  $p_A = \frac{1}{2}\rho u^2 + p_c$  donde despreciamos el efecto de la gravedad. La diferencia de presiones  $P_a$ - $P_b$  se puede aproximar por la diferencia de alturas del fluido rojo; de modo que una medida de esta altura equivale a una medida de la velocidad del fluido

$$p_A - p_B = \rho_p gh = \frac{1}{2}\rho u^2 \rightarrow u = \sqrt{2\frac{\rho_p}{\rho}gh}$$

donde  $\rho_p$  es la densidad del fluido rojo del tubo de pitot y  $\rho$  es la densidad del fluido que queremos medir. El tubo de pitot se utiliza en aviones para medir la velocidad del aire.

#### Sustentación



La imagen adjunta representa, en una vista de perfil, las líneas de una corriente *estacionaria* de aire sorteando un objeto sólido con forma de ala. Note el lector que el campo de velocidades del aire se ha dibujado con el criterio heurístico señalado antes para una corriente de fluido que se mueve suavemente y

sin turbulencias en régimen laminar. Las líneas de corriente tienden a rodear suavemente los obstáculos o límites que dicha corriente va encontrando. Por otro lado, experimentalmente existe un margen en que el aire se comporta como un fluido incompresible de densidad constante en relación al movimiento de sus corrientes. Podemos analizar la conservación de la masa en un tubo de corriente limitado por los dos segmentos negros de forma análoga a como se hizo en el caso del tubo de Venturi. Vemos en la imagen el tubo dividido en dos partes. La parte inferior formada por las líneas de corriente que pasan por debajo del ala y la parte superior formada por las líneas de corriente que pasan por encima del ala. Imaginemos en el instante t hay una serie de partículas-test alineadas con el segmento negro de la izquierda. Después de cierto tiempo estas partículas-test deben llegar simultánemente alineadas con el segmento negro de la derecha. La conservación de la masa exige esto para un flujo estacionario e incompresible. De lo contrario habría acumulación o pérdida de masa en el interior del tubo y el comportamiento no sería estacionario. Evidentemente, dado que las líneas superiores del tubo recorren una distancia mayor que las líneas inferiores, para que las partículas-test lleguen al mismo tiempo la velocidad del aire debe ser mayor por encima que por debajo del ala.

Podemos hacer una aplicación de la ecuación de Bernouilli tomando dos líneas de corriente que en la zona del segmento de la izquierda estén muy cercanas una a la otra, pero que en la zona del ala acaben separándose: una por la parte superior del ala y otra por la parte inferior. Por tanto para un punto justo sobre el ala y para otro justo debajo del ala tenemos, despreciando el término gravitatorio asociado al grosor del ala

$$\frac{1}{2}\rho u_{sup}^{2} + p_{sup} = \frac{1}{2}\rho u_{inf}^{2} + p_{inf}$$

lo que implica una mayor presión en la parte inferior del ala que en la parte superior, y por tanto aparece una fuerza en sentido ascendente. El ángulo del ala respecto a la corriente de aire es importante en la dinámica, de modo que si el ángulo de ataque es muy grande se pueden generar vórtices o remolinos de aire en la parte superior del ala que actúan en detrimento del empuje ascendente. En casos extremos el avión cae por pérdida de este empuje y se dice que "ha entrado en pérdida"; ha perdido el empuje ascendente y es una situación muy difícil de controlar. Si el ángulo del ala es muy paralelo a la corriente de aire el empuje ascendente depende de que dicha corriente sea lo suficientemente rápida, en caso contrario un avión puede compensarlo aumentando la velocidad respecto al viento al acelerar sus motores.

El empuje ascendente también depende de la densidad del aire. Si en el dibujo anterior la corriente de aire aumenta su temperatura, esto supone que los segmentos negros se alargan por dilatación térmica para contener una misma masa de aire. Esta dilatación supone una disminución de la densidad del aire y de las líneas de corriente, de modo que el cambio de impulso mecánico de la masa de aire en las cercanías del ala disminuye. Por acción-reacción esto supone una disminución del empuje ascendente. Los aviones o helicópteros que descarga agua en los incendios forestales no lo hacen en la vertical de las llamas, la pérdida de sustentación en una nave cargada es muy peligrosa. Descargan el agua en zonas próximas a las llamas para evitar la propagación del incendio. Algo similar ocurre con los helicópteros en edificios en llamas.

Por último, es posible que la velocidad del aire en la parte superior del ala llegue a la velocidad del sonido y en este caso el comportamiento dinámico del aire se muestra como un "muro" para el avión denominado barrera del sonido. Muro que es posible superar, generando el avión en el proceso ondas de choque. Cuando las corrientes de aire sobre el ala se mueven próximas a la velocidad del sonido es cuando la hipótesis de incompresibilidad en la dinámica de las corrientes de aire deja de tener validez y se habla de flujos supersónicos; con un comportamiento físico diferente. El diseño de las alas de los aviones supersónicos suele ser en forma de triángulo y menos gruesas que las del resto de los aviones.

Flujo compresible. Movimiento subsónico y supersónico.



En el caso del tubo de Venturi vimos el caso de una corriente de fluido incompresible atravesando un estrechamiento y las consecuencias derivadas del principio de conservación de la masa y de la ecuación de Euler. En este caso vamos a suponer un fluido compresible moviéndose en régimen estacionario que puede modificar su densidad a medida que circula por una tubería de sección

variable como representa el dibujo. Debido al carácter estacionario, la cantidad de masa que entra desde la izquierda debe ser la misma que sale por la derecha en cualquier instante de tiempo. El principio de conservación de la masa permite encontrar una relación entre las variaciones de las magnitudes afectadas : densidad  $\rho$ , velocidad v y área de la sección del tubo A
$$\rho v A = (\rho + d\rho)(v + dv)(A + dA) \Longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

por otro lado, podemos integrar la ecuación de Euler sobre un elemento de línea de corriente *dl.* Si despreciamos el término asociado a la gravedad tenemos

$$\frac{1}{\rho}\nabla p + \bar{a} = 0 \Longrightarrow \left(\frac{1}{\rho}\nabla p + \bar{a}\right) \bullet d\bar{l} = 0 \implies \frac{dp}{\rho} + vdv = 0$$

Eliminando  $\rho$  de las ecuaciones anteriores tenemos

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{v \, dv}{\frac{dv}{v} + \frac{dA}{A}}$$

Si consideramos que el tubo está aislado adiabáticamente, o la velocidad del fluido es tan grande que apenas hay pérdida de calor en el contacto con las paredes, entonces podemos suponer que cada unidad de masa del fluido que se mueve en el tubo sigue un *proceso adiabático o isentrópico*. Para el caso en que el fluido se aproxime a un gas ideal, existe una constante K del proceso adiabático que verifica

$$p = K\rho^{\gamma} \Longrightarrow \frac{dp}{d\rho} = K\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma p\rho^{-\gamma}\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho} = c^2; \quad \gamma = \frac{C_p}{C_{\gamma}}$$

donde *c* es la velocidad del sonido como se vio en [2] y  $\gamma$  es una constante igual a la división entre las capacidades caloríficas del fluido a presión constante y a volumen constante. Sustituyendo este último resultado en la penúltima ecuación tenemos



En el caso incompresible del tubo de Venturi un estrechamiento del tubo dA < 0, conduce a un aumento de la velocidad del fluido dv>0 y un ensanchamiento a una disminución de la velocidad. En el caso compresible descrito por la ecuación anterior esto sigue siendo cierto, pero solamente si el gas se mueve a una velocidad inferior a la del sonido v<c. Si el gas se mueve a una velocidad superior a la del sonido, entonces un estrechamiento del tubo conduce a una disminución de la velocidad y un ensanchamiento del tubo conduce a un aumento de la velocidad. Este aumento de velocidad en el flujo se puede conseguir efectivamente y se utiliza en las toberas para la propulsión de cohetes. El dibujo representa un diseño de tobera. En la parte A se encuentra el motor donde se realiza la reacción química del carburante que genera gases en régimen subsónico, pero a medida que avanzan por el estrechamiento llegan a alcanzar, en la parte mas estrecha, la velocidad del sonido. A partir de aquí el flujo entra en régimen supersónico y sigue aumentando su velocidad a medida que avanza por el ensanchamiento.

#### Equilibrio Geostrófico

Si en un fluido, como el aire, hay una diferencia de presiones entre dos puntos, normalmente el fluido se mueve de la zona de mayor presión a la de menor. En un sistema de coordenadas no inercial, como la tierra, este movimiento afecta a la componente dinámica de *Coriolis*, que produce una desviación en el camino recto desde la zona de alta presión a la de baja presión. A medida que el fluido se mueve aumenta su velocidad y por tanto también la desviación por efecto Coriolis, de modo que es posible que se llegue a un equilibrio entre la velocidad del fluido *u* y el gradiente de presión que resulte en una aceleración nula del fluido respecto del sistema de coordenadas no inercial :  $\nabla p + 2\rho \overline{w} \times \overline{u} = 0$  donde hemos despreciado los términos asociados a la aceleración centrífuga y la gravedad(variación de altura). Si hacemos el producto escalar por la velocidad del fluido tenemos

$$\overline{u} \bullet \nabla p + \overline{u} \bullet \left(2\rho \overline{w} \times \overline{u}\right) = 0 \to \overline{u} \bullet \nabla p = 0$$

y por tanto, en esta situación de equilibrio que hemos postulado, el viento se mueve perpendicularmente al gradiente de presión, es decir, el viento se mueve paralelamente a las superficies de presión constante o *isobaras*. Este resultado se comprueba experimentalmente con cierta precisión en casos en que el radio de curvatura de las líneas de corriente es alto; cuando esto no es así, como en el caso del viento cercano al ojo de un huracán, la aproximación del viento geostrófico deja de ser útil.

Si imaginamos un centro de bajas presiones en el hemisferio norte de la tierra, dado que el gradiente de presión se dirige hacia las zonas de mayor presión, y teniendo en cuenta la dirección del giro de la tierra w, la ecuación de equilibrio geostrófico predice un movimiento de giro del aire en sentido anti-horario. En el caso de un centro de altas presiones el sentido de giro sería horario, ya que cambia de signo el gradiente de presión. Al comparar el sentido de giro estamos suponiendo un reloj de agujas sobre la superficie de la tierra. Podemos hacer el transporte paralelo de los vectores a un centro de presión similar de las antípodas y las ecuaciones se seguirán manteniendo. Salvo que un reloj en la superficie de las antípodas gira en sentido contrario a nuestro reloj inicial, y por eso el sentido de giro del aire alrededor de los centros de bajas y altas presiones en el hemisferio norte y en el hemisferio sur son opuestos. Un caso extremo de centro de bajas presiones son las corrientes en chorro polares. Las zonas polares se comportan como centros de baja presión de aire debido a su baja temperatura. Los chorros son corrientes de aire que circulan de oeste a este tanto al norte como al sur alrededor de las zonas polares. Un avión comercial en la dirección Tokio-Los Angeles, (oeste-este) puede reducir su tiempo de vuelo en 30 minutos en una ruta que aproveche el viento de cola de la corriente de chorro respecto de la ruta geodésica de mínima distancia o del círculo máximo entre dos puntos. Estas corrientes también se generan en otros planetas, como es el caso de Júpiter, conformado su imagen en bandas característica. El equilibrio geostrófico se suele considerar una primera aproximación válida para el viento real en altura(≈1.000 metros)y también se presenta en algunas corrientes oceánicas. A baja altura hay que tener cuenta la fricción del viento sobre el relieve especifico de la



superficie terrestre. Debido al de proceso calentamiento global se ha podido constatar en Noviembre de 2014 que el centro de bajas presiones el hemisferio asociado en norte normalmente al polo norte geográfico se ha desplazado a Groenlandia. Esto supone una relocalización de la corriente de chorro alrededor de Groenlandia y un cambio en el comportamiento del clima del que seremos testigos. La imagen adjunta muestra la situación.

El golpe de ariete



La imagen representa dos depósitos de agua conectados por una tubería de sección constante con una llave de paso en B. Si el agua fluye por la tubería y cerramos la llave de paso, entonces es preciso que todo el líquido de la tubería pase a estar en reposo. Esto supone un cambio en el impulso mecánico del

agua que podemos estimar por  $mv = \rho SLv$ , siendo *m* la masa de líquido en el tubo,  $\rho$  la densidad del agua *S* la sección recta del tubo, *L* la longitud del tubo y *v* la velocidad del líquido antes de cerrar la llave. Este cambio necesita de una fuerza que debe proceder de una sobre-presión en la válvula. Si el cierre de la llave se realiza en un tiempo *T* durante el que actúa una sobre-presión media  $\Delta p/2$ , donde  $\Delta p$  representa el máximo de sobre-presión en el proceso tenemos

$$\frac{\Delta p}{2} ST = \rho SLv \Longrightarrow \Delta p = 2\frac{\rho Lv}{T}$$

Sin embargo, si el cierre de la válvula es brusco la ecuación anterior resulta en una sobre-presión máxima infinita, lo cual no es aceptable. En la práctica, si se cierra bruscamente la tubería aparece el fenómeno del *golpe de ariete* que resulta en una especie de "eco de presión" que puede dañar la instalacion. La física de este caso pasa por considerar ondas de presión propagándose a través del agua y el tubo. La sobrepresión en B es una alteración del campo de presiones y de las tensiones en el tubo metálico que se propagan como ondas elásticas llegando hasta A y rebotando para volver a B. Este es el origen de la sensación de eco cuando se experimenta el fenómeno. Si llamamos *c* a la velocidad de propagación de esta onda podemos expresar la ecuación anterior como

$$\Delta p = \frac{\rho 2Lv}{T} = \frac{\tau}{T} \rho c v$$

donde  $\tau$  es el tiempo que tarda la onda de presión/tensión en retornar a la llave de paso en B. Aparecen dos casos

 $1-T > \tau$ , en este caso el cierre de la llave se considera lento y es válida para la sobre-presión la fórmula

$$\Delta p = 2 \frac{\rho L v}{T}$$

 $2-T \leq \tau$ , en este caso, correspondiente al golpe de ariete la sobrepresión máxima es

 $\Delta p = \rho c v$ 

ya que el tiempo de frenado del agua en el tubo no puede ser inferior a *t* segundos.

Aliviaderos en grandes presas



Cuando el nivel del agua es excede la capacidad de una presa para soportarlo se deben utilizar rebosaderos o aliviaderos para eliminar el exceso de agua. Esto puede ocurrir por crecidas periódicas u otros eventos imponderables. Los aliviaderos son rampas por las que el agua de la parte superior de la presa se desliza hasta el lecho del río. En su caída el agua gana una gran cantidad de energía cinética, y al caer al lecho del río el efecto de ariete puede poner en riesgo los cimientos de la propia presa. Para evitar esto a la rampa del aliviadero se

la añade una curva hacia la horizontal en su parte final. De este modo la corriente de agua a gran velocidad experimenta una fuerte curvatura, lo que implica un fuerte gradiente de presión; como se verá en la sección *Sistema de coordenadas intrínseco de una corriente estacionaria*. Este gradiente de presión se propaga como una onda y es capaz de provocar la pulverización de parte del agua en la atmósfera en forma de pequeñas gotas; disipando parte de la energía de la corriente de modo que se puede reducir el efecto ariete considerablemente.

### Cavitación y Sono-Luminiscencia

En fluidos sometidos a fuertes cambios de presión, si dicha presión está cercana a la presión de vapor se suelen formar burbujas de vapor. Estas burbujas se muevan hacia zonas de mayor presión implosionando y generando ondas de choque que pueden dañar la superficie de los metales. Estas burbujas necesitan de algún agente donde formarse, como superficies metálicas, impurezas en el fluido, etc. La temperatura es un factor determinante para el fenómeno de la cavitación, ya que la presión de vapor depende de la temperatura. La cavitación es una causa típica de la erosión o corrosión de las hélices que impulsan los barcos modernos. Un flujo que circule a gran velocidad por una arista afilada está sometido a fuertes cambios de presión, debido a la relación entre la curvatura de líneas de corriente y gradientes de presión, lo que facilita la aparición de cavitación.

Por otra parte, si las burbujas formadas en la cavitación se ven afectadas por ondas ultrasónicas, es decir, ondas asociadas a rápidos cambios de presión en el fluido; entonces si las ondas son suficientemente intensas es posible inducir un rápido colapso de la burbuja de cavitación generándose destellos luminosos al final del colapso. Se supone que en el final del colapso parte de la burbuja se convierte en plasma electrónico a temperaturas locales de 20.000 Kelvin y que al recombinarse con los átomos se genera el destello.

## Campos asociados a un fluido. Entalpía.

Un elemento de fluido es una cierta cantidad constante de materia dm que ocupa cierta cantidad de volumen dV que puede variar con el tiempo. Es evidente que este elemento de materia puede tener definidas magnitudes :eléctromagnéticas, físicas de todo típo ópticas. termodinámicas... relacionar estas magnitudes Evidentemente necesitamos con el comportamiento de las corrientes. Un ejemplo es la entalpía termodinámica. Suponemos que las magnitudes termodinámicas Temperatura, presión...etc están bien definidas en todo elemento de fluido, es decir, todo elemento de fluido está próximo al equilibrio termodinámico. Un elemento de fluido tendrá definida una entalpía que será en general un valor diferencial, pero si referimos esta entalpía a la cantidad constante de materia del elemento tenemos una magnitud intensiva describible como un campo h(x,y,z,t): un elemento de fluido en la posición (x,y,z) y en el instante t tiene un entalpía por unidad de masa h. Tomando e como la energía interna por unidad de masa y v como el volumen por unidad de masa, la definición termodinámica de entalpía nos lleva a

$$h = e + pv \Longrightarrow dh = (de + pdv) + vdp$$

Según el principio de conservación de la energía una diferencial de e vale

$$de = TdS - pdv + dW_{rozamiento}$$

donde T es la temperatura S la entropía y W es el trabajo disipado en el rozamiento del elemento con el resto del fluido. Si suponemos que; ya sea en la corriente fluida completa o en la zona de interés, el rozamiento y el intercambio de calor entre el elemento y el resto del fluido es despreciable tenemos

$$dW_{rozamiento} = 0, \ dS = 0 \Longrightarrow de + pdv = 0 \Longrightarrow dh = vdp$$

Si dividimos por *dt* el resultado anterior introducimos la derivada temporal de dos campos en el resultado. Podemos sustituir la derivada temporal de los campos de entalpía y de presión en función de las correspondientes derivadas parciales, como se dijo en la sección sobre análisis de campos

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left( \overline{u} \bullet \nabla \right) h = v \frac{\partial p}{\partial t} + v \left( \overline{u} \bullet \nabla \right) p \Longrightarrow \frac{\partial h - v \partial p}{\partial t} = \overline{u} \bullet \left[ v \nabla p - \nabla h \right]$$

Note el lector que la parte de la derivada parcial temporal ahora no tiene por que anularse necesariamente ya que no se refiere a un elemento de materia, sino a un elemento de volumen fijo del sistema de coordenadas. Pero si la corriente y los campos h() y p() son estacionarios entonces la parcial con el tiempo se anula y el resultado es

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla h$$

ya que la densidad  $\rho$  es la inversa del volumen por unidad de masa v. Note el lector que las aproximaciones que hemos tomado son : rozamiento interno despreciable del fluido, evolución adiabática para los elementos de fluido y campos estacionarios; pero *no se ha supuesto nada sobre la compresibilidad del fluido*. El resultado, dentro del margen de aproximación señalado, es válida para fluidos compresibles o no; sin embargo la ecuación anterior tiene consecuencias adicionales no apreciables a primera vista. Si tomamos el rotacional de la expresión anterior tenemos, aplicando resultados vistos en la sección sobre análisis de campos

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p\right) = \frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla p + \left(\nabla \frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p = -\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p = \nabla \times \nabla h = 0 \implies \quad \nabla \rho \times \nabla p = 0$$

Esta condición se cumple evidentemente con fluido incompresible ( $\rho$ =constante). Otra posibilidad es que la densidad no sea constante y los gradientes de los campos  $\rho(x,y,z)$  y p(x,y,z) sean paralelos. Dado que los gradientes son perpendiculares a las superficies correspondientes de valor constate, una superficie de densidad constante también es una superficie de presión constante y podemos hacer la relación  $p \rightarrow Superficie(x,y,z) \rightarrow \rho$ ; es decir  $\rho(p)$ . El contexto físico en que nos movemos supone, implícita y necesariamente, que la densidad del fluido es función exclusiva de la presión. Esto se conoce como fluido barotrópico, y de hecho un fluido incompresible es un caso especial de fluido barotrópico con  $\rho(p)$ =constante. Recordando la ecuación de Euler para campo estacionario, válida en este caso ya que supone rozamiento interno despreciable en el fluido, tenemos

$$\frac{1}{2}\overline{\nabla}(u^2) + \overline{\nabla}V + \frac{1}{\rho}\overline{\nabla}p = \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) \Longrightarrow \overline{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + V + h\right) = \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u})$$

por tanto, si dr sigue una línea de corriente entre dos puntos A y B tenemos

$$\int_{A}^{B} \overline{\nabla} \left( \frac{u^{2}}{2} + V + h \right) \bullet d\overline{r} = \int_{A}^{B} \left[ \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) \right] \bullet d\overline{r} = 0 \Longrightarrow \frac{u^{2}}{2} + V + h = cte(linea)$$

ya que *dr* y *u* son vectores paralelos en todo punto. Si añadimos a la lista de aproximaciones anteriores la de flujo irrotacional tenemos que la constante ya no depende de la línea de corriente concreta, sino que es el mismo valor independientemente del punto del fluido considerado

$$\frac{u^2}{2} + V + h = cte$$

El caso del globo aerostático comentado mas arriba indica que la densidad de fluidos como el aire o el agua es función de la temperatura  $\rho(T)$ . Sin embargo si los elementos de fluido siguen un proceso con intercambios de calor y rozamiento despreciables, entonces el proceso es adiabático : dS=0; al menos

durante tiempos relativamente largos, como el caso del calor contenido en el globo aerostático. Para un fluido próximo a *gas ideal*, la ecuación adiabática corresponde a un *fluido barotrópico* 

$$p\rho^{-\gamma} = cte; \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

## PARADOJA DE D'ALEMBERT

Todos conocemos por experiencia que debemos vencer una resistencia si queremos movernos en contra del viento a cierta velocidad. Cualquiera que



haya utilizado una bicicleta sabe por experiencia el efecto de arrastre debido al viento. Al moverse a favor del viento el ciclista reduce su esfuerzo y al moverse en contra el ciclista debe aumentar su esfuerzo para mantener una velocidad dada. Sin embargo en 1752 el matemático y físico Jean le Rond D'Alembert realizó un estudio sobre este problema, basado en hipótesis aparentemente generales, aue (matemáticamente) concluye necesariamente en la inexistencia de la fuerza de arrastre.

La imagen representa un cilindro moviéndose a velocidad constante visto de perfil y las líneas de corriente de un flujo laminar y estacionario que lo rodean. Las hipótesis que utilizaremos son: fluido *incompresible*, campo de velocidades *irrotacional* y *rozamiento nulo* ; tanto el rozamiento interno del fluido (viscosidad) como del fluido contra el cilindro.

### Teoría del flujo potencial

Si el campo de velocidades de un fluido es *irrotacional*, entonces es posible encontrar un campo escalar de modo que el campo de velocidades es igual al gradiente de este campo escalar. Esto es una consecuencia inmediata del teorema del rotacional

$$\oint \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{l} = \int_{1}^{2} \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{l} + \int_{2}^{1} \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{l} = \int \left[ \overline{\nabla} \times \overline{u}(x, y, z, t) \right] \bullet d\overline{S} = 0$$
$$\int_{1}^{2} \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{l} = \int_{1}^{2} \overline{u}(x, y, z, t) \bullet (d\overline{l'}) = \varphi(x_2, y_2, z_2, t) - \varphi(x_1, y_1, z_1, t)$$

si el rotacional es nulo, entonces la integral sobre cualquier línea cerrada del campo de velocidades se anula también. Descomponiendo esta integral en función de dos puntos arbitrarios 1 y 2 de la línea de integración, tenemos que el valor de estas integrales parciales no dependen de la trayectoria entre 1 y 2, y por tanto solo pueden depender de los puntos inicial y final. Si expresamos el resultado anterior en términos diferenciales

$$\overline{u}(x, y, z) \bullet d\overline{l} = d\varphi(x, y, z) \to (u_x, u_y, u_z) \bullet (dx, dy, dz) = d\varphi(x, y, z) \to$$

$$u(x, y, z) = \nabla \varphi$$

Por otra parte, según el álgebra expuesta en la sección de análisis matemático tenemos

$$\overline{\nabla} \times \overline{u}(x, y, z, t) = \overline{\nabla} \times \left(\overline{\nabla} \varphi(x, y, z, t)\right) = \left(\overline{\nabla} \times \overline{\nabla}\right) \varphi = 0$$

de acuerdo con la condición de rotacional nulo. Por tanto necesariamente todo campo de velocidades irrotacional se puede poner como el gradiente de una función escalar  $\varphi$  denominada potencial.

Por otro lado, si el fluido es incompresible, entonces la ley de conservación de la masa indica que la divergencia del campo de velocidades debe ser nulo, y por tanto la función potencial  $\varphi$  debe cumplir lo siguiente

$$\overline{\nabla} \bullet \left[ \rho \overline{u}(x, y, z, t) \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \ \rho = cons \tan te \to \overline{\nabla} \bullet \overline{u}(x, y, z, t) = 0$$
$$\overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \varphi(x, y, z, t) = \left[ \overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \right] \varphi(x, y, z, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x, y, z, t) = 0$$

que es la ecuación diferencial de *Laplace*. De modo que el potencial  $\varphi$  verifica condiciones matemáticas análogas al campo electrostático y es posible elegir para  $\varphi$  campos similares. Pero a diferencia del campo electrostático, en nuestro caso no existen fuentes ni sumideros del campo (cargas). De este modo una solución admisible para el campo de velocidades en nuestro caso es un *campo constante* mas un *campo de tipo dipolar*.

### Ecuaciones de Euler sin viscosidad para flujo potencial

En la sección sobre la 2<sup>a</sup> Ley de Newton aplicada a un fluido obtuvimos el siguiente resultado

$$\frac{1}{2}\overline{\nabla}(u^2) + \frac{1}{\rho}\overline{\nabla}p + \overline{\nabla}V = \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) - \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$$

incluyendo las condiciones de rotacional nulo, flujo potencial y densidad constante/incompresibilidad tenemos, despreciando el término gravitatorio

$$\overline{\nabla}\left[\frac{\rho}{2}(u^2) + p + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] = 0$$

y por tanto el interior del corchete debe ser una cantidad que no cambia con las coordenadas espaciales (x,y,z) y a lo sumo depende del tiempo

$$\frac{\rho}{2}(u^2) + p + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t)$$

Movimiento suave del cilindro en la corriente

Suponemos que el cilindro se mueve con velocidad constante v ( $v_x, v_y, v_z$ ) respecto de un sistema de coordenadas inercial. Este movimiento no produce turbulencias (irrotacional) de modo que las líneas de corriente se van adaptando suavemente a la nueva posición del cilindro y un observador moviéndose con el cilindro observará siempre el mismo campo de velocidades del fluido. Esto significa matemáticamente que, respecto de nuestro sistema de

coordenadas, el campo de velocidades en un instante t corresponde a un *desplazamiento del campo* de velocidades existente en t=0:

$$\overline{u}(x, y, z, t) = \overline{u}(x', y', z', 0) = \overline{u}(x - v_x t, y - v_x t, z - v_x t, 0) \rightarrow$$
$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} = -(\overline{v} \bullet \overline{\nabla})\overline{u}$$

donde hemos aplicado la regla de la cadena de derivadas para funciones compuestas. Por otra parte, en la sección de análisis matemático vimos la siguiente relación

 $\overline{v}(t) \times \left( \overline{\nabla} \times \overline{f}(x, y, z, t) \right) = \overline{\nabla}(\overline{v}(t) \bullet \overline{f}(x, y, z, t)) - (\overline{v}(t) \bullet \overline{\nabla})\overline{f}(x, y, z, t)$ 

en nuestro caso v(t) = v = constante y f = u; de modo que  $\overline{\nabla}(v \cdot u) = (v \cdot \overline{\nabla})u$  y aplicando la condición de rotacional nulo y flujo potencial la ecuación de la derivada parcial anterior queda así

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\nabla} \phi + \overline{\nabla} \left( \overline{v} \bullet \overline{u} \right) = 0 \longrightarrow \overline{\nabla} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \overline{v} \bullet \overline{u} \right] = 0$$

ya que se puede conmutar la derivada parcial temporal con el gradiente, ya que afectan a variables independientes. De nuevo, el interior del corchete no depende de las coordenadas (x,y,z) y como mucho depende del tiempo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{v} \bullet \bar{u} = g(t)$$

y por tanto, eliminando la parcial respecto al tiempo de la ecuación de Euler presentada antes tenemos

$$\frac{\rho}{2}(u^2) + p - \rho(\bar{v} \bullet \bar{u}) = f(t) - \rho g(t) \rightarrow p = \rho(\bar{v} \bullet \bar{u}) - \frac{\rho}{2}(u^2) + h(t)$$

donde h(t) es la función del tiempo correspondiente.

Por otro lado, para un observador solidario al cilindro móvil las líneas de corriente del fluido no pueden finalizar ni nacer de la superficie del cilindro. El cilindro no es ni fuente ni sumidero para el fluido. Por tanto si este observador inercial aplicada la ley de conservación de la masa para una <u>superficie fija</u> que coincida con la superficie del cilindro encontrará que la masa que atraviesa un elemento de superficie en el instante *dt* debe ser igual a cero

$$d\overline{r} \bullet d\overline{S} = \left[ \left( \overline{u}(x, y, z, t_0) - \overline{v} \right) \bullet d\overline{S} \right] dt = 0 \quad (1)$$

donde se ha introducido la *velocidad relativa* con la que el observador aprecia el campo de velocidades del fluido. Si *n* es un vector unitario normal a la superficie del cilindro el resultado se expresa así:

$$\overline{n} \bullet \overline{u}(x, y, z, t) = \overline{n} \bullet \overline{v}$$

En la imagen al principio de esta sección el lector puede ver en el centro una línea de corriente que se mantiene recta hasta la superficie del cilindro. En este punto los vectores **n**,**u**,**v** tienen la misma dirección. Si aplicamos el resultado anterior tenemos que en este punto los vectores velocidad **u**,**v** coinciden. Por tanto, visto desde el observador inercial que se mueve con el cilindro el fluido en este punto está permanentemente en reposo relativo. Por ser inercial el observador puede aplicar directamente la ecuación de Bernouilli y ver que en dicho *punto de remanso* (*stagnation point*) existe un máximo de presión; lo cual debe ser cierto también para cualquier otro observador inercial.

#### Cálculo del arrastre

A partir de la presión calculada antes, la fuerza del fluido sobre el cilindro se expresa mediante

$$\overline{F} = -\oint pd\overline{S} = \oint \left[\frac{\rho}{2}(u^2) - \rho(\overline{v} \bullet \overline{u}) - h(t)\right] d\overline{S} = \oint \left[\frac{\rho}{2}(u^2) - \rho(\overline{v} \bullet \overline{u})\right] d\overline{S} - h(t) \oint d\overline{S}$$
$$\overline{F} = \rho \oint \left[\frac{1}{2}(u^2) - (\overline{v} \bullet \overline{u})\right] d\overline{S}$$

la función h(t) no depende de las coordenadas (x,y,z) y se puede sacar de la integral. La integral de los elementos vectoriales de superficie es cero<sup>5</sup>. Podemos analizar la expresión anterior en la componente *x* multiplicando por un vector unitario en esta dirección $(e_x)$ 



$$\overline{F} \bullet \overline{e}_x = \rho \oint \left[\frac{1}{2}(u^2) - \left(\overline{v} \bullet \overline{u}\right)\right] \overline{e}_x \bullet d\overline{S}$$

vamos a utilizar el teorema de la divergencia sobre la expresión anterior. Para ello se necesita un volumen acotado por una superficie; sin embargo vamos a llevar el teorema al límite eligiendo como volumen todo el volumen ocupado por el fluido, limitado por la superficie del cilindro y una superficie exterior tan alejada del cilindro como queramos. tomaresmo la proposción hecha antes sobre el campo de velocidades *u* como suma de una constante y un *campo dipolar*. El término constante no contribuye a la integral, y en la superficie lejana el campo dipolar es proporcional a  $r^3$ , siendo *r* la distancia al cilindro, mientras que

los elementos de superficie son proporcionales a  $r^2$ . Esto hace que la contribución de la superficie lejana sea tan pequeño como queramos. Por tanto, aplicando el teorema de la divergencia al primer sumando de la integral anterior

$$-\oint \frac{1}{2}(u^2)\bar{e}_x \bullet d\overline{S} = \oint \overline{\nabla} \bullet \left[\frac{1}{2}(u^2)\bar{e}_x\right] dV$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> El lector puede comprobarlo multiplicando la integral escalarmente por un vector constante y aplicando el teorema de la divergencia.

y utilizando las relaciones de la sección de análisis matemático

$$\overline{\nabla} \bullet \left[\frac{1}{2}(u^2)\overline{e}_x\right] = \frac{1}{2}\overline{\nabla}u^2 \bullet \overline{e}_x = \frac{1}{2}\left[2\left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right)\left(\overline{u} \bullet \overline{e}_x\right)\right] = \left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right)\left(\overline{u} \bullet \overline{e}_x\right)$$

de las fórmulas de la sección de análisis matemático tenemos

$$\left(\overline{u}\bullet\overline{\nabla}\right)\left(\overline{u}\bullet\overline{e}_{x}\right)+\left(\overline{u}\bullet\overline{e}_{x}\right)\left(\overline{\nabla}\bullet\overline{u}\right)=\overline{\nabla}\bullet\left[\left(\overline{u}\bullet\overline{e}_{x}\right)\overline{u}\right]$$

en nuestro caso de fluido incompresible  $\overline{\nabla} \bullet \overline{u} = 0$  con lo que la integral correspondiente es

$$-\oint \frac{1}{2}(u^2)\bar{e}_x \bullet d\overline{S} = \oint \overline{\nabla} \bullet \left[\frac{1}{2}(u^2)\bar{e}_x\right] dV = \oint \overline{\nabla} \bullet \left[\left(\overline{u}\bullet\bar{e}_x\right)\bar{u}\right] dV = \oint \left(\overline{u}\bullet\bar{e}_x\right)\bar{u} \bullet d\overline{S}$$

donde hemos vuelto a utilizar el teorema de la divergencia. Con lo que la expresión de la componente *x* de la fuerza es

$$\overline{F} \bullet \overline{e}_x = \rho \oint \left[ \left( \overline{u} \bullet \overline{e}_x \right) \overline{u} \bullet \overline{n} \, dS - \left( \overline{v} \bullet \overline{u} \right) \overline{e}_x \bullet \overline{n} \, dS \right] = \rho \oint \left[ \left( \overline{u} \bullet \overline{e}_x \right) \overline{u} \bullet \overline{n} - \left( \overline{v} \bullet \overline{u} \right) \overline{e}_x \bullet \overline{n} \right] dS$$

donde el vector n es unitario y tiene la misma dirección y sentido que el vector elemento de superficie dS. Aplicando la condición de que las líneas del campo de velocidades no entran ni salen del cilindro y factorizando tenemos

$$(\overline{u} \bullet \overline{e}_x)\overline{u} \bullet \overline{n} - (\overline{v} \bullet \overline{u})\overline{e}_x \bullet \overline{n} = (\overline{u} \bullet \overline{e}_x)\overline{v} \bullet \overline{n} - (\overline{v} \bullet \overline{u})\overline{e}_x \bullet \overline{n} = [\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{e}_x)] \bullet \overline{n}$$

Si multiplicamos la expresión anterior por  $v_x, v_y, v_z$  y sumamos para todas las componentes tenemos

$$\overline{F} \bullet \overline{e}_x v_x + \overline{F} \bullet \overline{e}_y v_y + \overline{F} \bullet \overline{e}_z v_z = \overline{F} \bullet \overline{v} = \rho \oint \left[\overline{u} \times \left(\overline{v} \times v_x \overline{e}_x\right) + \overline{u} \times \left(\overline{v} \times v_y \overline{e}_y\right) + \overline{u} \times \left(\overline{v} \times v_z \overline{e}_z\right)\right] \bullet \overline{n} \, dS$$

y aplicando las propiedades asociativas del producto escalar y del producto vectorial tenemos

$$\overline{F} \bullet \overline{v} = \rho \phi \left[ \overline{u} \times \left( \overline{v} \times \overline{v} \right) \right] \bullet \overline{n} \, dS = 0$$

como resultado, el fluido no ejerce ninguna fuerza de arrastre en la dirección del movimiento del cilindro, en contra de la experiencia. Si el desarrollo hecho es consecuencia necesaria, o muy probable, de las hipótesis básicas, entonces hay alguna hipótesis que no es correcta. ¿Cuál es?.

Pese a ser un resultado notable, la paradoja de D´Alembert tuvo un efecto negativo en el desarrollo de la mecánica de fluidos debido a que nadie supo dar con una solución satisfactoria, bién sea en el dominio matemático o en el dominio experimental, durante mas de 150 años. Esto desprestigió durante largo tiempo la disciplina hasta que a principios de siglo el desarrollo de la aeronáutica introdujo nuevas ideas de la mano de *Ludwig Prandtl.* Sin embargo el daño aún se deja sentir en los planes de estudios universitarios en una materia que debería estar a la altura del Electromagnetismo o la

Termodinámica y que integra como ninguna otra la base de las matemáticas superiores.

# **ONDAS SUPERFICIALES EN EL AGUA**



Imaginemos una piscina con agua en calma a la que lanzamos un objeto pesado que al caer provoca ondas en la superficie del agua. Las ondas generadas parecen moverse desde el lugar de impacto hacia el exterior. En el impacto, el objeto impactante imprime una velocidad al agua durante el proceso de desalojo. Este movimiento del agua provoca una hondonada en

la zona de impacto durante un cierto tiempo, y no se transmite a toda la masa líquida como en el caso de las ecuaciones de Saint-Venant (mas adelante), sino que se trata solo de un fenómeno superficial. En estas circunstancias las "montañas de agua" no duran mucho y la gravedad obliga a un reflujo del agua evacuada hacia la zona de impacto que está a menor nivel, reflujo que acabará por elevar el nivel de la superficie del agua relativamente al entorno próximo repitiendo de nuevo el proceso. Si esparcimos unas partículas-test como bolitas de poliuretano sobre la superficie del agua podemos ver que se mueven oscilando respecto de un punto medio en la vertical y también en la línea horizontal que pasa por el origen de la onda; revelando así el movimiento del agua en este fenómeno.

Existe un dispositivo de laboratorio, la *cubeta de ondas*, en la que se utilizan ondas superficiales de agua para mostrar comportamientos típicamente ondulatorios con son la *reflexión, refracción, interferencia y difracción.* Estos fenómenos se explican tradicionalmente en base al <u>principio de Huygens</u>, pero este principio requiere un <u>comportamiento lineal de las ondas</u> en el sistema. Esto significa que si sobre un sistema puedo reproducir dos procesos ondulatorios independientes, también puedo reproducir un proceso ondulatorio que sea, matemáticamente, la suma de los procesos. Las ecuaciones aplicables en este contexto son :

$$\rho\left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right)\overline{u} + \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\overline{\nabla}p + \rho \overline{g} = -\overline{\nabla}(p - \rho gz)$$
$$\overline{\nabla} \bullet \overline{u} = 0$$

La primera corresponde a la ecuación de Euler y la segunda a la conservación de masa de un fluido incompresible. Supongamos que tenemos dos soluciones de estas ecuaciones que especifican el campo de velocidades y de presiones del fluido : ( $u_1, p_1-\rho z_1$ ) y ( $u_2, p_2-\rho z_2$ ). Si la ecuación de Euler fuese lineal, entonces las funciones ( $u_1+u_2, p_1+p_2 - [\rho z_1+\rho z_2]$ ) serían también solución; pero vemos claramente que esto no es posible debido a que el primer término introduce el valor no compensado siguiente

$$\rho(\overline{u}_1 \bullet \overline{\nabla})\overline{u}_2 + \rho(\overline{u}_2 \bullet \overline{\nabla})\overline{u}_1$$

En cambio la ecuación de conservación de la masa es claramente lineal, si  $u_1$  y  $u_2$  verifican esta ecuación, entonces  $u_1+u_2$  también lo hace.

Si el sistema de ecuaciones anterior puede describir ondas compatibles con el principio de Huygens, entonces debe haber alguna aproximación lineal posible para la ecuación de Euler. Evidentemente la primera alternativa es considerar que para el caso de las ondas superficiales el término no-lineal es cuantitativamente despreciable en la ecuación de Euler, de modo que tenemos el sistema lineal

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\overline{\nabla}p + \rho \,\overline{g}$$
$$\overline{\nabla} \bullet \bar{u} = 0$$

la anulación del término no lineal es compatible con un *flujo irrotacional* :  $(\overline{u} \cdot \overline{\nabla})\overline{u} = \frac{1}{2}\overline{\nabla}(u^2) - \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u})$ ; de modo que podemos considerar que el campo de velocidades deriva del gradiente de una función potencial  $\varphi(x, y, z, t)$ 

$$\overline{\nabla} \left[ \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho g z \right] = 0$$
$$\overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0$$
$$\overline{u} = \overline{\nabla} \varphi$$

la primera ecuación supone que el argumento del gradiente es una función del tiempo

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho \, gz = f(t)$$

y redefiniendo el potencial  $\varphi$  convenientemente tenemos una simplificación equivalente

$$\varphi \rightarrow \varphi + \int f(t)dt \rightarrow \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho gz = 0$$

para una partícula test en la superficie del agua  $(x_s, y_s, z_s)$  la coordenada z será una función del tiempo  $z_s(t)$  y la ecuación anterior será una función del tiempo

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \bigg|_{s} + p_{s}(t) + \rho g z_{s}(t) = 0$$

dado que podemos considerar que la presión atmosférica en la superficie del agua tiene una variación despreciable en la expresión anterior, podemos considerarla constante. Derivando en el tiempo y teniendo en cuenta que la derivada de  $z_s$  es la velocidad del fluido en la dirección vertical, y que esta componente de la velocidad deriva del potencial  $\varphi$  tenemos en total

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{s} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$
$$\nabla^{2} \varphi = 0$$

es decir, la ecuación diferencial del potencial (ecuación de *Laplace*) y una condición de contorno que debe cumplir. Note el lector que la condición de contorno también es lineal sobre el potencial de corriente  $\varphi$ .

La solución mas sencilla para el sistema anterior es una *onda* desplazándose en el eje *x* cuya forma funcional es (ver sección sobre Laplaciano en [3])

$$\varphi = f(z)\cos(kx - wt)$$

que introducida en la ecuación de Laplace determina f(z) por medio de la ecuación diferencial



$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) = 0 \Longrightarrow f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

dado que para valores de *z* negativos, es decir en la dirección del fondo, la amplitud de la onda debe disminuir tenemos

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx - wt)$$

y la condición de contorno es

$$\frac{d}{dt} \left[ wAe^{kz_s} \sin(kx_s - wt) \right] + gkAe^{kz_s} \cos(kx_s - wt) = 0$$

$$wk \frac{dz_s}{dt} Ae^{kz_s} \sin(kx_s - wt) + w\left(k \frac{dx_s}{dt} - w\right) Ae^{kz_s} \cos(kx_s - wt) + gkAe^{kz_s} \cos(kx_s - wt) = 0$$

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x_s} = -kAe^{kz_s} \sin(kx_s - wt); \quad \frac{dz_s}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z_s} = kAe^{kz_s} \cos(kx_s - wt) \Rightarrow -w^2 + gk = 0 \quad ; \quad c = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi}\lambda}$$

donde *c* es la velocidad de la onda, con lo que las ondas de longitud mayor se mueven mas rápido, que las de menor longitud. En general si la frecuencia de la onda es una función no lineal de la longitud de onda se dice que el medio de propagación de las ondas es dispersivo o que la propagación de ondas está sometida a dispersión.

A medida que se consideran longitudes de onda menores hay que considerar el efecto de la tensión superficial, que llega a hacerse preponderante (ondas de capilaridad). Finalmente para comprobar la aproximación lineal a la ecuación de Euler calculemos los términos incluidos en la derivada convectiva

$$\left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right)\overline{u} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(u_x, u_z\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(u_x, u_z\right)$$

para el caso de la componente z tenemos (el lector puede comprobar después la componente x)

$$u_{x}\frac{\partial u_{z}}{\partial x} + u_{z}\frac{\partial u_{z}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial t} = k\left(kAe^{kz_{s}}\right)^{2} - kAwe^{kz_{s}}\sin(kx_{s} - wt) = wkAe^{kz_{s}}\left(\frac{kAe^{kz_{s}}}{c} - \sin(kx_{s} - wt)\right)$$

si suponemos que la velocidad máxima de un elemento de fluido ( $v_{max}$ ) es mucho menor que la velocidad de la onda (c) tenemos

$$v_{\max} = kAe^{kz_s}; v_{\max} \ll c \Rightarrow (\overline{u} \bullet \overline{\nabla})\overline{u} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \approx \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$$

y ya que para valores pequeños de la función seno el resto de términos de la ecuación de Euler serán predominantes, hemos clarificado las condiciones de la aproximación lineal a la ecuación de Euler.

# SISTEMA DE COORDENADAS INTRÍNSECO DE UNA CORRIENTE ESTACIONARIA.



En una corriente estacionaria las líneas de corriente son curvas fijas que no cambian con el tiempo. Esto nos permite utilizarlas en un sistema de coordenadas que sea intrínseco a la corriente. Si en la imagen adjunta las curvas nombradas con el parámetro *t*<sup>\*</sup> corresponden a líneas de corriente, siempre podemos crear otro conjunto de líneas *n* que sean perpendiculares a las líneas de

corriente. Si el flujo de corriente presenta simetría plana, esto sería suficiente. En caso contrario, podemos crear otro conjunto de líneas coordenadas w que sean perpendiculares a las líneas  $t^*$  y n en los puntos de cruce correspondientes. Parametrizando convenientemente estas líneas tendríamos un sistema de coordenadas ortogonal, tal como se explica en el apéndice, definido por la propia corriente estacionaria. El sistema de coordenadas planteado está mas cercano a nuestros conocimientos teóricos de lo que pudiese parecer. Recordemos que las líneas de corriente estacionarias son en realidad trayectorias de partículas de fluido. Como tales podemos introducir la  $2^a$  Ley de Newton con las componentes de la aceleración en función de la curva trayectoria : aceleración tangencial y aceleración normal, perpendicular a la anterior (R es la curvatura de la trayectoria):

$$\rho\left(\frac{dv}{dt}\bar{t} + \frac{v^2}{R}\bar{n}\right) = -\nabla p + \rho \bar{g} - \rho \bar{a}_{DI}(t) - \rho \bar{\alpha} \times \bar{r} - \rho \bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right) - 2\rho \bar{w} \times \bar{u}$$

donde hemos utilizado la expresión para un sistema de coordenadas no inercial genérico. El desplazamiento elemental de una partícula de fluido se puede expresar por  $tdt^*$ , siendo t el vector unitario tangente a la línea de corriente en el punto en que se encuentra la partícula de fluido y  $dt^*=vdt$  un pequeño desplazamiento en la dirección t. Prescindiendo de los efectos no inerciales y de la gravedad, si multiplicamos la expresión anterior por este desplazamiento de la partícula de fluido tenemos

$$\rho\left(\frac{dv}{dt}\overline{t} + \frac{v^2}{R}\overline{n}\right) \bullet \overline{t}v dt = \rho v \frac{dv}{dt} dt = \rho v dv = -(\nabla p) \bullet \overline{t}v dt = -dp$$

e integrando sobre la línea de corriente correspondiente

$$\int_{A}^{B} v dv + \int_{A}^{B} \frac{dp}{\rho} = 0 = \frac{1}{2} \left( v_{B}^{2} - v_{A}^{2} \right) + \int_{A}^{B} \frac{dp}{\rho} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t^{*}} \left( \frac{1}{2} v^{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$

ecuación que es de interés en fluidos compresibles barotrópicos, es decir, aquellos en los que la densidad es variable pero únicamente depende de la presión. Puede verse un fluido incompresible como un caso especial de fluido barotrópico con  $\rho(p)$ =constante.

Si multiplicamos ahora la  $2^a$  Ley de Newton por el vector *n* tenemos, para el caso de un sistema de coordenadas inercial

$$\rho \frac{v^2}{R} = -(\nabla p) \bullet \overline{n} = -\frac{\partial p}{\partial n}$$

dado que el lado izquierdo de la ecuación es positivo, la variación de presión en la dirección del vector normal debe ser negativa. Dado que el vector normal apunta hacia la posición del centro de curvatura de la línea de corriente, tenemos que la presión en un fluido debe disminuir en la dirección del centro de curvatura de una línea de corriente. Este resultado predice claramente que en el caso de corrientes circulares como remolinos, huracanes....en todos los casos el centro del vórtice tendrá una presión menor que los alrededores; lo cual no sería coherente con la existencia de centros de altas presiones (anticiclones); pero hemos visto que en estos casos debemos incluir el efecto no inercial de la fuerza de Coriolis, que justifica la rotación del viento entorno a los centros de alta presión. En otro caso no afectado por la fuerza de Coriolis, el lector puede recuperar la imagen del flujo de sustentación sobre un perfil de ala y comprobar que el presente resultado esta de acuerdo con la existencia de una mayor presión debajo del ala que encima a la vista de la curvatura de las líneas de corriente.

Si multiplicamos escalarmente por el vector binormal b, definido como el producto vectorial de t y n, tenemos que la presión en las cercanías de un punto dado no se modifica en la dirección del vector binormal

$$\rho\left(\frac{dv}{dt}\bar{t} + \frac{v^2}{R}\bar{n}\right) \bullet \left(\bar{t} \times \bar{n}\right) = 0 = -(\nabla p) \bullet \bar{b} = -\frac{\partial p}{\partial b}$$

En el desarrollo se han utilizado derivadas parciales respecto de los parámetros t\*, n, b. Estos parámetros representan las coordenadas de un punto en el sistema de coordenadas intrínseco de la corriente, de modo que un valor numérico determinado del par (n,b) determina una única línea coordenada t, es decir, una línea de corriente. Los vectores t,n,b, correspondientes al triedro intrínseco de Frenet, forman una base local ortogonal, comentada en el apéndice, asociada al sistema de coordenadas intrínseco de una corriente estacionaria. Las líneas coordenadas de este sistema se pueden definir por las ecuaciones

$$d\bar{r} \times \bar{t} = 0; \ \bar{n} = \frac{\bar{a} \times \bar{u}}{|\bar{a} \times \bar{u}|}; \ \bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}$$

### Ampliación del contexto de uso del sistema de coordenadas intrínseco

Hemos utilizado el sistema de coordenadas intrínseco para un fluido en movimiento estacionario, de modo que las propias líneas de corriente formen parte de un sistema de coordenadas estable. Sin embargo todavía es posible utilizar este contexto para fluidos en movimiento no estacionario siempre que las líneas de corriente no cambien con el tiempo. De esta forma, una partícula de fluido circula siempre por una línea de corriente determinada, y en un punto dado la velocidad del fluido puede cambiar con el tiempo. Podemos re-escribir las ecuaciones de Euler en este nuevo contexto así

$$\rho(\frac{dv}{dt}\bar{t} + \frac{v^2}{R}\bar{n}) = \rho\left[(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t^*})\bar{t} + \frac{u^2}{R}\bar{n}\right] = -\nabla p + \rho \bar{g}; \quad \bar{u} = u(t^*, n, b, t)\bar{t}$$

donde hemos expresado la derivada en el tiempo de la velocidad de la partícula en términos del campo de velocidades, teniendo en cuenta que la partícula solo puede moverse por la línea coordenada que le corresponde, es decir, los parámetros *n*,*b* permanecen constantes y solo varía t\*. Las componentes intrínsecas son

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t^*}) = -\frac{\partial p}{\partial t^*} + \rho \overline{g} \bullet \overline{t}$$
$$\rho \frac{u^2}{R} = -\frac{\partial p}{\partial n} + \rho \overline{g} \bullet \overline{n}$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial b} + \rho \overline{g} \bullet \overline{b}$$

si tengo un desplazamiento en uno de los ejes coordenados, por ejemplo  $t \partial t^* y$ multiplico escalarmente por g, el producto será igual al módulo de gmultiplicado por la proyección de  $t \partial t^*$  sobre la vertical es decir, la variación de altura correspondiente (*h*)

$$-\overline{g} \bullet \overline{t}dt^* = gdh \Rightarrow \overline{g} \bullet \overline{t} = -g \frac{\partial h}{\partial t^*}$$

haciendo lo mismo con las componentes **n** y **b** y sustituyendo en las componentes de la ecuación de Euler tenemos

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g h \right] = 0$$
$$\rho \frac{u^2}{R} + \frac{\partial}{\partial n} \left[ p + \rho g h \right] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial h} \left[ p + \rho g h \right] = 0$$

#### Ecuaciones de Saint Venant

Las canalizaciones de agua al aire libre, como pueden ser los mismos ríos, pueden aproximarse mediante tramos rectos y de pendiente constante. Para uno de estos tramos, en el contexto precedente, podemos suponer que el radio de curvatura (R) de las líneas de corriente es los bastante grande como para despreciar el término correspondiente, de modo que tenemos

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g h \right] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial n} \left[ p + \rho g h \right] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial b} \left[ p + \rho g h \right] = 0$$

las dos últimas ecuaciones nos dicen que para los puntos de una superficie S<sup>L</sup> perpendicular a las líneas de corriente el campo  $p+\rho gh$  depende solo de los parámetros  $t^*$  y el tiempo t

$$p + \rho g h = f(t^*, t)$$

Si suponemos que el flujo es aproximadamente potencial e irrotacional, la ecuación de Bernouilli obliga a que en las superficies  $S^{\perp}$  la velocidad del fluido sea la misma.

En canalizaciones al aire libre el nivel del agua puede cambiar debido a crecidas que se propagan a través de la red de canalizaciones. Podemos plantear la ley de conservación de la masa para un tubo de corriente limitado por dos superficies S<sup>⊥</sup> separadas una distancia dt<sup>\*</sup>, ocupando cada superficie una sección completa del canal, es decir, desde el fondo del canal hasta la superficie del agua:

$$\oint \overline{u}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S} = \frac{\partial}{\partial t} \oint dV \Longrightarrow \frac{\partial uS \perp}{\partial t^*} dt^* = \frac{\partial}{\partial t} (S \perp dt^*) \Longrightarrow \qquad \qquad \frac{\partial}{\partial t^*} [uS \perp] = \frac{\partial S \perp}{\partial t}$$

para un canal de sección homogénea, la superficie  $S^{\perp}$  desde el fondo hasta el nivel del agua solo depende de la profundidad *D* entre el fondo la superficie

$$S \perp = S \perp (D(t^*, t)) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t^*} S \perp + u \frac{\partial S \perp}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial t^*} = \frac{\partial S \perp}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial t}$$

los cambios de profundidad *D* se pueden *reinterpretar como cambios de presión hidrostática* multiplicando la expresión anterior por  $\rho g \cos(\varphi)$ :

$$\rho g \cos(\varphi) S \perp \frac{\partial u}{\partial t^*} + u \rho g \cos(\varphi) \frac{\partial S \perp}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial t^*} = \rho g \cos(\varphi) \frac{\partial S \perp}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial t} \Longrightarrow \rho g \cos(\varphi) \frac{S \perp}{\partial S \perp} \frac{\partial u}{\partial t^*} + u \frac{\partial p}{\partial t^*} = \frac{\partial p}{\partial t}; \quad (\partial p = \rho g \cos(\varphi) \partial D) \Longrightarrow$$
$$\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial t^*} + u \frac{\partial p}{\partial t^*} = \frac{\partial p}{\partial t}; \quad c^2 = g \langle D \rangle \cos(\varphi)$$



donde  $\langle D \rangle$  es la profundidad media del canal y  $\varphi$  es el ángulo del fondo del canal con la horizontal. Con esta interpretación aproximamos la dinámica por la estática, es decir es una <u>aproximación cuasiestática</u> a la dinámica del sistema. Finalmente tenemos el sistema de ecuaciones de *Saint-Venant* 

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g h \right] = 0$$
$$\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial t^*} + u \frac{\partial p}{\partial t^*} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

aunque la propagación de crecidas en canales, o incluso tsunamis es un proceso ondulatorio descrito por estas ecuaciones, debido a la aproximación cuasiestática no pueden aplicarse al caso de ondas superficiales similares a las que se forman en la superficie del agua de un estanque al tirar una piedra. Estas ecuaciónes no tiene en cuenta el efecto de rozamiento entre el agua y el fondo del canal. En la siguiente sección veremos que este efecto se puede incluir mediante un término adicional en la primera ecuación de Saint Venant de la forma  $\eta \overline{\nabla}^2 \overline{u}$ . Solo se conocen soluciones basadas en cálculo numérico para estas ecuaciones.

## VISCOSIDAD

En el movimiento fluido presentado hasta ahora no hemos considerado la existencia de un rozamiento interno entre partículas de fluido o líneas de corriente vecinas. Los apuntes de Leonardo señalan que en la corriente de un



río el agua cercana a la superficie se mueve a mayor velocidad que el agua Podemos replicar fondo. del este comportamiento en el laboratorio para otros fluidos como distintos tipos de aceite. Podemos llegar en el laboratorio a establecer corrientes estacionarias de fluidos incompresibles y de densidad constante con una distribución de ///////////////// velocidades que no se ajusta a la ecuación de Bernouilli. La imagen

adjunta representa el movimiento de partículas-test en el perfil vertical de una corriente estacionaria en movimiento laminar de un fluido viscoso que se mueve en la dirección positiva del eje x. El eje x representa también un límite de la corriente fluida, un fondo de tubo o de recipiente que contiene la corriente. La imagen representa la posición de las partículas-test en el instante to sobre el eje y; en el instante posterior  $t_1$  la posición de cada partícula sobre el eje x muestra la diferente velocidad de cada capa o lámina de fluido. Vemos también la adherencia del fluido viscoso a los límites del recipiente ya que la partículatest del fondo no se mueve. Las capas o láminas de un fluido viscoso en contacto con los límites que contienen el movimiento de dicho fluido se denominan capas límite y se caracterizan por estar, en condiciones de movimiento laminar no turbulento, en reposo relativo respecto a dichos límites.

Para explicar este movimiento acudimos a la idea de rozamiento interno. Una lámina está sometida a dos rozamientos:

1-En la superficie superior la capa superior tiende a arrastrarla en su movimiento.

2-En la superficie inferior la capa inferior tiende a frenar el movimiento que se generaría según el punto anterior.

En la capa límite estas dos tendencias se compensan de modo que queda en reposo relativo.

Flujo de Couette



La imagen representa un recipiente y un cilindro interno que puede girar según el eje señalado. El espacio entre ellos contiene un fluido viscoso. Si el cilindro empieza a girar, la capa límite de fluido en contacto con el cilindro se moverá a su misma velocidad, mientras que la capa límite en contacto con la superficie del recipiente permanecerá en reposo. De esta forma aparecerá en el fluido un campo de velocidades debido a la viscosidad del fluido. La función de distribución puede ser compleja, pero podemos simplificar las cosas haciendo que el radio del cilindro y el del recipiente sean sensiblemente

parecidos. De este modo el fluido ocupa una pequeña capa sobre la que podemos aproximar una distribución lineal de la velocidad a lo largo de la coordenada radial (en cilíndricas). Para hacer girar el cilindro a cierta velocidad constante, tendremos que aplicar cierto par de fuerzas que compense el momento de fuerzas generado por la resistencia viscosa del fluido. En base a este equilibrio y a la simetría cilíndrica del sistema podemos medir la fuerza de contacto viscoso tangente a la superficie entre el fluido y el cilindro y obtener lo siguiente

$$\frac{dF}{dS} = \eta \frac{\Delta u}{\Delta r}$$

donde dS es un elemento de superficie del cilindro y dF es la fuerza de rozamiento debida al contacto viscoso sobre dicha superficie elemental del cilindro;  $\Delta u$  es la velocidad relativa del elemento dS del cilindro respecto a la superficie del recipiente y  $\Delta r$  es la distancia radial entre la superficie del cilindro y el recipiente. El factor de proporcionalidad  $\eta$  se denomina viscosidad dinámica y depende de la naturaleza del fluido y de la temperatura. Si tomamos la distribución de velocidades del fluido en el dispositivo de Couette en un plano horizontal y consideramos que el radio del sistema es muy grande, en una pequeña porción angular la distribución de velocidades mantendrá la misma dirección de forma análoga al primer dibujo cartesiano, de modo que para el caso de fluido moviéndose en una única dirección sobre el eje x tenemos

$$\frac{dF_x}{dS_y} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

donde hemos introducido con la derivada parcial el paso al límite para el caso



de una lámina de fluido infinitamente delgada, es decir, una superficie matemática en el fluido. En el caso de la presión también se hizo un paso al límite hacia una distribución de fuerza en superficie. En el dibujo adjunto S1 es una superficie imaginaria paralela a una lámina en un fluido viscoso. La presión corresponde a las fuerzas F que una parte del sistema ejerce sobre la otra

y la viscosidad corresponde con las fuerzas R de rozamiento entre una y otra parte del sistema. En ambos casos se representa la acción y la reacción entre los subsistemas separados por la superficie. Tanto la presión como la viscosidad corresponden a fuerzas distribuidas en superficie. Finalmente note

el lector que el dispositivo de Couette no modifica la densidad del fluido, de modo que los resultados obtenidos los suponemos válidos en general para fluidos incompresibles.

Elemento de fluido en una corriente viscosa laminar. Ecuación de Navier-Stokes

El dibujo muestra un elemento de fluido de forma cúbica en nuestra corriente laminar en el eje x afectado por el rozamiento con las capas superior e inferior. Vemos que aparece un par de fuerzas (en negro) sobre el elemento. El efecto de este par en un fluido puede producir la deformación del mismo, adquiriendo una forma de romboide perdiendo en altura y ganando en velocidad, de

forma similar al estrechamiento del tubo de Venturi. Sin embargo también es posible que, si el elemento es muy pequeño, la viscosidad interna sea lo bastante fuerte como para provocar un giro completo del elemento de volumen. Esto supondría la generación de un vórtice turbulento. En todo caso, la experiencia nos muestra que es posible el movimiento de un flujo viscoso en régimen estacionario y no turbulento. Por tanto debemos pensar que, a nivel de elemento de fluido, aparecen otro par de fuerzas, marcadas en rojo en el dibujo, que compensan el par de fuerzas presentado inicialmente; de modo que el movimiento del fluido pueda seguir un régimen laminar:

$$\frac{dF_{y}}{dS_{x}} = \eta \frac{\partial u_{x}}{\partial y}$$

de modo que esta es una *componente* del rozamiento viscoso que actúa en las superficies  $dS_x$ . Sin embargo, retomando la sección anterior, este resultado no está completo y debemos añadir el efecto del rozamiento viscoso en la dirección *y* debido al gradiente de velocidad sobre la dirección *x* 

$$\frac{dF_{y}}{dS_{x}} = \eta \left( \frac{\partial u_{y}}{\partial x} + \frac{\partial u_{x}}{\partial y} \right)$$

es decir, se suman linealmente efectos debidos al gradiente de velocidad y a la condición de corriente laminar. Análogamente para la componente *dFx/dSy* 

$$\frac{dF_x}{dS_y} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

Recordando la 2ª Ley de Newton para fluidos presentada anteriormente

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big[ \rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \Big] - \rho \overline{g}(x, y, z) + \overline{\nabla} \bullet \mathbf{\tau} = 0$$
$$\overline{\nabla} \bullet \mathbf{\tau} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{pmatrix}$$



vemos que aparece un tensor. Para llegar a las fuerzas desde la fórmula anterior hay que hacer una integración en volumen y aplicando el teorema de la divergencia al caso de la divergencia del tensor tenemos

$$\int \overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{pmatrix} dV = \oint_{S} \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{pmatrix} \bullet d\overline{S} = \int_{S} \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p & \rho u_y u_x & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + p & \rho u_z u_y \\ \rho u_x u_z & \rho u_y u_z & \rho u_z u_z + p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix}$$

podemos incluir las fuerzas de viscosidad que hemos visto como *componentes* adicionales de este tensor

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p - \tau^*_{xx} & \rho u_y u_x - \tau^*_{xy} & \rho u_z u_x - \tau^*_{xz} \\ \rho u_x u_y - \tau^*_{yx} & \rho u_y u_y + p - \tau^*_{yy} & \rho u_z u_y - \tau^*_{yz} \\ \rho u_x u_z - \tau^*_{zx} & \rho u_y u_z - \tau^*_{zy} & \rho u_z u_z + p - \tau^*_{zz} \\ \end{pmatrix}; \boldsymbol{\tau}^*_{xx} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right); \boldsymbol{\tau}^*_{xy} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \boldsymbol{\tau}^*_{xz} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right);$$

La presentación hecha debe restringirse al caso de *fluidos viscosos incompresibles* y la 2<sup>a</sup> Ley de Newton para fluidos incluyendo el tensor anterior se denomina *ecuación de Navier-Stokes* para un fluido viscoso incompresible.

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big[ \rho(x, y, z, t) \overline{u}(x, y, z, t) \Big] - \rho \overline{g}(x, y, z) + \overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p - \tau^*_{xx} & \rho u_y u_x - \tau^*_{xy} & \rho u_z u_x - \tau^*_{xz} \\ \rho u_x u_y - \tau^*_{yx} & \rho u_y u_y + p - \tau^*_{yy} & \rho u_z u_y - \tau^*_{yz} \\ \rho u_x u_z - \tau^*_{zx} & \rho u_y u_z - \tau^*_{zy} & \rho u_z u_z + p - \tau^*_{zz} \end{pmatrix} = 0$$

El tensor es simétrico :  $\tau^*_{xy} = \tau^*_{yx}$ ;  $\tau^*_{xz} = \tau^*_{zx}$ ;  $\tau^*_{zy} = \tau^*_{yz}$ ; y lo es también en el caso de fluido compresible. Este es un resultado general de la *mecánica de los medios continuos* conocido como <u>teorema de tensiones de Cauchy</u> que se basa en el equilibrio local de momentos de fuerza asociado a las fuerzas distribuidas en superficie (presión y componentes viscosas) para un elemento de fluido.

Las componentes diagonales  $\tau^*_{xx}$ ,  $\tau^*_{yy}$ ,  $\tau^*_{zz}$  corresponden a las deformaciones: dilataciones o compresiones del elemento de fluido en cada uno de los ejes rectangulares. Son componentes similares al módulo de Young en sólidos, pero en este caso asociadas a componentes del rozamiento viscoso. Es posible deducir la forma general de las componentes  $\tau^*$  para *fluidos compresibles* basándonos en que estas componentes dependen linealmente de las derivadas parciales primeras de las componentes del campo de velocidades y son simétricas. La forma de las componentes debe ser la siguiente

$$\tau_{ij}^* = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \left[ \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right] \delta_{ij}$$

evidentemente para un flujo incompresible la divergencia del campo de velocidades se anula. El lector puede pensar que, aparentemente, puede haber mas expresiones válidas con las condiciones elegidas, por ejemplo

$$\tau_{ij}^* = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] \delta_{ij}$$

Pero esta expresión no corresponde a un *tensor* ya que la ley de transformación de coordenadas de estas componentes no se ajusta a la transformación de coordenadas de un tensor. El <u>teorema de tensiones de Cauchy</u> establece también como debe ser la ley de transformación entre distintos sistemas de coordenadas de este tensor. Sabemos que la divergencia del campo de velocidades es un escalar, un escalar o número invariante en cambios de sistemas de coordenadas, que multiplicando al *tensor elemental*  $\delta_{ij}$  (ver apéndice) resulta en otro tensor. Pero la derivada parcial introducida como factor de  $\delta_{ij}$  en la segunda expresión del tensor no se transforma como un invariante, sino como la componente de un vector (gradiente), lo que invalida la expresión completa como tensor.

El coeficiente adicional  $\eta'$  puede deducirse de la siguiente consideración física : imaginemos que el fluido se ve sometido a una compresión o expansión uniforme en todas sus dimensiones. En este caso tenemos

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad y \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \dots 0$$

en este caso no hay deslizamiento relativo entre las distintas partes del fluido y por tanto no debe haber fricción, por lo que las componentes del tensor deben anularse en este caso. Rápidamente vemos, a través de las componentes diagonales  $\tau^*_{ii}$ , la forma general del tensor viscosidad  $\tau^*$ 

$$\tau_{ii}^* = 2\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) + 3\eta' \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right] = 0 \Longrightarrow \eta' = -\frac{2}{3}\eta \Longrightarrow \quad \tau_{ij}^* = \eta \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\left[\overline{\nabla} \bullet \overline{u}\right] \delta_{ij}\right]$$

Utilizando las componentes del tensor completo se puede llegar a la siguiente forma de la ecuación de Navier-Stokes

$$\rho\left(\overline{u}\bullet\overline{\nabla}\right)\overline{u}+\rho\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}=-\overline{\nabla}p+\rho\overline{g}+\eta\overline{\nabla}^{2}\overline{u}+\frac{1}{3}\eta\overline{\nabla}\left[\overline{\nabla}\bullet\overline{u}\right]$$

la forma en que se ha introducido el factor 2/3 en el tensor, y 1/3 en la ecuación anterior, en base a consideraciones físicas sencillas, resulta tener limitaciones en la práctica. En concreto, en el caso de gases la fórmula anterior solo es válida para gases monoatómicos con 3 grados de libertad.

Descomponiendo el *Laplaciano* según lo expuesto en la sección de análisis matemático de campos tenemos

$$\rho\left(\overline{u}\bullet\overline{\nabla}\right)\overline{u}+\rho\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}=-\overline{\nabla}p+\rho\overline{g}+\eta\left[\overline{\nabla}\left[\overline{\nabla}\bullet\overline{u}\right]-\overline{\nabla}\times\left[\overline{\nabla}\times\overline{u}\right]\right]+\frac{1}{3}\eta\overline{\nabla}\left[\overline{\nabla}\bullet\overline{u}\right]$$

Por tanto podemos deducir que, para corrientes incompresibles  $(\overline{\nabla} \cdot \overline{u} = 0)$  e irrotacionales  $(\overline{\nabla} \times \overline{u} = 0)$  la viscosidad no tiene efecto físico (ver apéndice sobre la *función corriente*). En la aproximación correspondiente al *flujo de Stokes* tenemos un fluido incompresible en que el término de viscosidad  $-\eta \overline{\nabla} \times [\overline{\nabla} \times \overline{u}]$  es muy superior al término convectivo  $\rho(\overline{u} \cdot \overline{\nabla})\overline{u}$ . Si además suponemos un régimen estacionario ( $\partial \overline{u} / \partial t = 0$ ), utilizando la identidad vectorial correspondiente de la sección sobre campos tenemos

$$\overline{\nabla}p - \rho \overline{g} - \eta \nabla^2 \overline{u} = 0$$
 flujo Stokes estacionario

Tomando la divergencia de la fórmula anterior mantenemos el grado la ecuación diferencial y resulta que el campo de presiones es solución de la ecuación de Laplace

$$\overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} p = \eta \overline{\nabla} \bullet \nabla^2 \overline{u} = \eta \nabla^2 \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla^2 p = 0\\ \overline{\nabla} \bullet \overline{u} = 0\\ \overline{\nabla} p - \rho \overline{g} - \eta \nabla^2 \overline{u} = 0 \end{cases}$$

De este modo se puede plantear la solución del problema mediante funciones solución de la ecuación de Laplace y que verifiquen la ecuación del flujo de Stokes y la de incompresibilidad como *condiciones de contorno*, aplicables sobre la/s superficie/s adecuada/s; de forma análoga al desarrollo hecho en la sección sobre ondas superficiales.

Flujo de Poiseuille y viscosidad en corrientes libres



El flujo de Poiseuille corresponde a un fluido viscoso e incompresible circulando en régimen estacionario por una tubería recta. Podemos imaginar el fluido como una serie de láminas cilíndricas concéntricas. Si la viscosidad es homogénea y despreciando el efecto de la gravedad, entonces cada lámina se moverá con la

misma velocidad; decreciendo la velocidad desde el eje central del tubo hasta las paredes, donde la velocidad del fluido se anula por adherencia. Podemos utilizar resultados vistos en la sección sobre el sistema de coordenadas intrínseco de una corriente estacionaria e incluir el término correspondiente a la viscosidad en las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g h \right] = \eta \overline{\nabla}^2 u$$
$$\frac{\partial}{\partial n} \left[ p + \rho g h \right] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial b} \left[ p + \rho g h \right] = 0$$

si despreciamos el efecto de la gravedad (tubo estrecho) las dos últimas ecuaciones nos dicen que en una sección perpendicular al tubo determinada la presión es constante. En este caso la velocidad del fluido no es constante en dicha sección ya que el flujo no puede considerarse irrotacional. Debido a la

conservación de la masa, a lo largo de una línea de corriente no cambia la velocidad del fluido en este caso, por lo que tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial t^*} = \eta \overline{\nabla}^2 u; \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial b} = 0$$

También podemos resolver el sistema de ecuaciones anterior utilizando el sistema de coordenadas cilíndrico. Hacemos corresponder las líneas coordenadas z del sistema cilíndrico con las líneas coordenadas  $t^*$ , es decir, la dirección de las líneas de corriente. Por otra parte, en este caso en el sistema de coordenadas intrínseco el vector n no está bien definido, ya que las líneas de corriente son rectas y el radio de curvatura es infinito. En esta situación podemos elegir los vectores n y b de la base local del sistema de coordenadas a conveniencia mientras sean perpendiculares entre sí y al vector t. Por tanto podemos elegir n y b de modo que coincidan en cada punto con la base local del sistema de coordenadas cilíndrico. Esto nos permite escribir la primera ecuación utilizando el Laplaciano en coordenadas cilíndricas de esta forma

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \Delta p = \int_{A}^{B} f(r) dz$$

la velocidad de corriente siempre está en la dirección z y solo es función del radio r al eje del tubo :u(r) y por tanto tenemos que la parcial de la presión es una función del radio:  $\partial p/\partial z = f(r)$ . Pero como vimos antes, *la presión* no puede variar en una sección recta, es decir, no varía con las coordenadas  $r,\theta$ . De modo que la integral para  $\Delta p$  solo puede depender de la variación de z, lo que nos dice que f(r) solo puede ser una constante del sistema. Con esto la ecuación diferencial queda

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}$$

cuya solución es (R=radio del tubo desde su eje central)

$$u = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \left( R^2 - r^2 \right)$$

el signo menos se introduce por que si el flujo circula en el sentido de z creciente, entonces en ese mismo sentido la presión disminuye. Por otro lado, dado que  $\partial p/\partial z$  es constante tenemos que  $\partial p/\partial z = -\Delta p/L$ , con  $L = \Delta z \ y \ \Delta p$  el

módulo de la diferencia de presiones entre dos puntos separados una distancia *L* sobre el tubo :



$$u = \frac{\Delta p}{4\eta L} \left( R^2 - r^2 \right)$$

Este caso del flujo de Poiuseuille tiene semenjanzas con el caso de una corriente libre de aire, como puede ser la generada por un ventilador o un secador de pelo. El campo de velocidades del chorro puede ser similar al dibujo.

En los extremos superior e inferior del chorro la velocidad decrece rápidamente hasta llegar a las condiciones del aire en reposo que rodea al chorro. Este gradiente de velocidad está asociado a la *fricción viscosa* con el aire en reposo de los alrededores. Para medir la presión en el chorro necesitamos un dispositivo similar a una pequeña caja con una abertura que colocamos paralela al flujo de aire. En el interior de la caja el fluido está en reposo y podemos medir la presión de esta forma; algo similar se utiliza en el *tubo de Pitot*. Comprobaremos que la presión es sensiblemente constante en todo el chorro e igual a la presión atmosférica del entorno. Presión constante es lo que se espera del caso del flujo de Poiseuille cuando la viscosidad es muy pequeña, como es el caso del aire.



La imagen adjunta representa un evaporador, un dispositivo que utiliza un chorro de aire actuado sobre la boca de un tubo parcialmente sumergido en fluido. El efecto del chorro paralelo a la boca del tubo es la ascensión del fluido por el tubo hasta que hace contacto con el chorro de aire y es transportado por él. El efecto del chorro sobre el aire que hay inicialmente en la parte superior del tubo es un *arrastre por fricción*. Esto hace que el tubo pierda aire y, según la ley de los gases ideales, que pierda

presión; lo que provoca la subida de fluido por el tubo. Esto a su vez empuja el aire del tubo hacia arriba, hacia el chorro.

## Efecto Coanda



Cuando vimos el caso de la sustentación del ala de un avión hemos supuesto que la corriente tiende a seguir suavemente el contorno del ala. Este comportamiento resulta tener una base física denominada Efecto Coanda. La imagen muestra un chorro de un grifo casero y un péndulo con una bola de corcho blanco. Si acercamos la bola al chorro, resulta que la *viscosidad del agua* hace que el chorro se adhiera a la bola de corcho de modo que sigue durante un tramo el contorno de dicho objeto, como podemos ver. La flecha de abajo indica la variación de

cantidad de movimiento del chorro de agua, esto es la fuerza sobre una unidad de fluido en su movimiento en contacto con la bola. Debemos atribuir esta



fuerza a la bola de corcho blanco por medio de la viscosidad. La 3ª ley de Newton indica que a esta fuerza debe corresponder una reacción igual y en sentido contrario actuando sobre la bola de corcho, representada por la flecha superior. El resultado es similar a una fuerza atractiva entre la bola y el flujo de agua. Sin embargo este resultado depende de la forma que tenga el objeto. La imagen adjunta representa la misma experiencia con una cucharilla de plástico sujeta a modo de péndulo pero

cayendo el chorro por el lado cóncavo de la cucharilla. En este caso las fuerzas de acción y reacción son repulsivas y tienden a separar el chorro y la cucharilla; de modo que estos objetos solo permanecen juntos por la existencia de una fuerza externa representada por la varilla de la izquierda en contacto con la cuchara.

En todo caso, sabemos que la curva en la corriente de agua está asociada a un gradiente de presión, como vimos al estudiar el sistema de coordenadas intrínseco del fluido. En el primer caso, la curva de la corriente indica que en la zona de contacto entre el chorro y la bola la presión es menor que la atmosférica, lo que es coherente con el hecho de que la bola tiende a pegarse al chorro. Esto también explica la separación de la cuchara en el segundo caso.

El fenómeno también se produce en el caso de un chorro de aire. El dibujo representa una corriente de aire, procedente de un secador de pelo por ejemplo, que actúa sobre una pequeña pelota de ping-pong. El chorro se adhiere a los laterales de la pelota por viscosidad y genera una fuerza sobre la pelota indicada por las flechas rojas. Esta fuerza es tal que tiende a estabilizar la pelota dentro del chorro, de modo que podemos mover el chorro y la pelota



lo seguirá. De nuevo, la curvatura de las líneas de corriente indica que la zona donde está la pelota tiene una presión relativa menor que la presión exterior atmosférica. lo que es coherente con que la pelota ocupe las zonas de menor presión. La presión también es superior abajo, donde el chorro no se ha dispersado todavía, lo que explica que la pelota se sustente y no caiga por su peso. Debido a que la viscosidad no actúa en general de forma simétrica la pelota girará sobre si misma y se producirá un Efecto Magnus adicional que hace que las dos ramas del flujo dejen de ser simétricas en un instante dado. El giro es variable de modo

que el flujo en una de las rama se ve a veces debilitado o intensificado a costa



del de la otra rama.

Si soplamos por un pequeño tubo sobre el espacio entre dos pelotas de ping-pong el efecto Coanda divide el flujo en dos ramas y generará la presiones y fuerzas correspondientes de modo que las dos pelotas tienden a juntarse. Esto estrecha el espacio ocupado por el flujo y si este es capaz de circular de forma incompresible y adherido al borde de las pelotas, entonces deberá aumentar la velocidad en el estrechamiento.

El efecto Coanda también se utiliza en coches de competición como los



Fórmula-1. El dibujo representa la parte trasera inferior de un coche en movimiento. Las flechas negras indican el movimiento del aire debajo del coche. La curva que hace la carrocería al final se denomina difusor. El efecto Coanda hace que el flujo se adhiera a este difusor<sup>6</sup>, lo

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Para mejorar esta adherencia se pueden utilizar también dispositivos sopladores referidos en la sección siguiente sobre la capa límite.

cual provoca un par de fuerzas de acción-reacción pintadas en rojo sobre la rueda del coche y sobre el flujo de aire de salida. Vemos que el efecto sobre el coche es "pegarlo" al suelo; es decir, aumenta el agarre entre el neumático y el suelo, lo cual es ventajoso a la hora de tomar curvas a alta velocidad.

La adhesión del flujo de aire a las alas de un avión es también un resultado del efecto Coanda, creando el patrón de curvatura en las líneas de corriente que permite la sustentación. Note el lector que relativamente lejos, tanto por encima del ala como por debajo de ella, la presión del aire es la atmosférica. Este hecho combinado con la relación entre curvatura de líneas de corriente y gradiente de presiones (ver sección sobre sistema de coordenadas intrínseco de la corriente) nos dicen que la presión encima del ala es menor que la presión debajo de ella; lo que genera la sustentación.

## Arrastre de objetos en una corriente

La fuerza de arrastre en la dirección de la corriente de un sólido que se mueve en el interior de un fluido sigue la siguiente <u>ley empírica</u>

$$F = \frac{1}{2}\rho v^2 C_a A$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido, v la velocidad relativa entre el sólido y el fluido. El valor de A es un área de referencia definida por convención para los distintos objetos. Por ejemplo para una esfera sería el área de la esfera proyectada sobre un plano perpendicular a la corriente, para el ala de un avión sería la superficie del ala. Finalmente  $C_a$  es el coeficiente de arrastre que depende de la forma específica del objeto, de la viscosidad del fluido en la superficie del objeto y del número de Reynolds. La ecuación anterior se considera la definición matemática del coeficiente de arrastre. El origen físico de esta fuerza tiene que ver con el desprendimiento de la capa límite en la parte trasera del objeto, lo que provoca turbulencias del fluido en esta zona y una presión relativa menor que en la parte frontal; de modo que la diferencia de presiones genera una fuerza en contra del movimiento relativo del sólido. La mejora de la aerodinámica de cualquier objeto móvil pasa por minimizar estas turbulencias y hacer que el fluido siga un régimen lo mas laminar posible. El contexto físico de la fórmula anterior es diferente al de la fórmula de Stokes sobre el rozamiento de un objeto esférico de radio r que se mueve con velocidad relativa v, sin turbulencias, en el seno de un fluido viscoso  $F=6\pi rnv$ 

# CAPA LÍMITE

En la paradoja de D'Alembert vimos el caso de un cilindro moviéndose uniformemente en un corriente de potencial. Si se parte de una corriente incompresible, irrotacional y despreciando la viscosidad la consecuencia



necesaria es que sobre el cilindro no actúa ninguna fuerza de arrastre debida a la corriente. Evidentemente es posible reproducir la experiencia anterior utilizando una corriente de aire y comprobar lo contrario: que existe una fuerza de arrastre del fluido sobre el cilindro. Además se puede comprobar que para velocidades moderadas la corriente real no sigue la forma suave de la corriente de potencial sino que aparecen turbulencias en la parte trasera del cilindro.

Se suele considerar que el agua o el aire son fluidos de viscosidad despreciable. En principio el coeficiente de viscosidad de distintos fluidos puede medirse en el dispositivo de Couette, resultado en orden de magnitud para el aire  $10^{-5}$ , para el agua  $10^{-3}$  y para el aceite de oliva  $10^{-1}$ . Según la teoría de la *Capa Limite*, incluso cuando la viscosidad es muy pequeña, junto a las paredes de los objetos rodeados por la corriente sigue siendo válida la *condición de adherencia* : la capa de fluido que está en contacto con la pared del objeto está adherida a dicha pared, es decir, en reposo relativo respecto a ella. En caso de pequeñas viscosidades, la velocidad del fluido puede ser considerablemente alta a distancias muy pequeñas de la pared del objeto, lo que supone aceptar *altos gradientes de velocidad* en la dirección normal a la superficie del objeto y por tanto, a través del coeficiente de proporcionalidad  $\eta$ , fuerzas de rozamiento debidas a viscosidad que no pueden ser despreciadas.

Esta región cercana a la superficie de los objetos y que puede soportar un alto gradiente en la velocidad del fluido debido a la condición de adherencia se llama *capa límite*. En la paradoja de D´Alembert, no se ha considerado el efecto de rozamiento viscoso de esta capa; sin embargo para el resto del fluido fuera de la capa límite son aplicables las condiciones de flujo potencial, irrotacional y sin viscosidad. La capa límite afecta a la corriente de potencial, en condiciones de movimiento laminar, aproximadamente como un "contorno efectivo" añadido al cilindro. Sin embargo existen condiciones que predicen fenómenos como la *transición* y el *desprendimiento de la capa límite* que provoca turbulencia en amplias zonas del fluido, como es el caso de la imagen anterior.

Podemos hacer una estimación del espesor de la capa límite para una placa en



<u>reposo</u> colocada paralelamente a la corriente. El dibujo representa esta placa y la variación de velocidad del fluido en la capa límite. Si suponemos que el espesor de la capa límite es muy pequeño, podemos aproximar linealmente la viscosidad por medio de la

velocidad del fluido en la frontera entre la capa límite y el flujo de potencial y la anchura de la capa  $\delta$ 

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} \approx \eta \frac{\Delta u}{\Delta y} \approx \eta \frac{u_0}{\delta} \to \Delta F = \eta \frac{u_0}{\delta} \Delta S$$

Esta expresión da el cambio en cantidad de movimiento de una cantidad de fluido que ha pasado a la zona de la capa límite correspondiente al espesor  $\delta$  y superficie  $\Delta S$ . Este valor se puede aproximar también por medio de la conservación de la cantidad de movimiento, presentado en otra sección en forma integral. El fluido afectado por viscosidad en la superficie de placa *S*, a lo sumo puede perder la cantidad de movimiento que tenía en la corriente de potencial. Si despreciamos cambios de presión sobre la superficie *S* de la capa límite, este valor máximo es

donde *l* es la distancia en el eje x desde el borde la placa. El resultado anterior también supone que el espesor de la capa límite  $\delta$  es una función creciente de *l*. Para un elemento de superficie de placa  $\Delta S$ , aplicando los resultados anteriores tendremos, aproximadamente

$$\Delta F = \eta \frac{u_0}{\delta} \Delta S < \rho \,\delta \,\Delta S \,u_0 \left(\frac{u_0}{l}\right) \Longrightarrow \delta = k \sqrt{\frac{\eta l}{\rho u_0}} = k \frac{l}{R}; \, R = \sqrt{\frac{\rho u_0 l}{\eta}}$$

donde k es una constante adimensional menor que la unidad y R el número de Reinolds. El resultado final es que el espesor de la capa límite depende de la



raíz cuadrada de la distancia al borde de la placa, dependencia que está representada en la imagen anterior. En la práctica el espesor de la capa límite en el caso de aire o agua es de décimas o centésimas de

milímetro<sup>7</sup>, sin embargo a medida que nos alejamos del borde de la placa la capa límite aumenta en espesor y superada cierta distancia llega a hacerse inestable, turbulenta como muestra el dibujo; lo cual se pone de manifiesto utilizando fluidos trazadores que revelan el comportamiento de la corriente por su color distintivo. Según los experimentos de laboratorio, la *zona de transición* comienza para  $R=10^5$  y la *zona turbulenta* para  $R=3*10^5$ ; aún así, la corriente turbulenta de la capa límite sigue adherida a la placa y sigue habiendo una frontera bién definida entre la capa límite y la corriente de potencial.

#### Ecuaciones de Navier-Stokes para la capa límite

Partiendo de la ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible podemos introducir una serie de aproximaciones apropiadas a la física de la capa límite en el caso de la placa que venimos manejando. La simetría del caso permite utilizar solamente dos coordenadas espaciales x,y de modo que la ecuación de Navier-Stokes y la de conservación de la masa quedan así en componentes

$$u_{x}\frac{\partial u_{x}}{\partial x} + u_{y}\frac{\partial u_{x}}{\partial y} + \frac{\partial u_{x}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^{2}u_{x}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{x}}{\partial y^{2}}\right)$$
$$u_{x}\frac{\partial u_{y}}{\partial x} + u_{y}\frac{\partial u_{y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^{2}u_{y}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}u_{y}}{\partial y^{2}}\right)$$
$$\frac{\partial u_{x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y}}{\partial y} = 0$$

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Para objetos de pequeñas dimensiones, como insectos o microorganismos en agua, esto supone un mayor rozamiento proporcionalmente a objetos mayores; ya que para una misma velocidad del agua el gradiente de velocidades es mayor en el caso de objetos pequeños con una capa límite mas delgada.

La dirección de la coordenada x es paralela a la placa, la dirección de la coordenada y es la perpendicular a la placa.

Las aproximaciones para la capa límite son las siguientes

1-La capa límite es muy delgada y por esto solo pueden presentarse dentro de ella diferencias de presión despreciables en la dirección perpendicular a la placa :  $\partial p/\partial y = 0$  en la capa límite. Sobre una normal a la pared existe, en la capa límite, siempre la misma presión. En la hipótesis de continuidad matemática, dicha presión debe coincidir con la presión en la frontera de la corriente de potencial exterior a la capa límite y por tanto <u>la corriente de potencial externa determina la presión en la capa límite</u>.

2-En la capa límite existe un rápido aumento de la componente de la velocidad paralela a la pared (u<sub>x</sub>) en la dirección perpendicular a la placa (y), mientras que la variación de esta misma componente en la dirección (x) es mucho menor:  $\partial^2 u_x / \partial y^2 >> \partial^2 u_x / \partial x^2$  en la capa límite.

3-Puesto que la capa límite es muy delgada y se extiende a lo largo de la pared, si es el caso pueden despreciarse los valores de  $u_y$  mas sus derivadas primera y segunda respecto de los parámetros (x,y,t)

Después de aplicar estas condiciones queda eliminada la ecuación de Navier-Stokes para la componente (y) y la componente (x) queda así

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

se mantiene aquí la componente  $u_y$  por estar multiplicando al gradiente de velocidad en la normal a la placa. Si aplicamos la ecuación anterior a la superficie de la placa con *y*=0,  $u_x$ =0,  $u_y$ =0 tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{y=0} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\Big|_{y=0}$$

Separación de la capa límite

En la ecuación anterior la parte izquierda representa la influencia de la corriente de potencial externa y la parte derecha está directamente relacionada con la forma de la función de distribución en la capa límite  $u_x = u_x(x, y)$ . Si desarrollamos en serie la derivada parcial en (y) de esta función en un punto de la placa (x=x<sub>0</sub>,y=0) como función de una sola variable  $f(x_0,y)$  tenemos

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=y\\x=x0}} = \left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=0\\x=x0}} + \frac{y}{\eta} \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{\substack{y=0\\x=x0}}$$

por otra parte, en la zona de transición entre la corriente de potencial y la capa límite tenemos para la misma derivada

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{\substack{y=y\\x=x0}} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{\substack{y=\delta\\x=x0}} > 0$$

ahora no aparece la derivada segunda ya que este término está asociado a la viscosidad y en esta zona es despreciable. Además esta derivada siempre es positiva, ya que a medida que (y) disminuye entramos en la capa límite y la velocidad también disminuye. Para fluidos poco viscosos esta derivada es también cercana a cero. Tenemos por tanto una aproximación a la distribución de velocidades de la capa límite en sus puntos extremos. A pesar de que la capa límite suele ser muy delgada, los resultados anteriores apuntan a un comportamiento complejo dependiente de las condiciones en el gradiente de presión externo. Para el caso de fluidos poco viscosos, como el aire, tenemos:

1: Comportamiento Regular. El gradiente de velocidades se mantiene con el mismo signo positivo en toda la capa límite

 $\frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{\substack{y=0\\x=x0}} >> \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{\substack{y=0\\x=x0}} \approx 0 \Longrightarrow \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{\substack{y=0\\x=x0}} < 0$ 

este comportamiento indica un decrecimiento de la velocidad  $u_x$  desde la frontera con la corriente de potencial hasta la placa, y además este decrecimiento se produce sin cambio de sentido de  $u_x$ :  $u_x$  es un valor siempre positivo. Para que este comportamiento sea posible la derivada parcial en *x* de la presión debe ser negativa para conseguir que el gradiente de  $u_x$  vaya disminuyendo desde la placa hasta el límite con la corriente de potencial.

2-Comportamiento Inestable. En este caso el gradiente de presión en (x) es nulo. Si es posible seguir manteniendo un comportamiento regular de las derivadas desde la placa hasta la frontera con la corriente potencial, entonces las condiciones mas sencillas en este caso son

 $\frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=0\\x=x0}} \approx \left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\x=x0}} \approx 0 \Longrightarrow \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{\substack{y=0\\x=x0}} = 0$ 

es decir, el gradiente de velocidades en la placa y en la frontera de la corriente potencial son comparables y por tanto la capa límite tiene dificultades para mantener la adherencia con la placa y puede considerarse inestable.

3-Comportamiento Irregular: En este caso el gradiente de presión en (x) es positivo. Evidentemente si el valor del gradiente de presión es positivo pero cercano a cero son válidas las conclusiones del apartado anterior. Pero si este valor no es despreciable la situación debe ser la siguiente



$$\frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{\substack{y=0\\x=x0}} < 0; \quad \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{\substack{y=0\\x=x0}} <<\frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{\substack{y=0\\x=x0}} \approx 0; \Longrightarrow \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{\substack{y=0\\x=x0}} > 0$$

es decir, se produce una inversión del sentido de la corriente en las proximidades



de la placa. Este valor es moderado por la derivada parcial de la presión, de forma que el gradiente de velocidades llega a un valor positivo en la frontera con la corriente de potencial. Para unos mismos valores del módulo de las derivadas que en el caso regular, llegar hasta la frontera con la corriente de potencial en este caso necesita un mayor espesor de la capa límite. La imagen izquierda representa los tres casos vistos: a la izquierda el caso  $\partial p/\partial x < 0$ , en el centro  $\partial p/\partial x=0$  y a la derecha  $\partial p/\partial x > 0$ . En el centro la capa límite empieza a perder adherencia y acaba por separarse de la placa, el "vacío" dejado se completa con un flujo opuesto cerca de la placa. Las líneas de corriente correspondientes se pueden ver también. La línea O-A corresponde al desprendimiento de la capa límite.



El dibujo de al lado retoma la paradoja de D'Alembert, pero ahora considerando el comportamiento de la capa límite en la superficie del cilindro. Como vimos allí, A es un punto de remanso y por tanto la presión es máxima para el flujo de potencial. Del punto A al punto B la presión del flujo potencial debe decrecer y por tanto la capa límite es estable. En B la presión es

mínima y de B a C la presión del flujo potencial va en aumento. En C la capa límite es inestable y se desprende, formando vórtices y remolinos (estela).

Existen dispositivos denominados sopladores o succionadores que se utilizan



para controlar el desprendimiento de la capa límite. Su funcionamiento se basa en alterar la componente  $u_y$  en las ecuaciones de la capa límite de modo que en la superficie de la placa la ecuación es ahora





manejando el valor de  $u_y$  en la placa se puede compensar el efecto del gradiente de presión y controlar el desprendimiento de la capa límite. Las imágenes son de flujos en toberas; a la izquierda no se utiliza succión y el flujo de salida es turbulento por desprendimiento de la capa límite, a la derecha se utiliza succión y el flujo se adhiere a las paredes.

### Apéndice Matemático.

Vectores superficie.

En los teoremas de la divergencia y el rotacional se representan elementos de superficie por medio de vectores. En principio un vector consta de tres componentes. ¿Podemos interpretar también cada una de estas componentes como elementos de superficie?

> El dibujo representa un triángulo vectorial arbitrario y un sistema de coordenadas dispuesto de forma que nos permite ver fácilmente las componentes cartesianas de cada vector. El vector superficie asociado a este triángulo vectorial se define como

 $\overline{S} = \frac{1}{2}\overline{a} \times \overline{b}$ 

si indicamos por  $u_x, u_y, u_z$  los vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados, podemos encontrar la componente del vector superficie en la dirección  $u_{v}$ 

$$S_{y} = \overline{S} \bullet \overline{u}_{y} = \frac{1}{2} \left[ \left( a_{x} \overline{u}_{x} + a_{z} \overline{u}_{z} \right) \times \left( b_{x} \overline{u}_{x} + b_{y} \overline{u}_{y} \right) \right] \bullet \overline{u}_{y}$$

aplicando la regla de ciclo del producto compuesto tenemos

$$S_{y} = \frac{1}{2} \left[ \left( a_{x} \overline{u}_{x} + a_{z} \overline{u}_{z} \right) \times \left( b_{x} \overline{u}_{x} + b_{y} \overline{u}_{y} \right) \right] \bullet \overline{u}_{y} = \frac{1}{2} \left[ \left( b_{x} \overline{u}_{x} + b_{y} \overline{u}_{y} \right) \times \overline{u}_{y} \right] \bullet \left( a_{x} \overline{u}_{x} + a_{z} \overline{u}_{z} \right) = \frac{1}{2} b_{x} \overline{u}_{z} \bullet \left( a_{x} \overline{u}_{x} + a_{z} \overline{u}_{z} \right)$$
$$\implies S_{y} = \frac{1}{2} b_{x} a_{z} = \frac{1}{2} |b_{x} a_{z}|; b_{x} < 0, a_{z} < 0$$

es decir, la componente del vector superficie S en la dirección del eje <v> corresponde a al área de la proyección ortogonal de la superficie S del triángulo vectorial (a,b,c) sobre el plano coordenado normal a la dirección <y>. Evidentemente encontraremos lo mismo para el resto de las componentes y finalmente podemos generalizar que cualquier superficie plana puede representarse mediante un vector cuyas componentes corresponden a la proyección ortogonal de dicha superficie sobre los correspondientes planos coordenados  $\langle y, z \rangle$ ,  $\langle z, x \rangle$  y  $\langle x, y \rangle$ .

Aritmética del producto escalar y el producto vectorial en coordenadas Cartesianas ortogonales globales o locales.

El producto escalar a partir de las componentes en coordenadas Cartesianas ortogonales, ya sean globales o locales, es

$$(a_1, a_2, a_3) \bullet (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$



0

y

Para el producto vectorial en componentes Cartesianas ortogonales, ya sean globales o locales, hay que calcular tres componentes. En cada componente del producto vectorial se bloquean las componentes correspondientes de los factores (símbolo []) y se calculan los productos cruzados del menor correspondiente

$$(a_{1}, a_{2}, a_{3}) \times (b_{1}, b_{2}, b_{3}) = \begin{cases} componente1([a_{1}], a_{2}, a_{3}) \times ([b_{1}], b_{2}, b_{3}) = a_{2}b_{3} - a_{3}b_{2} \\ componente2(a_{1}, [a_{2}], a_{3}) \times (b_{1}, [b_{2}], b_{3}) = -(a_{1}b_{3} - a_{3}b_{1}) \\ componente3(a_{1}, a_{2}, [a_{3}]) \times (b_{1}, b_{2}, [b_{3}]) = a_{1}b_{2} - a_{2}b_{1} \end{cases}$$

Calculo vectorial en componentes.

Supongamos tres vectores  $\{a,b,c\}$  cuyas componentes se numeran con los índices *i,j,k* en una base de vectores ortonormales  $\{e_1,e_2,e_3\}$  orientada positivamente. Utilizando el convenio de suma sobre índices repetidos, el producto escalar de dos vectores nos lleva a la definición del tensor  $\delta_{ij}$ 

$$(a_i\bar{e}_i)\bullet(b_j\bar{e}_j)=a_ib_j(\bar{e}_i\bullet\bar{e}_j); \ \bar{e}_i\bullet\bar{e}_j\equiv\delta_{ij}=\begin{cases}1\ si\ i=j\\0\ si\ i\neq j\end{cases}\Rightarrow\ \bar{a}\bullet\bar{b}=a_ib_j\delta_{ij}$$

Si consideramos ahora el producto mixto de los tres vectores, llegamos a la definición del símbolo  $\varepsilon_{ijk}$  estipulando que una base ortonormal { $e_1, e_2, e_3$ } orientada positiva se caracteriza por  $\varepsilon_{123}=1$ 

$$\begin{split} \left[\left(a_{i}\bar{e}_{i}\right)\times\left(b_{j}\bar{e}_{j}\right)\right]\bullet\left(c_{k}\bar{e}_{k}\right) &= \left(a_{i}b_{j}\bar{e}_{i}\times\bar{e}_{j}\right)\bullet\left(c_{k}\bar{e}_{k}\right) = a_{i}b_{j}c_{k}\left(\bar{e}_{i}\times\bar{e}_{j}\right)\bullet\bar{e}_{k} = a_{i}b_{j}c_{k}\varepsilon_{ijk} \\ \left(\bar{e}_{i}\times\bar{e}_{j}\right)\bullet\bar{e}_{k} &\equiv \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & si \ (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & si \ (i, j, k) \in \{(3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\} \\ 0 & si \ hay indices \ repetidos \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} -\varepsilon_{jik} \text{ permutation simple} \\ \varepsilon_{kij} \text{ permutation cíclica} \end{cases}$$

a partir de esta definición y dado que los vectores base son unitarios tenemos

$$\left(\bar{e}_i\times\bar{e}_j\right)\bullet\bar{e}_k\equiv\varepsilon_{ijk}\bar{e}_k\;\bullet\bar{e}_k \Longrightarrow\left(\!\left(\!\bar{e}_i\times\bar{e}_j\right)\!-\varepsilon_{ijk}\bar{e}_k\right)\!\bullet\bar{e}_k=0$$

de modo que si *k≠i,j* se verifica necesariamente

$$\left(\bar{e}_{i}\times\bar{e}_{j}\right) = \varepsilon_{ijk}\bar{e}_{k}$$
;  $k\neq i, j$ 

Si consideramos ahora el doble producto vectorial de {a,b,c}

$$(c_k \bar{e}_k) \times [(a_i \bar{e}_i) \times (b_j \bar{e}_j)] = (a_i \bar{e}_i) [(c_k \bar{e}_k) \bullet (b_j \bar{e}_j)] - (b_j \bar{e}_j) [(c_k \bar{e}_k) \bullet (a_i \bar{e}_i)]$$

y aplicando la fórmula previa al lado izquierdo tenemos

$$(c_k \bar{e}_k) \times [(a_i \bar{e}_i) \times (b_j \bar{e}_j)] = (c_k \bar{e}_k) \times (a_i b_j \varepsilon_{ijl} \bar{e}_l) = a_i b_j c_k \varepsilon_{ijl} \bar{e}_k \times \bar{e}_l = a_i b_j c_k \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{klm} \bar{e}_m$$

para el lado derecho tenemos

$$(a_i\bar{e}_i)(c_k\bar{e}_k) \bullet (b_j\bar{e}_j) - (b_j\bar{e}_j)(c_k\bar{e}_k) \bullet (a_i\bar{e}_i) = (a_ib_jc_k\delta_{jk}\bar{e}_i) - (a_ib_jc_k\delta_{ik}\bar{e}_j)$$

podemos hacer que los vectores base varíen en un único índice m introduciendo los  $\delta$  correspondientes

$$\bar{e}_i = \delta_{im}\bar{e}_m; \ \bar{e}_j = \delta_{jm}\bar{e}_m \Rightarrow a_ib_jc_k\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{klm}\bar{e}_m = a_ib_jc_k\left(\delta_{jk}\delta_{im} - \delta_{ik}\delta_{jm}\right)\bar{e}_m \Rightarrow \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{klm} = \delta_{jk}\delta_{im} - \delta_{ik}\delta_{jm}$$

haciendo el cambio  $k \rightarrow n$  y utilizando la propiedad de permutación cíclica de  $\varepsilon$  tenemos

$$\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{mnl} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

que en el lado izquierdo supone una suma debido al índice repetido *l*. Estos resultados se pueden utilizar también para demostrar las identidades vectoriales que incluyen el operador gradiente en *coordenadas cartesianas*. El objeto  $\delta_{ij}$  es realmente un *tensor* ya que verifica la ley de transformación de coordenadas para tensores. Esta ley de transformación se presentó en la discusión sobre el tensor de inercia en [1] para el caso de sistemas de coordenadas con origen común y girados según la matriz de giro *M* 

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \quad (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\delta'_{ij}) = M(\delta_{ij})M^{-1} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} = MM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})M^{-1} = MM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})M^{-1} = MM^{-1} = MM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})M^{-1} = MM^{-1} = (\delta_{ij})M^{-1} = M^{-1} = (\delta_{ij})M^{-1} = (\delta_{ij})M^{-1} = (\delta_{ij})M^{-1} = (\delta_{ij})M^{-1} = M^{-1} = (\delta_{ij})M^{-1} = (\delta_{i$$

El símbolo  $\varepsilon_{ijk}$  podemos visualizarlo mediante un vector de las matrices asociadas a k=1,2,3 y obtener la siguiente imagen

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_1, a_2, a_3) \{ (\varepsilon_{ij3}), (\varepsilon_{ij2}), (\varepsilon_{ij1}) \} \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \{ (\varepsilon_{ij3}), (\varepsilon_{ij2}), (\varepsilon_{ij1}) \} = \begin{cases} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{cases}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo el símbolo  $\varepsilon_{ijk}$  no es un tensor.

#### Teoremas de la divergencia y el rotacional generalizados para tensores

Los teoremas de la divergencia y del rotacional se refieren en principio a campos vectoriales f(x,y,z,t) y amplían la fusión entre álgebra y cálculo del teorema fundamental del cálculo vectorial.

$$\oint \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S} = \oint \overline{\nabla} \bullet \overline{f}(x, y, z, t) dV \Rightarrow \overline{\nabla} \bullet \overline{f}(x, y, z, t) = \lim_{\Delta \nu \to 0} \frac{\oint \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S}}{\Delta \nu} \quad \text{teorema de la divergencia}$$

$$\oint \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{l} = \int \left[\overline{\nabla} \times \overline{f}(x, y, z, t)\right] \bullet d\overline{S} \Rightarrow \overline{\nabla} \times \overline{f}(x, y, z, t) \Big|_{\Delta \overline{S}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{I}}{\Delta S} \quad \text{teorema de la divergencia}$$

En el caso de la divergencia, si tomamos un elemento de volumen  $\Delta v$  cúbico de aristas paralelas a los ejes de coordenadas cartesianos podemos calcular la integral de superficie correspondiente fácilmente como
$$\oint \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S} = \frac{\partial f_x}{\partial x} dx dS_x + \frac{\partial f_y}{\partial y} dy dS_y + \frac{\partial f_z}{\partial z} dz dS_z \Longrightarrow \overline{\nabla} \bullet \overline{f}(x, y, z, t) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint f(x, y, z, t) \bullet dS}{\Delta v} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} dz dS_z$$

que es el resultado esperado para la divergencia. De forma similar si  $\Delta S_x$  es un elemento de superficie cuadrado en el plano *y*-*z* y con lados paralelos a los ejes *y*,*z*, la integral de línea correspondiente será

$$\oint \overline{f}(x, y, z, t) \bullet (0.dy, dz) = \frac{\partial f_z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial f_y}{\partial z} dy dz \Longrightarrow \overline{\nabla} \times \overline{f}(x, y, z, t) \Big|_{\Delta \overline{S}_x} = \lim_{\Delta S_x \to 0} \frac{\oint f(x, y, z, t) \bullet dl}{\Delta S_x} = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}$$

y repitiendo para  $\Delta S_y$ ,  $\Delta S_z$  tenemos las componentes del rotacional como

$$\overline{\nabla} \times \overline{f}(x, y, z, t) \Big| = \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

El álgebra vectorial permite extender los teoremas integrales de la divergencia y el rotacional incluyendo integrales de superficie y de línea definidas en función no del producto escalar, sino del producto vectorial

$$\oint \overline{f}(x, y, z, t) \times d\overline{S} ; \qquad \oint \overline{f}(x, y, z, t) \times d\overline{l}$$

Si multiplicamos las expresiones anteriores escalarmente por un vector constante e no nulo arbitrario y aplicamos los teoremas integrales y el álgebra del operador gradiente tenemos

$$\oint \left(\overline{f}(x, y, z, t) \times d\overline{S}\right) \bullet \overline{e} = \oint \left(\overline{e} \times \overline{f}(x, y, z, t)\right) \bullet d\overline{S} = \oint \nabla \bullet \left(\overline{e} \times \overline{f}(x, y, z, t)\right) dv = -\oint \overline{e} \bullet \left(\nabla \times \overline{f}(x, y, z, t) dv\right)$$

$$\oint \left(\overline{f}(x, y, z, t) \times d\overline{l}\right) \bullet \overline{e} = \oint \left(\overline{e} \times \overline{f}(x, y, z, t)\right) \bullet d\overline{l} = \oint \nabla \times \left(\overline{e} \times \overline{f}(x, y, z, t)\right) \bullet d\overline{S} = \oint \overline{e} \bullet \left(\nabla \bullet \overline{f}(x, y, z, t) d\overline{S}\right) - \oint \left(\overline{e} \bullet \nabla\right) \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S}$$

Para el primer caso y dado que los resultados son válidos para cualquier vector e tenemos la siguiente forma alternativa para el teorema de la divergencia

$$\oint \overline{f}(x, y, z, t) \times d\overline{S} = -\oint \nabla \times \overline{f}(x, y, z, t) dv$$

El segundo caso podemos desarrollar utilizando el álgebra de matrices de esta forma

$$\left( \overline{e} \bullet \nabla \right) \overline{f}(x, y, z, t) \bullet d\overline{S} = \left\{ \left( dS_x \, dS_y \, dS_z \right) \bullet \left( \begin{array}{c} \nabla f_x \\ \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) \right\} \bullet \overline{e} \Rightarrow \oint \left( \overline{f}(x, y, z, t) \times d\overline{l} \right) \bullet \overline{e} = \oint \overline{e} \bullet \left( \nabla \bullet \overline{f}(x, y, z, t) d\overline{S} \right) - \oint \left\{ d\overline{S} \bullet \left( \begin{array}{c} \nabla f_x \\ \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) \right\} \bullet \overline{e} = \oint \overline{e} \bullet \left( \nabla \bullet \overline{f}(x, y, z, t) d\overline{S} \right) - \oint \left\{ d\overline{S} \bullet \left( \begin{array}{c} \nabla f_x \\ \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) \right\} \bullet \overline{e} = \oint \overline{e} \bullet \left( \nabla \bullet \overline{f}(x, y, z, t) d\overline{S} \right) - \oint \left\{ d\overline{S} \bullet \left( \begin{array}{c} \nabla f_x \\ \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) \right\} \bullet \overline{e} = \oint \overline{e} \bullet \left( \nabla \bullet \overline{f}(x, y, z, t) d\overline{S} \right) - \oint \left\{ d\overline{S} \bullet \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) \right\} \bullet \overline{e} = \oint \overline{e} \bullet \left( \nabla \bullet \overline{f}(x, y, z, t) d\overline{S} \right) - \oint \left\{ d\overline{S} \bullet \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) \right\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) \right\} = \left\{ \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) \right\} = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \nabla f_z \end{array} \right)$$

donde cada fila de la matriz de gradientes es el gradiente de la componente correspondiente del campo vectorial f(x,y,z,t). De la misma forma que en el caso anterior, dado que el resultado es válido para cualquier vector e tenemos

$$\oint \overline{f}(x, y, z, t) \times d\overline{l} = \oint \nabla \bullet \overline{f}(x, y, z, t) d\overline{S} - \oint d\overline{S} \bullet \begin{pmatrix} \nabla f_x \\ \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{pmatrix}$$

Los teoremas de la divergencia y el rotacional se pueden extender inmediatamente desde el caso de campos vectoriales al caso de campos tensoriales (matrices) debido a que este paso solamente involucra operaciones lineales. Se define la divergencia de un campo tensorial *f* como

$$div\left[\stackrel{=}{f}(x, y, z, t)\right] = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \left(\begin{array}{ccc} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{array}\right)}{\Delta v}$$

multiplicando a la izquierda por el vector base unitario  $e_x$  y utilizando el álgebra de matrices tenemos

$$\bar{e}_{x} \bullet div \left[ \overline{f}(x, y, z, t) \right] = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \left( \begin{array}{c} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} dS_{x} \\ dS_{y} \\ dS_{z} \end{array} \right)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \overline{f}_{x\#} \bullet d\overline{S}}{\Delta v} = \frac{\partial f_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{xz}}{\partial z} \Rightarrow$$
$$div \left[ \overline{f}(x, y, z, t) \right] = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \bullet \left( \begin{array}{c} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{array} \right)^{T}$$

donde el subíndice x# indica el vector fila x de la matriz (#x indicaría el vector columna x) y el superíndice T corresponde a la traspuesta de la matriz. Evidentemente, si f es un tensor simétrico coincide con su traspuesto.

El rotacional de un campo tensorial *f* se define como

$$rot\left[\frac{1}{f}(x, y, z, t)\right]_{\Delta \overline{S}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{pmatrix}}{\Delta S}$$

donde  $\Delta S$  es un elemento de superficie en una dirección determinada y la definición anterior estable el valor del rotacional del tensor en esa dirección. Multiplicando a la izquierda por el vector base unitario  $e_x$  y utilizando el álgebra de matrices tenemos

$$\begin{split} \bar{e}_{x} \bullet rot \bigg[\overline{\overline{f}}(x, y, z, t)\bigg]_{\Delta \overline{S}} &= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dl_{y} \\ dl_{z} \end{pmatrix}}{\Delta S} \\ &= \frac{\oint \overline{f}_{x\#} \bullet d\overline{l}}{\Delta S} \Rightarrow \overline{e}_{x} \bullet rot \bigg[\overline{\overline{f}}(x, y, z, t)\bigg] = \overline{\nabla} \times \overline{f}_{x\#} \\ rot \bigg[\overline{\overline{f}}(x, y, z, t)\bigg] \\ &= \bigg(\overline{\overline{\nabla}} \times \overline{f}_{x\#} \\ \overline{\nabla} \times \overline{f}_{y\#} \\ \overline{\nabla} \times \overline{f}_{y\#} \\ \overline{\nabla} \times \overline{f}_{z\#} \bigg) \\ &= \bigg(\begin{array}{c} 0 & -\partial_{z} & \partial_{y} \\ \partial_{z} & 0 & -\partial_{x} \\ -\partial_{y} & \partial_{x} & 0 \end{array} \bigg) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \\ \end{array} \bigg)^{T} \end{split}$$

Evidentemente, si *f* es un tensor simétrico coincide con su traspuesto. En el apéndice se calculan los operadores divergencia y rotacional en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Componentes Intrínsecas de Helmholtz de un campo vectorial.

Cualquier campo vectorial tridimensional que admita derivadas segundas continuas puede resolverse en el interior de un volumen *V* dado como la suma de otros dos campos vectoriales. Uno de ellos es un campo irrotacional y el otro es un campo solenoidal (de divergencia nula).

## Demostración:

Utilizando la delta de Dirac  $\delta$  tal como vimos en el trabajo Sobre la ecuación de ondas podemos desarrollar un campo vectorial F(r) así:

$$\overline{F(r)} = \int_{V} \overline{F(r')} \delta(\overline{r} - \overline{r'}) dv'$$

$$\delta(\overline{r} - \overline{r'}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^{2} \frac{1}{|\overline{r} - \overline{r'}|}$$

$$\Rightarrow \overline{F(r)} = -\frac{1}{4\pi} \nabla^{2} \left\{ \int_{V} \frac{\overline{F(r')}}{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' \right\}$$

Donde el volumen V incluye el punto r de observación del campo. De las identidades vectoriales vistas en la sección de análisis de campos tenemos

$$\nabla^2 \overline{g} = \overline{\nabla} \left[ \overline{\nabla} \bullet \overline{g} \right] - \overline{\nabla} \times \left[ \overline{\nabla} \times \overline{g} \right] \Longrightarrow -4\pi \overline{F}(\overline{r}) = \overline{\nabla} \left[ \int_V \overline{\nabla} \bullet \frac{\overline{F}(\overline{r'})}{\left| \overline{r} - \overline{r'} \right|} dv' \right] - \overline{\nabla} \times \left[ \int_V \overline{\nabla} \times \frac{\overline{F}(\overline{r'})}{\left| \overline{r} - \overline{r'} \right|} dv' \right]$$

Vemos la necesidad de derivadas parciales segundas continuas. Volviendo de nuevo a las identidades vectoriales, si *a* es un vector constante tenemos

)

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\nabla} \bullet \left( g \overrightarrow{a} \right) = \overrightarrow{a} \bullet \overline{\nabla} g \\ \overline{\nabla} \times \left( g \overrightarrow{a} \right) = -\overrightarrow{a} \times \overline{\nabla} g \\ \overline{\nabla} \cdot \frac{1}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} = -\overline{\nabla} \frac{1}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} \end{array} \right\} \Rightarrow 4\pi \overline{F}(\overrightarrow{r}) = \overline{\nabla} \left[ \int_{V} \overline{F}(\overrightarrow{r'}) \bullet \overline{\nabla}' \frac{1}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} dv' \right] + \overline{\nabla} \times \left[ \int_{V} \overline{F}(\overrightarrow{r'}) \times \overline{\nabla}' \frac{1}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} dv' \right]$$

El gradiente en coordenadas del observador y en coordenadas primadas de la función  $|\bar{r}-\bar{r}|$ , para unos puntos de derivación *r*,*r*' definidos genera vectores iguales y opuestos.

Siguiendo con las identidades vectoriales, pero ahora derivando en la variable primada tenemos

$$\overline{\nabla}^{\bullet} \left( g \overline{f} \right) = \overline{f} \bullet \overline{\nabla}^{\circ} g + g \overline{\nabla}^{\circ} \bullet \overline{f} \\ \overline{\nabla}^{\circ} \times \left( g \overline{f} \right) = \overline{\nabla}^{\circ} g \times \overline{f} + g \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{f} \\ \end{array} \right) \Rightarrow 4\pi \overline{F}(\overline{r}) = \overline{\nabla} \left[ \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \bullet \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\overline{\nabla}^{\circ} \bullet \overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\nabla}^{\circ} \times \overline{\overline{F}(\overline{r'})} \\ \overline{|\overline{r} - \overline{r'}|} dv' - \int_{V} \overline{\overline{T}(\overline{r})} \\ \overline{\overline{T}(\overline{r})} + \overline{\overline{T}(\overline{r})}$$

Utilizando el teorema de la divergencia y su expresión alternativa presentados en este mismo apéndice tenemos

$$4\pi\overline{F}(\overline{r}) = \overline{\nabla} \left[ \int_{S} \frac{\overline{F}(\overline{r'})}{|\overline{r}-\overline{r'}|} \bullet dS' - \int_{V} \frac{\overline{\nabla'} \bullet \overline{F}(\overline{r'})}{|\overline{r}-\overline{r'}|} dv' \right] + \overline{\nabla} \times \left[ \int_{V} \frac{\overline{\nabla'} \times \overline{F}(\overline{r'})}{|\overline{r}-\overline{r'}|} dv' + \int_{S} \frac{\overline{F}(\overline{r'})}{|\overline{r}-\overline{r'}|} \times d\overline{S'} \right]$$

y con las siguientes definiciones de *potenciales* escalar y vectorial tenemos

$$\begin{aligned} 4\pi\phi(\vec{r}) &= \int_{V} \frac{\overline{\nabla'} \cdot \overline{F(r')}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\right|} dv' - \int_{S} \frac{\overline{F(r')}}{\left|\vec{r} - \vec{r}\right|} \cdot dS' \\ 4\pi\overline{A}(\vec{r}) &= \int_{V} \frac{\overline{\nabla'} \times \overline{F(r')}}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} dv' + \int_{S} \frac{\overline{F(r')}}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} \times d\overline{S'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{F}(\vec{r}) = -\overline{\nabla}\phi(\vec{r}) + \overline{\nabla} \times \overline{A}(\vec{r})$$

donde es evidente que el campo vectorial  $-\overline{\nabla}\phi(r)$  tiene rotacional nulo y el campo vectorial  $\overline{\nabla} \times \overline{A(r)}$  tiene divergencia nula (campo solenoidal).

Divergencia y rotacional de un campo que se expresa como el producto de una matriz por un campo vectorial.

Si la matriz es  $\tau$  y el campo vectorial es u, podemos calcular la divergencia de *tu* en función de sus componentes de esta forma

$$\overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} \overline{\tau} u \\ \overline{\tau} u \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} u_j + \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \equiv \begin{pmatrix} div \ \overline{\tau} \end{pmatrix} \bullet \overline{u} + (\overline{\nabla} u) \bullet \overline{\tau}$$

donde vemos que aparece la divergencia del tensor  $\tau$  y un valor real correspondiente al producto escalar, suma de productos de componentes con índices iguales, de los tensores  $\tau$  y  $\overline{\nabla u}$ . Para que esta interpretación sea correcta, definimos las componentes del tensor  $\overline{\nabla u}$  como

$$\overline{\nabla u} \equiv \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}; \ i \to fila, \ j \to columna$$

Podemos hacer el mismo cálculo utilizando la técnica de la derivada del producto empleada en la sección sobre análisis de campos

$$\overline{\nabla} \bullet \left(\overline{\tau u}\right) = \overline{\nabla} \bullet \left(\overline{\tau u}_p + \overline{\tau}_p \overline{u}\right) = \left(\overline{\nabla} \bullet \overline{\tau}\right) \bullet \overline{u}_p + \left(\overline{\tau}_p^{T} \left(\overline{\nabla} \bullet\right)^{T}\right)^{T} \bullet \overline{u} ; \nabla \bullet \equiv \left(\partial_x \quad \partial_y \quad \partial_z\right) \bullet$$

donde el subíndice p indica un valor puntual constante no afectado por la operación de derivación y el superíndice T indica trasposición matricial. Identificamos el segundo término como el producto escalar de los tensores  $\tau$  y  $\overline{\nabla u}$ .

$$\begin{pmatrix} =^{T} (\overline{\nabla} \bullet)^{T} \end{pmatrix}^{T} \bullet \overline{u} = (\overline{\nabla} \overline{u}) \bullet \overline{\tau}$$

Aplicando esta misma técnica al caso del rotacional tenemos

$$\overline{\nabla} \times \left(\overline{\tau u}\right) = \overline{\nabla} \times \left(\overline{\tau u}_p + \overline{\tau}_p \overline{u}\right) = \left(\overline{\nabla} \times \overline{\tau}\right) \overline{u}_p + \left(\overline{\tau}_p \left(\overline{\nabla} \times\right)^T\right)^T \overline{u} \quad ; \quad \nabla \times \equiv \left(\begin{array}{ccc} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{array}\right)$$

En el apéndice se calculan los operadores divergencia y rotacional en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Divergencia y rotacional del producto de tensores.

Podemos plantear la acción de estos operadores sobre el producto de dos tensores a,b de tres filas y tres columnas (3x3) utilizando la descomposición del producto que ya se utilizó en la sección sobre análisis matemático de campos.

En el apéndice se calculan los operadores divergencia y rotacional en coordenadas cilíndricas y esféricas.

# Teorema de Helmholtz.

Toda matriz  $M\{m_{ij}\}$  puede descomponerse fácilmente en suma de otras dos matrices, una simétrica S y otra antisimétrica A.

$$\begin{split} m_{ij} &= \frac{1}{2} \left( m_{ij} + m_{ji} \right) + \frac{1}{2} \left( m_{ij} - m_{ji} \right) \; ; \; \overline{\overline{M}} = \left\{ m_{ij} \right\} ; \; \overline{\overline{S}} = \left\{ \frac{1}{2} \left( m_{ij} + m_{ji} \right) \right\} \; ; \; \overline{\overline{A}} = \left\{ \frac{1}{2} \left( m_{ij} - m_{ji} \right) \right\} \Rightarrow \\ \overline{\overline{M}} &= \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{A}} \end{split}$$

La matriz antisimétrica solo tiene tres componentes independientes y su acción sobre el campo E se puede expresar por medio del producto vectorial como vimos en [1] de modo que tenemos

$$\overline{\overline{M}}\overline{E} = \overline{\overline{S}}\overline{E} + \overline{\overline{A}}\overline{E} \Rightarrow \overline{\overline{M}}\overline{E} = \overline{\overline{S}}\overline{E} + \overline{\overline{A}} \times \overline{E} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \bullet \left(\overline{\overline{M}}\overline{E}\right) = \nabla \bullet \left(\overline{\overline{S}}\overline{E}\right) + \nabla \bullet \left(\overline{\overline{A}} \times \overline{E}\right) \\ \nabla \times \left(\overline{\overline{M}}\overline{E}\right) = \nabla \times \left(\overline{\overline{S}}\overline{E}\right) + \nabla \times \left(\overline{\overline{A}} \times \overline{E}\right) \end{cases}$$

dado que la matriz S es simétrica se puede diagonalizar y encontrar un sistema de coordenadas que simplifique los cálculos. Sin embargo las matrices M,S,A puede no ser constantes y depender del punto concreto : M(r), S(r), A(**r**).

Un caso sencillo al que se pueden aplicar estos resultados es el estudio del campo de velocidades de un fluido en puntos muy cercanos a un punto de referencia  $r_0$  y en un instante fijo  $t_0$ ; lo que constituye el contexto del Teorema de Helmholtz. Si  $u(r,t_0)$  representa la velocidad en el punto r, del análisis elemental tenemos

$$u_i(\bar{r},t_0) = u_i(\bar{r}_0,t_0) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|_{r_0} \delta x_j \Longrightarrow u_i(\bar{r},t_0) - u_i(\bar{r}_0,t_0) \equiv \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|_{r_0} \delta x_j$$

donde los índices *i,j* son independientes y varían en las tres coordenadas cartesianas. La parte izquierda del resultado representa un campo de velocidades en las proximidades de  $r_0$  y la parte derecha es formalmente el producto de una matriz por un vector ( $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ). Por tanto podemos aplicar los

resultados anteriores tomando  $m_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ;  $M = \overline{\partial u_0}$ 

$$\nabla \bullet \left(\overline{\partial u}_{0} \delta \overline{r}\right) = \nabla \bullet \left(\overline{S_{0}} \delta \overline{r}\right) + \nabla \bullet \left(\overline{A_{0}} \times \delta \overline{r}\right); \quad \nabla \times \left(\overline{\partial u}_{0} \delta \overline{r}\right) = \nabla \times \left(\overline{S_{0}} \delta \overline{r}\right) + \nabla \times \left(\overline{A_{0}} \times \delta \overline{r}\right)$$

donde los subíndices 0 indican valores puntuales calculados en la referencia  $r_0$  y que por tanto son constantes en el proceso de derivación. Dado que para toda matriz simétrica ( $S_0$ ) podemos encontrar un sistema de coordenadas en el que las componentes no nulas de  $S_0$  se reducen a los tres valores de la diagonal, podemos simplificar la expresión anterior con el correspondiente vector asociado a  $S_0$ 

$$\nabla \bullet \left(\overline{\partial u}_{0} \delta \overline{r}\right) = \nabla \bullet \begin{pmatrix} S_{0}^{xx} \delta x \\ S_{0}^{yy} \delta y \\ S_{0}^{zz} \delta z \end{pmatrix} + \nabla \bullet \left(\overline{A_{0}} \times \delta \overline{r}\right); \quad \nabla \times \left(\overline{\partial u}_{0} \delta \overline{r}\right) = \nabla \times \begin{pmatrix} S_{0}^{xx} \delta x \\ S_{0}^{yy} \delta y \\ S_{0}^{zz} \delta z \end{pmatrix} + \nabla \times \left(\overline{A_{0}} \times \delta \overline{r}\right)$$

según las reglas de cálculo desarrolladas en la sección sobre análisis de campos tenemos

$$\nabla \bullet \left(\overline{\partial u}_{0} \delta \overline{r}\right) = S_{0}^{xx} + S_{0}^{yy} + S_{0}^{zz} = \frac{\partial u_{x}}{\partial x}\Big|_{r0} + \frac{\partial u_{y}}{\partial y}\Big|_{r0} + \frac{\partial u_{z}}{\partial z}\Big|_{r0} \quad ; \quad \nabla \times \left(\overline{\partial u}_{0} \delta \overline{r}\right) = \nabla \times \left(\overline{A_{0}} \times \delta \overline{r}\right) = 2\overline{A_{0}}$$

en caso de flujo incompresible tenemos

$$\nabla \bullet \left(\overline{\partial u}_{0} \delta \overline{r}\right) = 0; \quad \nabla \times \left(\overline{\partial u}_{0} \delta \overline{r}\right) = 2\overline{A_{0}} \Rightarrow \overline{\partial u}_{0} \delta \overline{r} = \overline{A_{0}} \times \delta \overline{r}$$

y el campo de velocidades local equivale a una rotación rígida con velocidad angular  $A_0$ .

Con los resultados obtenidos sobre el campo local de velocidades podemos analizar el comportamiento de un elemento de fluido cúbico de caras paralelas a los planos del sistema de coordenadas, de volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$  y centrado en  $r_0$ que evoluciona desde  $t_0$  hasta  $t_0+dt$ . En esta evolución diferencial el elemento de fluido mantiene una cantidad de materia fija. Sabemos que la componente antisimétrica provoca un giro rígido diferencial del cubo respecto a un eje instantáneo de rotación que pasa por  $r_0$ . En la situación general de fluido compresible debemos también interpretar el efecto del tensor simétrico. Si tomamos una arista de nuestro cubo elemental en la dirección del eje xpodemos ver que la velocidad relativa entre los vértices de la arista será  $S_0^{xx}\Delta x$ . Análogamente ocurre para las arístas en las dos direcciones restantes. Por tanto la componente simétrica introduce una variación en el volumen dV de valor

$$V = \Delta x \Delta y \Delta z \Rightarrow dV = d(\Delta x) \Delta y \Delta z + d(\Delta y) \Delta x \Delta z + d(\Delta z) \Delta x \Delta y \Rightarrow$$
$$dV = \left(S_0^{xx} \Delta x\right) dt \Delta y \Delta z + \left(S_0^{yy} \Delta y\right) dt \Delta x \Delta z + \left(S_0^{zz} \Delta z\right) dt \Delta x \Delta y \Rightarrow$$
$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = S_0^{xx} + S_0^{yy} + S_0^{zz} = \nabla \cdot \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial u}} \cdot \overline{\delta r}\right)$$

y por tanto, si el fluido es compresible, la componente simétrica refleja, por medio de la divergencia, la variación de volumen de un elemento de fluido que mantiene una cantidad de materia fija. A esta variación se debe añadir linealmente el giro rígido del elemento de fluido asociado a la componente simétrica. Estos resultados que hemos deducido para el movimiento local de un elemento de fluido se conocen como *Teorema de Helmholtz*.

# Vorticidad

Se conoce por vorticidad  $\omega$  al rotacional del campo de velocidades de un fluido  $\overline{\omega} = \overline{\nabla} \times \overline{u}$ . Como sabemos por el teorema de Helmholtz de la sección anterior  $\omega$  está relacionado con un movimiento rotatorio o arremolinado en la corriente. Para el caso de fluido sin rozamiento interno es válida la ecuación de Euler

$$\frac{1}{2}\overline{\nabla}(u^2) + \frac{1}{\rho}\overline{\nabla}p + \overline{\nabla}V = \overline{u} \times (\overline{\nabla} \times \overline{u}) - \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$$

calculando el rotacional de la expresión anterior tenemos

$$\overline{\nabla} \times \left(\frac{1}{\rho} \overline{\nabla} p\right) = \overline{\nabla} \times \left(\overline{u} \times \overline{\omega}\right) - \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial t}$$

ecuación que describe la evolución de la vorticidad  $\omega$  en un fluido. Sin embargo es posible resolver los términos de esta ecuación hasta una forma matemática mas sencilla utilizando los resultados de la sección de análisis de campos

$$\overline{\nabla} \times \left(\frac{1}{\rho} \overline{\nabla} p\right) = -\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \frac{1}{\rho} \overline{\nabla} \times \overline{\nabla} p = -\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$
$$\overline{\nabla} \times (\overline{u} \times \overline{\omega}) = (\overline{\nabla} \bullet \overline{\omega}) \overline{u} - (\overline{u} \bullet \overline{\nabla}) \overline{\omega} - (\overline{\nabla} \bullet \overline{u}) \overline{\omega} + (\overline{\omega} \bullet \overline{\nabla}) \overline{u} \\\overline{\nabla} \bullet \overline{\omega} = \overline{\nabla} \bullet \overline{\nabla} \times \overline{u} = 0$$
$$\Longrightarrow \overline{\nabla} \times (\overline{u} \times \overline{\omega}) = -(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}) \overline{\omega} - (\overline{\nabla} \bullet \overline{u}) \overline{\omega} + (\overline{\omega} \bullet \overline{\nabla}) \overline{u}$$

sustituyendo estos resultados en la ecuación inicial y reagrupando términos tenemos

$$-\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p = -\left(\overline{\nabla}\bullet\overline{u}\right)\overline{\omega} + \left(\overline{\omega}\bullet\overline{\nabla}\right)\overline{u} - \left[\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial t} + \left(\overline{u}\bullet\overline{\nabla}\right)\overline{\omega}\right]$$

Entre corchetes podemos reconocer la derivada temporal total de la vorticidad  $d\omega/dt$ . Por otro lado, a partir de la conservación de la masa podemos resolver  $\overline{\nabla} \cdot \overline{u}$  en función de la densidad  $\rho$  de esta forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overline{\nabla} \bullet \left(\rho \overline{u}\right) = 0 = \left[\frac{d\rho}{dt} - \left(\overline{u} \bullet \nabla\right)\rho\right] + \left[\left(\overline{u} \bullet \overline{\nabla}\right)\rho + \rho\overline{\nabla} \bullet \overline{u}\right] \Longrightarrow - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \overline{\nabla} \bullet \overline{u}$$

sustituyendo estos dos resultados y reagrupando tenemos

$$\frac{-1}{\rho^2}\overline{\nabla}\rho\times\overline{\nabla}p = -(\overline{\omega}\bullet\overline{\nabla})\overline{u} - \left[\frac{d\overline{\omega}}{dt} - \frac{\overline{\omega}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right]$$

dividiendo todo por la densidad  $\rho$  el corchete se puede resolver con la derivada temporal de  $\omega/\rho$ , de modo que tenemos finalmente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\overline{\omega}}{\rho} \bullet \overline{\nabla}\right)\overline{u} - \frac{1}{\rho^3}\overline{\nabla}\rho \times \overline{\nabla}p$$

en caso de fluidos incompresibles/barotrópicos<sup>8</sup> sin rozamiento el resultado es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\overline{\omega}}{\rho} \bullet \overline{\nabla}\right)\overline{u}$$

conocida como *ecuación de Helmholtz* en mecánica de fluidos. Una consecuencia inmediata de esta ecuación es que, para fluidos incompresibles o barotrópicos sin rozamiento, si la vorticidad  $\omega$  es nula en todos los puntos de la corriente en un instante dado también lo será en cualquier otro instante. De forma equivalente, si un volumen material de fluido tiene vorticidad nula en todos sus puntos, la evolución futura de ese volumen material de fluido mantendrá la vorticidad nula en todos sus puntos. Por tanto la vorticidad no es un fenómeno que se propague en el fluido, sino que es transportado por dicho fluido, de modo que un elemento de fluido afectado por vorticidad no la pierde nunca.

### Vorticidad y momento angular del fluido

Es evidente que la vorticidad de un fluido afecta al momento angular en el fluido y que esta vorticidad debe ser consistente con el principio de conservación del momento angular. Para ilustrar este punto, partimos del escenario del teorema de Helmholtz en el que se analiza el movimiento de un fluido en las proximidades de un punto de referencia  $r_0$  en el fluido. Vimos que una de las componentes del movimiento relativo del fluido corresponde a una velocidad angular de valor  $\omega/2$ , donde  $\omega$  es la vorticidad. En este contexto vamos a tomar un pequeño desplazamiento geométrico  $\lambda$  referido a  $r_0$  de modo que es paralelo a la vorticidad  $\omega$  en  $t_0$ . Multiplicamos la ecuación de Helmholtz por este parámetro de la siguiente manera

$$\overline{\omega} = \omega \overline{n} ; \overline{\lambda} = \lambda \overline{n} ; en \ t = t_0 \Longrightarrow \lambda \frac{d}{dt} \left( \frac{\overline{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\omega}{\rho} \left( \overline{\lambda} \bullet \overline{\nabla} \right) \overline{u} ; en \ t = t_0$$

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> Un gas ideal evolucionando adiabáticamente es un fluido barotrópico, como se expuso en la sección *Campos asociados a un fluido* 

el término convectivo corresponde a la velocidad relativa entre los extremos de  $\lambda$  en  $t_0$ , interpretando  $\lambda$  como un segmento de fluido

$$\left(\overline{\lambda} \bullet \overline{\nabla}\right) \overline{u} = \lambda_x \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \approx \overline{u}(\overline{r} + \overline{\lambda}, t_0) - \overline{u}(\overline{r}, t_0) \approx \frac{d \overline{\lambda}}{dt}$$

Note el lector que la ecuación diferencia para  $\lambda$  tiene la misma forma que la ecuación de Helmholtz para  $\omega/\rho$ . Sustituyendo este resultado en el anterior tenemos

$$\lambda \frac{d}{dt} \left( \frac{\overline{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\omega}{\rho} \frac{d\overline{\lambda}}{dt}$$

desarrollando las derivadas en función del vector *n* y considerando que dn/dt es igual para los vectores  $\lambda$  y  $\omega$  tenemos

$$\lambda \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega}{\rho} \stackrel{-}{n} \right) = \lambda \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega}{\rho} \right) \stackrel{-}{n} + \lambda \frac{\omega}{\rho} \frac{d \stackrel{-}{n}}{dt}$$
$$\Rightarrow \lambda \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega}{\rho} \right) - \frac{\omega}{\rho} \frac{d \lambda}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{\lambda \rho} = cte$$

El segmento  $\lambda$  es un valor pequeño, en correspondencia con el teorema de Helmholtz, y que se mantiene paralelo a la vorticidad. En el entorno de un elemento de fluido  $r_0$  consideremos un pequeño cilindro de fluido de altura  $\lambda$  y radio *r*. La masa contenida en este cilindro de fluido se mantiene constante al moverse en el fluido y por tanto tenemos la siguiente constante

$$\rho r^2 \lambda = cte$$

multiplicando las dos constantes anteriores llegamos a

$$r^2\omega = cte \implies L \approx \frac{1}{2}mr^2\omega = cte$$

lo cual es inmediatamente interpretable como conservación del momento angular *L* del elemento de fluido cilíndrico.

Energía mecánica y energía interna en un fluido.

Anteriormente llegamos a la ley de conservación del impulso en un fluido en esta forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \overline{u} \right] - \rho \overline{g} + \overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p - \tau_{xx}^* & \rho u_y u_x - \tau_{xy}^* & \rho u_z u_x - \tau_{xz}^* \\ \rho u_x u_y - \tau_{yx}^* & \rho u_y u_y + p - \tau_{yy}^* & \rho u_z u_y - \tau_{yz}^* \\ \rho u_x u_z - \tau_{zx}^* & \rho u_y u_z - \tau_{zy}^* & \rho u_z u_z + p - \tau_{zz}^* \end{pmatrix} = 0$$

Si consideramos la trayectoria de un elemento de fluido, podemos reemplazar la derivada parcial con el tiempo por la derivada total en el tiempo y el término convectivo correspondiente

$$\frac{d}{dt} \left[ \rho \overline{u} \right] - \left( \overline{u} \bullet \nabla \right) \rho \overline{u} - \rho \overline{g} + \overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} \rho u_x u_x + p - \tau_{xx}^* & \rho u_y u_x - \tau_{xy}^* & \rho u_z u_x - \tau_{xz}^* \\ \rho u_x u_y - \tau_{yx}^* & \rho u_y u_y + p - \tau_{yy}^* & \rho u_z u_y - \tau_{yz}^* \\ \rho u_x u_z - \tau_{zx}^* & \rho u_y u_z - \tau_{zy}^* & \rho u_z u_z + p - \tau_{zz}^* \end{pmatrix} = 0$$

Analizando en componentes (x,y,z) vemos que el término convectivo anula las correspondientes componentes convectivas del tensor y produce este resultado

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\overline{u}\right] + \rho\left(\overline{\nabla} \bullet \overline{u}\right)\overline{u} - \rho\overline{g} + \overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} p - \tau_{xx}^* & -\tau_{xy}^* & -\tau_{xz}^* \\ -\tau_{yx}^* & p - \tau_{yy}^* & -\tau_{yz}^* \\ -\tau_{zx}^* & -\tau_{zy}^* & p - \tau_{zz}^* \end{pmatrix} = 0$$

desarrollando la derivada temporal tenemos

$$\rho \frac{d\overline{u}}{dt} + \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\overline{\nabla} \bullet \overline{u}\right)\right]\overline{u}$$

resolviendo la derivada temporal total de la densidad y utilizando resultados de la sección de análisis de campos tenemos

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \overline{u} \bullet \nabla \right) \rho + \rho \left( \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\nabla} \bullet \left( \rho \overline{u} \right) = 0$$

valor nulo debido a la conservación de la masa. Por tanto tenemos el resultado general

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} - \rho \overline{g} + \overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} p - \tau_{xx}^* & -\tau_{xy}^* & -\tau_{xz}^* \\ -\tau_{yx}^* & p - \tau_{yy}^* & -\tau_{yz}^* \\ -\tau_{zx}^* & -\tau_{zy}^* & p - \tau_{zz}^* \end{pmatrix} = 0$$

Para obtener magnitudes con significado energético basta con multiplicar escalarmente este resultado por la velocidad *u* 

$$\rho \overline{u} \bullet \frac{d\overline{u}}{dt} - \rho \overline{g} \bullet \overline{u} + \overline{u} \bullet \left(\overline{\nabla} \bullet \overline{\tau}\right) = 0 \ ; \ \tau_{ij} = \left\{ p + \frac{2}{3} \eta \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right\} \delta_{ij} - \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Como se vio en una sección anterior, la siguiente identidad algebraica es válida para la divergencia de la acción de la matriz *simétrica*  $\tau$  sobre el vector *u* 

$$\overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} \overline{\tau} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\nabla} u \end{pmatrix} \bullet \stackrel{=}{\tau} + \stackrel{-}{u} \bullet \begin{pmatrix} \overline{\nabla} \bullet \stackrel{=}{\tau} \end{pmatrix} \Longrightarrow \stackrel{-}{u} \bullet \begin{pmatrix} \overline{\nabla} \bullet \stackrel{=}{\tau} \end{pmatrix} = \overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} \overline{u} \stackrel{=}{\tau} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\nabla} u \end{pmatrix} \bullet \stackrel{=}{\tau}$$

aquí he tomado cierta licencia en el uso del símbolo de producto escalar, ya que se utiliza para el *producto escalar de dos tensores*; este producto es un número real que a continuación se expresa en componentes mediante el convenio de Einstein de suma en los subíndices repetidos

$$\left( \overline{\nabla u} \right) \bullet \overline{\tau} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tau_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[ \left\{ p + \frac{2}{3} \eta \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right\} \delta_{ij} - \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

$$2S_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Longrightarrow \left( \overline{\nabla u} \right) \bullet \overline{\tau} = p \overline{\nabla} \bullet \overline{u} + \frac{2}{3} \eta \left( \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right)^2 - 2\eta S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

donde  $S_{ij}$  son las componentes simétricas del tensor gradiente de la velocidad ( $\overline{\nabla u}$ ). Debido a la simetría de estas componentes y al convenio sumatorio de Einstein tenemos

$$2S_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = S_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + S_{ji}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = S_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 2S_{ij}S_{ij}$$

con lo que tenemos el siguiente resultado

$$-\overline{\nabla} \bullet \left(\bar{\overline{\tau}u}\right) + \rho \overline{g} \bullet \overline{u} = \rho \overline{a} \bullet \overline{u} - p \overline{\nabla} \bullet \overline{u} - \frac{2}{3} \eta \left(\overline{\nabla} \bullet \overline{u}\right)^2 + 2\eta S_{ij} S_{ij}$$

De lo discutido en la sección anterior sobre el teorema de Helmholtz podemos ver que el siguiente término

$$p\overline{\nabla} \bullet \overline{u} = \frac{1}{\Delta V} \frac{pdV}{dt}$$

está directamente relacionado trabajo termodinámico (*pdV*) en la compresión de un elemento de fluido  $\Delta V$ . Para que aparezca la potencia asociada a este trabajo basta multiplicar la expresión por el volumen del elemento de fluido  $\Delta V$ ; lo que nos permite identificar otros términos energéticos. En el lado izquierdo tenemos:

 $-\overline{\nabla} \cdot \left(\overline{\tau u}\right) \Delta V$  mediante el teorema de la divergencia corresponde a la potencia desarrollada por las fuerzas de contacto sobre la superficie del elemento de fluido.

 $\rho \overline{g} \bullet \overline{u} \Delta V$  es la potencia desarrollada por las fuerzas externas sobre el elemento de fluido.

 $\rho \bar{a} \cdot \bar{u} \Delta V$  es la potencia cinética que adquiere el elemento de fluido.

 $-p\overline{\nabla} \bullet \overline{u} \Delta V$  es la potencia del trabajo de expansión realizado por el elemento de fluido.

 $2\eta \left\{ S_{ij}S_{ij} - \frac{1}{3} (\overline{\nabla} \bullet \overline{u})^2 \right\} \Delta V$  es el trabajo irreversible disipado en calor debido a rozamientos internos asociados a la viscosidad del fluido.

Los dos últimos términos corresponden a la energía interna (e) del elemento de volumen, pero evidentemente el elemento de volumen puede intercambiar

energía interna en forma de calor( $\delta q$ ), de modo que la variación de energía interna del elemento de volumen es

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q - p\overline{\nabla} \bullet \overline{u} - \frac{2}{3}\eta (\overline{\nabla} \bullet \overline{u})^2 + 2\eta S_{ij}S_{ij}$$

En caso de que el elemento de volumen intercambie calor por conducción según la teoría de Fourier[5] la ecuación anterior pasa a ser

$$\frac{de}{dt} = \overline{\nabla} \bullet \left( k \overline{\nabla} T \right) - p \overline{\nabla} \bullet \overline{u} - \frac{2}{3} \eta \left( \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right)^2 + 2\eta S_{ij} S_{ij}$$

donde *k* es el coeficiente de conducción que suponemos variable. Los términos de viscosidad se pueden poner de esta forma

$$2\eta \left[ S_{ij}S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right)^2 \right] = 2\eta \left[ S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right] \left[ S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right] = 2\eta \left[ S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right]^2$$

lo que demuestra que es un valor siempre positivo y por tanto la viscosidad produce un aumento *irreversible* de energía interna del fluido.

Momento angular de un fluido. Simetría del tensor de esfuerzos.

Si en vez de multiplicar escalarmente por la velocidad la ecuación de conservación del impulso mecánico de un elemento de fluido lo hacemos vectorialmente por el vector posición *r* obtendremos magnitudes relacionadas con el momento de fuerzas

$$\rho \overline{r} \times \frac{d\overline{u}}{dt} - \rho \overline{r} \times \overline{g} + \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \overline{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = 0$$

donde la matriz de coordenadas es otra forma de expresar el producto vectorial, como se vio en el trabajo sobre sólido rígido. Podemos transformar la expresión anterior a una forma mas conveniente con un poco de desarrollo algebráico. Si M y N son matrices, M simétrica, y  $e_i$  es un vector constante de la base cartesiana tenemos

$$\nabla \bullet \left( M \, \bar{e}_i \right) = \left( \nabla \bullet M \, \right) \bullet \bar{e}_i \Longrightarrow \nabla \bullet (MN) \bullet \bar{e}_i = \nabla \bullet \left( M N \, \bar{e}_i \right) = \nabla \bullet \left( M \, \overline{N}_i \right)$$

donde  $N_i$  es el vector-columna *i-esimo* de la matriz N. Aplicando la identidad algebráica presentada en la sección anterior sobre energía tenemos

$$\nabla \bullet \left( M \,\overline{N}_i \right) = M \bullet \nabla \overline{N}_i + \overline{N}_i \bullet \left( \nabla \bullet M \right)$$

con la salvedad ya comentada sobre el producto escalar de tensores que aparece en el primer sumando del segundo miembro. En nuestro caso *N* es la matriz o tensor de coordenadas asociada al producto vectorial, de modo que

podemos calcular los tensores gradiente correspondientes a cada coordenada así

$$\nabla \overline{N}_1 = \nabla \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \nabla \overline{N}_2 = \nabla \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ \nabla \overline{N}_3 = \nabla \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de modo que los correspondientes productos escalares de tensores son

$$M \bullet \nabla \overline{N}_1 = m_{32} - m_{23}; M \bullet \nabla \overline{N}_2 = m_{13} - m_{31}; M \bullet \nabla \overline{N}_3 = m_{21} - m_{12}$$

si M es un tensor simétrico, como el tensor de tensiones  $\tau$  del fluido, los productos anteriores se anulan y por tanto , considerando todas las componentes vectoriales, resulta

$$\nabla \bullet \left( \begin{pmatrix} \tau_{xx} \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \ \tau_{yy} \ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \ \tau_{zy} \ \tau_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \bullet \left( \nabla \bullet \begin{pmatrix} \tau_{xx} \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \ \tau_{yy} \ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \ \tau_{zy} \ \tau_{zz} \end{pmatrix} \right)$$

lo que resulta en

$$\rho \overline{r} \times \frac{d\overline{u}}{dt} - \rho \overline{r} \times \overline{g} - \nabla \bullet \left( \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \right) = 0; \ \tau_{ij} = \left\{ p + \frac{2}{3} \eta \overline{\nabla} \bullet \overline{u} \right\} \delta_{ij} - \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Note el lector el cambio de signo del término de la divergencia compensado con el cambio de orden del producto de matrices; algo posible debido al carácter simétrico del tensor de esfuerzos. El contenido de la divergencia corresponde al momento de fuerzas internas asociadas a la presión y viscosidad en la superficie del elemento de volumen correspondiente. En suma hemos encontrado el resultado esperado para los momentos de fuerza sobre el elemento de fluido. Si partimos de esta última ecuación como expresión del principio de conservación del momento angular y razonamos hacia atrás para llegar a la ecuación de conservación del impulso mecánico veremos que las componentes del tensor  $\tau$  deben ser *necesariamente* simétricas. El carácter simétrico del tensor  $\tau$  es una consecuencia necesaria de la conservación del impulso mecánico y del impulso angular en un fluido.

Interpretación vectorial de las transformaciones de coordenadas: bases covariante y contravariante.

Consideremos dos bases en el espacio vectorial euclídeo, una base ortonormal (i,j,k) y otra base  $(b_1,b_2,b_3)$  arbitraria cuyos vectores no son ni unitarios ni ortogonales. Un mismo vector expresado en las dos bases nos lleva a la igualdad

$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = \alpha\overline{b}_1 + \beta\overline{b}_2 + \gamma\overline{b}_3$$

multiplicando esta igualdad escalarmente por los vectores de la base ortonormal (i, j, k) obtenemos la siguiente relación según el álgebra de matrices

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{b}_1 \bullet \overline{i} & \overline{b}_2 \bullet \overline{i} & \overline{b}_3 \bullet \overline{i} \\ \overline{b}_1 \bullet \overline{j} & \overline{j} & \overline{b}_2 \bullet \overline{j} & \overline{b}_3 \bullet \overline{j} \\ \overline{b}_1 \bullet \overline{k} & \overline{b}_2 \bullet \overline{k} & \overline{b}_3 \bullet \overline{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

note el lector que las columnas de la matriz corresponden a las componentes de los vectores base  $b_i$  en la base ortogonal (*i*,*j*,*k*).



Habitualmente se suelen utilizar en física sistemas de coordenadas alternativos a las coordenadas cartesianas con objeto de aprovechar alguna simetría que presente el problema tratado. Así por ejemplo, la ley de Newton de la gravedad se suele expresar de la forma

$$\overline{F} = -G\frac{Mm}{r^2}u_r$$

en este caso, las coordenadas mas apropiadas son coordenadas polares planas ( $r, \Phi$ ); donde r es el modulo del radio-vector desde el foco de fuerzas al punto  $P y \Phi$  es el ángulo que el radio-vector forma

con una dirección fija de referencia. Pero las coordenadas polares tiene también otro detalle interesante que aparece en la Ley de Newton: el vector que aparece  $u_r$  es un vector unitario local definido en el punto P de aplicación de la fuerza.

Un sistema de coordenadas no solo permite localizar puntos en el espacio; también permite definir una base vectores unitarios locales, es decir, en cada punto del espacio. En la imagen tenemos dos sistemas de coordenadas para referir los mismos puntos. El sistema cartesiano está asociado a los vectores base (i,j); pero también tiene definidos una base de vectores unitarios locales en cada punto del espacio formada simplemente por el desplazamiento paralelo de los vectores base i,j al punto considerado, como vemos en el caso de los vectores i' y j'. Las coordenadas cartesianas del campo vectorial en el punto P se pueden medir como las proyecciones del valor del campo sobre los vectores unitarios i' y j'. En el sistema de coordenadas polares también tenemos una base local de vectores unitarios : b1 y b2. Podemos construirla desde el punto P variando alternativamente cada una de las coordenadas y viendo la dirección que toma el movimiento conseguido sobre el punto P

Vector b1 : Mantenemos constante el ángulo  $\Phi$  y aumentamos r  $(\partial P/\partial r)_{\Phi}$ Vector b2 : Mantenemos constante la distancia r y aumentamos  $\Phi$   $(\partial P/\partial \Phi)_r$ 

Finalmente de estas operaciones obtenemos dos vectores linealmente independientes en el plano, vectores que forman la base local unitaria asociada al punto *P* en el sistema de coordenadas polares. Esta base se denomina base local covariante ya que se genera a partir de variaciones parciales de las coordenadas respecto de un punto arbitrario *P*. Note el lector que, a diferencia del caso cartesiano, en coordenadas polares los vectores base locales en

general varían de dirección de un punto a otro del espacio. Por supuesto podemos proyectar el valor de nuestro campo vectorial en el punto *P* sobre los vectores base locales en polares. Es mas, cuando se dice que se está utilizando el sistema de coordenadas polares, esto es lo que se espera; que los vectores asociados a los campos vectoriales se expresen en la base local asociada al sistema de coordenadas utilizado.

Por otro lado, resulta evidente que, si expresamos las componentes de un campo vectorial según vectores base locales, podemos transformar el vector correspondiente entre sistemas de coordenadas mediante una matriz que represente la transformación de coordenadas en un punto dado entre los vectores base locales de los dos sistemas de coordenadas.

Retomemos la expresión de la *transformación local de coordenadas* del gradiente vista en el texto

$$\overline{\nabla}_{xyz} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \end{pmatrix} f \quad (2)$$

donde (dx, dy, dz) son componentes en una base cartesiana ortonormal (i, j, k) y  $(d\alpha, d\beta, d\gamma)$  corresponden a un sistema de coordenadas arbitrario que no tiene por que ser ortogonal en principio. Si consideramos la *transformación local de coordenadas*  $(d\alpha, d\beta, d\gamma) \rightarrow (dx, dy, dz)$  en un punto del espacio  $r_0$  tomando  $\{x(\alpha, \beta, \gamma), y(\alpha, \beta, \gamma), z(\alpha, \beta, \gamma)\}$  y aplicando la regla de la cadena

$$(dx, dy, dz) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\alpha \\ d\beta \\ d\beta \\ d\gamma \end{pmatrix}$$

Podemos plantear también la función f como  $f(x(\alpha,\beta,\gamma), y(\alpha,\beta,\gamma), z(\alpha,\beta,\gamma), t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) f = \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha}}{\frac{\partial x}{\partial \beta}}, \frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \beta}{\partial \beta}}, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial}{\partial \beta}\right) f = \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \beta}}, \frac{\partial z}{\partial \beta}, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{$$

con lo que comparando los resultados anteriores tenemos, siempre que el determinante de la matriz no sea nulo, una relación entre matrices inversas y traspuestas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x}{\partial \gamma} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{pmatrix}^{-1}$$

donde las componentes de cada matriz dependen exclusivamente de la transformación de coordenadas. Note el lector que la forma en que se transforman las derivadas parciales  $(\partial/\partial \alpha, \partial/\partial \beta, \partial/\partial \gamma) \rightarrow (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  es matricialmente la inversa traspuesta de la forma en que se transforman las propias coordenadas  $(d\alpha, d\beta, d\gamma) \rightarrow (dx, dy, dz)$ . Si seguimos lo que se explicó al inicio, la matriz asociada a la transformación  $(d\alpha, d\beta, d\gamma) \rightarrow (dx, dy, dz)$  debería corresponder a la matriz de componentes de la base local  $(b_i)$  en la base (i, j, k)

$$\begin{pmatrix} \overline{b}_1 \bullet \overline{i} & \overline{b}_2 \bullet \overline{i} & \overline{b}_3 \bullet \overline{i} \\ \overline{b}_1 \bullet \overline{j} & \overline{b}_2 \bullet \overline{j} & \overline{b}_3 \bullet \overline{j} \\ \overline{b}_1 \bullet \overline{k} & \overline{b}_2 \bullet \overline{k} & \overline{b}_3 \bullet \overline{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \overline{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \gamma} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \end{cases}$$

entonces, dado que la matriz de la transformación entre derivadas parciales  $(\partial/\partial \alpha, \partial/\partial \beta, \partial/\partial \gamma) \rightarrow (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  es distinta de la anterior, esta matriz relaciona la base (i, j, k)...; con que otra base local?. Si llamamos  $(b^1, b^2, b^3)$  a esta base desconocida, para calcularla podemos partir de la la relación matricial anterior

$$\begin{pmatrix} \overline{b}^{1} \bullet \overline{i} & \overline{b}^{2} \bullet \overline{i} & \overline{b}^{3} \bullet \overline{i} \\ \overline{b}^{1} \bullet \overline{j} & \overline{b}^{2} \bullet \overline{j} & \overline{b}^{3} \bullet \overline{j} \\ \overline{b}^{1} \bullet \overline{k} & \overline{b}^{2} \bullet \overline{k} & \overline{b}^{3} \bullet \overline{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x}{\partial \gamma} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{bmatrix}^{-1} = M^{-1}$$

y calcularemos la inversa de la matriz M teniendo en cuenta que las componentes de las columnas de la primera matriz corresponden al producto escalar de los vectores base desconocidos  $(b^1, b^2, b^3)$  por los vectores base ortogonales (i, j, k). Para la primera columna de la matriz de la izquierda tenemos

 $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \gamma}}{\det(M)}; \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \gamma}}{\det(M)}; \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \gamma}}{\det(M)}$ 

dado que el lado derecho de las igualdades son componentes de los vectores  $(b_1, b_2, b_3)$  en la base (i, j, k) y que el determinante de *M* equivale al producto mixto de los vectores base [1] podemos interpretar el resultado anterior mediante operaciones vectoriales de producto escalar y producto vectorial de esta forma

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \overline{b}^1 \bullet \overline{i} = \frac{\overline{b}_2 \times \overline{b}_3}{\overline{b}_1 \bullet (\overline{b}_2 \times \overline{b}_3)} \bullet \overline{i}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \overline{b}^1 \bullet \overline{j} = \frac{\overline{b}_2 \times \overline{b}_3}{\overline{b}_1 \bullet (\overline{b}_2 \times \overline{b}_3)} \bullet \overline{j}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \overline{b}^1 \bullet \overline{k} = \frac{\overline{b}_2 \times \overline{b}_3}{\overline{b}_1 \bullet (\overline{b}_2 \times \overline{b}_3)} \bullet \overline{k}$$

de modo que podemos determinar todos los vectores (b) así

$$\overline{b}^{1} = \frac{\overline{b}_{2} \times \overline{b}_{3}}{\overline{b}_{1} \bullet (\overline{b}_{2} \times \overline{b}_{3})}; \quad \overline{b}^{2} = \frac{\overline{b}_{1} \times \overline{b}_{3}}{\overline{b}_{1} \bullet (\overline{b}_{2} \times \overline{b}_{3})}; \quad \overline{b}^{3} = \frac{\overline{b}_{1} \times \overline{b}_{2}}{\overline{b}_{1} \bullet (\overline{b}_{2} \times \overline{b}_{3})}$$

la base (b') es una base dual de la base  $(b_i)$ . Usualmente se llama a  $(b_i)$  base covariante y a (b') base contravariante. Los vectores de estas bases verifican la relación

$$\overline{b}^{i} \bullet \overline{b}_{j} = \delta^{i}_{j} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$$

Aunque las bases no son en general ortogonales, si definimos las componentes covariantes y contravariantes de un vector V cualquiera de esta forma

$$V^{i} = \overline{V} \bullet \overline{b}^{i} ; V_{i} = \overline{V} \bullet \overline{b}_{i}$$

entonces la expresión del vector V en las dos bases y la transformación matricial correspondiente será

$$\overline{V} = V^{1}\overline{b}_{1} + V^{2}\overline{b}_{2} + V^{3}\overline{b}_{3} = V_{1}\overline{b}^{1} + V_{2}\overline{b}^{2} + V_{3}\overline{b}^{3} \\ \overline{b}^{i} \bullet \overline{b}_{j} = \delta^{i}_{j}$$
 
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_{1} \\ V_{2} \\ V_{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1} \bullet b_{1} & b_{2} \bullet b_{1} & b_{3} \bullet b_{1} \\ \overline{b}_{1} \bullet \overline{b}_{2} & \overline{b}_{2} \bullet \overline{b}_{2} & \overline{b}_{3} \bullet \overline{b}_{2} \\ \overline{b}_{1} \bullet \overline{b}_{3} & \overline{b}_{2} \bullet \overline{b}_{3} & \overline{b}_{3} \bullet \overline{b}_{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{1} \\ V^{2} \\ V^{3} \end{pmatrix}$$

Si la base local (b<sub>i</sub>) resulta ser ortogonal y está normalizada a vectores unitarios, como el caso de coordenadas esféricas o cilíndricas, entonces la matriz anterior es la identidad y esta base coincide con su base dual (b'), por lo que no hay necesidad de hablar de bases covariantes o contra-variantes. Sin embargo el desarrollo teórico genérico de la geometría diferencial necesita distinguir desde el principio entre las bases locales covariantes y contravariantes. Mientras las coordenadas esféricas o cilíndricas suponen la existencia de un sistema de ejes cartesianos globales de referencia extendido a todo el espacio para la definición de ángulos y radios, y aún el mismo calculo vectorial que estamos desarrollando supone la existencia de una referencia cartesiana local accesible, la geometría diferencial utiliza coordenadas Gaussianas que no dependen de la existencia de una referencia cartesiana global externa. Por otro lado en el espacio de cuatro dimensiones de Minkowski de la relatividad especial, que es una ampliación del espacio físico euclídeo de tres dimensiones, toda base ortonormal siempre tiene asociada una base dual y estas bases son siempre distintas.

## Transformaciones de coordenadas del gradiente la divergencia y rotacional.

Continuando con lo expuesto en el apartado anterior, si la base local es ortogonal entonces no hace falta distinguir entre base covariante y contravariante y basta con normalizar la base covariante a vectores unitarios. De esta forma la transformación local de coordenadas corresponde a un giro local entre bases ortonormales. Como es sabido para las transformaciones de coordenadas correspondientes a giros la inversión de la correspondiente matriz es equivalente a su trasposición, de modo que las coordenadas locales y el gradiente se transforman ahora con la misma matriz. Además las filas de la matriz de la transformación  $(dx, dy, dz) \rightarrow (da, d\beta, d\gamma)$  son iguales, salvo un factor normalización *h*, a los vectores de la base local en el sistema de coordenadas  $(\alpha\beta\gamma)$ ; caracterizados por tener módulo unidad. Pero las componentes de estos vectores base forman la matriz de cambio de base local *GL* 

$$(GL_{ij}) = \begin{pmatrix} h_{\alpha} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha} \\ h_{\beta} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta} \\ h_{\gamma} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{\alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & h_{\alpha} \frac{\partial y}{\partial \alpha} & h_{\alpha} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ h_{\beta} \frac{\partial x}{\partial \beta} & h_{\beta} \frac{\partial y}{\partial \beta} & h_{\beta} \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ h_{\gamma} \frac{\partial x}{\partial \gamma} & h_{\gamma} \frac{\partial y}{\partial \gamma} & h_{\gamma} \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{pmatrix}$$

En el caso de que la base local de ( $\alpha\beta\gamma$ ) sea ortogonal, la matriz del cambio de base corresponde a un *giro* entre la base local cartesiana y la base local del sistema de coordenadas ( $\alpha\beta\gamma$ ) manteniendo el origen local en el punto de derivación  $r_0$ . Prácticamente los casos mas interesantes corresponden a sistemas de coordenadas locales ( $\alpha\beta\gamma$ ) ortogonales, por lo que en lo sucesivo se hablará de giros para las transformaciones de coordenadas locales. La razón de esto es que los operadores diferenciales expresados en sistemas de coordenadas locales ( $\alpha\beta\gamma$ ) ortogonales no incluyen derivadas parciales cruzadas de las coordenadas (por ejemplo  $\partial^2 f/\partial x \partial y$ ), lo que permite el uso de la técnica de separación de variables en la resolución de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

El lector notará que el lado izquierdo de la ecuación (2) es un campo vectorial expresado en el sistema de coordenadas cartesiano. Por tanto para expresar el gradiente en el sistema de coordenadas ( $\alpha\beta\gamma$ ) debemos multiplicar por la matriz de *giro local* correspondiente (*GL<sub>ij</sub>*) que expresa la base local cartesiana en función de la base local en el sistema ( $\alpha\beta\gamma$ ). De modo que el *operador gradiente* en coordenadas ( $\alpha\beta\gamma$ ) es

$$\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} = (GL_{ij})\overline{\nabla}_{xyz} = (GL_{ij}) \left[ \overline{\nabla}_{xyz} = (GL_{ij}) \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial\beta}{\partial x} \frac{\partial\gamma}{\partial x} \right] \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial \gamma} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial \gamma} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial \gamma} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial \gamma} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial \gamma} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial \beta} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial \beta} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\gamma}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial\beta}{\partial \beta} \frac{\partial\beta}{\partial$$

En el caso de la divergencia el cambio de sistema de coordenadas es

$$\overline{\nabla}_{xyz} \bullet \overline{f}_{xyz} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial$$

hemos utilizado la transformación para el gradiente que debe actuar sobre un vector en coordenadas cartesianas; por lo que si expresamos el campo vectorial f en el sistema de coordinas ( $\alpha\beta\gamma$ ) debemos hacer el giro correspondiente a cartesianas. Esta es la tarea de la matriz inversa de la (GLii). Con esto conseguimos expresar el valor de la divergencia, que es un escalar, en el sistema de coordenadas(xyz) en función de medidas procedentes del sistema de coordenadas (αβγ). Esto significa que hemos encontrado la transformación de la divergencia que buscábamos, ya que el lector sabe que el valor de la divergencia de un campo vectorial en un punto es un escalar invariante independiente del sistema de coordenadas utilizado.

Podemos transformar la expresión anterior así

$$\begin{bmatrix} \left(GL_{ij}\right)_{p}^{-1}\left(GL_{ij}\right)_{p} \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} & \frac{\partial\beta}{\partial z} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \left(GL_{ij}\right)_{p}^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{pmatrix} + \left(GL_{ij}\right)^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{pmatrix} \right)_{p} \end{bmatrix}$$

donde hemos introducido la matriz identidad como producto de una matriz numérica de transformación entre bases locales en el punto de derivación (subíndice p) por su inversa. También hemos utilizado la regla de derivación de productos que hemos utilizado ya en la sección sobre Análisis Matemático de Campos. Podemos reconocer también el operador gradiente en coordenadas (αβγ).

$$\left[\left(GL_{ij}\right)_{p}^{-1}\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma}\right]\bullet\left[\left(GL_{ij}\right)_{p}^{-1}\begin{pmatrix}f_{\alpha}\\f_{\beta}\\f_{\gamma}\end{pmatrix}\right]+\left[\left(GL_{ij}\right)_{p}^{-1}\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma}\right]\bullet\left[\left(GL_{ij}\right)^{-1}\begin{pmatrix}f_{\alpha}\\f_{\beta}\\f_{\gamma}\end{pmatrix}_{p}\right]$$

Por otra parte, en el primer sumando tenemos una matriz GL con subíndice p que corresponde al valor numérico en el punto de derivación considerado y por tanto no está afectada por las derivadas del operador gradiente. En este caso podemos utilizar las propiedades de invarianza del producto escalar de vectores (ver apéndice matemático de [1]): Si A, B son dos vectores y A', B' sus correspondientes transformaciones en otro sistema de coordenadas

$$\overline{A} \bullet \overline{B} = \left[ \left( GL_{ij} \right)^{-1} \overline{A} \right] \bullet \left[ \left( GL_{ij} \right)^{-1} \overline{B} \right] = \overline{A}' \bullet \overline{B}'$$

con esto tenemos

$$\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet (f_{\alpha}, f_{\beta}, f_{\gamma}) + \left[ \left( GL_{ij} \right)_{p}^{-1} \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \right] \bullet \left[ \left( GL_{ij} \right)^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{pmatrix}_{p} \right]$$

con lo que la divergencia en coordenadas ( $\alpha\beta\gamma$ ) incluye un término que depende del cambio de dirección en el sistema local de vectores base de  $(\alpha\beta\gamma)$ al cambiar el punto de referencia debido a las operaciones diferenciales.

Podemos simplificar el segundo sumando aplicando la propiedad de invarianza del producto escalar asi

$$\left[ \left( GL_{ij} \right)_{p} \left( GL_{ij} \right)_{p}^{-1} \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \right] \bullet \left[ \left( GL_{ij} \right)_{p} \left( GL_{ij} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{array} \right)_{p} \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[ \left( GL_{ij} \right)_{p} \left( GL_{ij} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{array} \right)_{p} \right]$$

el producto de matrices que precede al gradiente no está afectado por la derivación y por tanto se trata el producto de una matriz por su inversa. Respecto a los términos afectados por la derivación, lo que interesa en realidad es la variación de la matriz  $GL^{-1}$ , expresado por  $\delta GL^{-1}$ , en un pequeño entorno respecto del punto de derivación p

$$\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[ \left( GL_{ij} \right)_p \left[ \left( GL_{ij} \right)_p^{-1} + \delta \left( GL_{ij} \right)^{-1} \right]_p^{-1} \right] = \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[ \left( f_\alpha, f_\beta, f_\gamma \right)_p + \left( GL_{ij} \right)_p \delta \left( GL_{ij} \right)^{-1} \left( f_\beta \\ f_\gamma \\ f_\gamma$$

de modo que la divergencia queda así

$$\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \bullet \left[ \left( f_{\alpha}, f_{\beta}, f_{\gamma} \right) + \left( GL_{ij} \right)_{p} \delta \left( GL_{ij} \right)^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{pmatrix}_{p} \right]$$

donde los términos con subíndice p no deben considerarse variables en el proceso de derivación. Vemos aquí mas claramente la aparición de un término asociado a la variación de dirección de los vectores base locales en  $(\alpha\beta\gamma)$ .

En caso de una transformación  $(x,y,z) \rightarrow (x',y',z')$  entre dos sistemas de coordenadas cartesianos ortogonales fijos, compartiendo origen común pero girados con distinta orientación de sus ejes; entonces la variación local  $\delta GL^{-1}$ es nula y se verifica

$$\overline{\nabla}_{xyz} \bullet \overline{f}(x, y, z) = \overline{\nabla}_{x'y'z'} \bullet \overline{f}(x', y', z'); \ x = x(x', y', z'); \ y = y(x', y', z'); \ z = z(x', y', z');$$

Lo que refleja claramente el carácter *invariante* del operador divergencia. Para la transformación del rotacional tenemos

$$\left(GL_{ij}\right)_{p} \left[\overline{\nabla}_{xyz} \times \overline{f}_{xyz}\right] = \left(GL_{ij}\right)_{p} \left\{ \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} & \frac{\partial \beta}{\partial z} & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{bmatrix} \times \left[ \left(GL_{ij}\right)^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{pmatrix} \right] \right\}$$

introduciendo el operador gradiente como antes tenemos

$$\left(GL_{ij}\right)_{p}\left\{\left[\left(GL_{ij}\right)_{p}^{-1}\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma}\right]\times\left[\left(GL_{ij}\right)_{p}^{-1}\left(\begin{array}{c}f_{\alpha}\\f_{\beta}\\f_{\gamma}\end{array}\right)+\left(GL_{ij}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c}f_{\alpha}\\f_{\beta}\\f_{\gamma}\end{array}\right)\right]\right\}$$

para el producto vectorial tenemos la siguiente propiedad de invariancia (ver apéndice matemático de [1] ):

$$\overline{A} \times \overline{B} = (GL_{ij}) \{ (GL_{ij})^{-1} \overline{A} \} \times [ (GL_{ij})^{-1} \overline{B} ] \}$$

que podemos aplicar al término asociado a la matriz GL-1 tomada como constante resultando ſ F < ٦

$$\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \times (f_{\alpha}, f_{\beta}, f_{\gamma}) + (GL_{ij})_{p} \left\{ \left[ (GL_{ij})_{p}^{-1} \overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \right] \times \left| (GL_{ij})^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{pmatrix}_{p} \right| \right\}$$

donde vemos de nuevo un término asociado al cambio de dirección de los vectores del sistema base local de  $(\alpha\beta\gamma)$ . De forma análoga al caso de la divergencia llegamos al siguiente resultado para el rotacional

$$\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \times \left[ \left( f_{\alpha}, f_{\beta}, f_{\gamma} \right) + \left( GL_{ij} \right)_{p} \delta \left( GL_{ij} \right)^{-1} \begin{pmatrix} f_{\alpha} \\ f_{\beta} \\ f_{\gamma} \end{pmatrix}_{p} \right]$$

Los términos asociados al cambio de dirección de los vectores del sistema base local aparecen también de forma natural en el concepto matemático de derivada covariante.

Aplicación al caso de coordenadas esféricas

 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta) \\ r\cos(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}; \Rightarrow h_r = 1, h_\theta = \frac{1}{r}, h_\phi = \frac{1}{r\sin(\theta)} \Rightarrow \overline{\nabla}_{r\theta\phi} = (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi})$ 

La multiplicación por factores *h* hacen unitarios los vectores fila correspondientes.

$$GL = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}; \quad GL^{-1} = (GL)^{T} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

 $\delta GL^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\theta)\cos(\phi) & 0\\ \cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\theta)\sin(\phi) & 0\\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}_{p} d\theta + \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\phi) & -\cos(\theta)\sin(\phi) & -\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi)\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{p} d\phi$ 

 $GL \partial GL^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\theta + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} d\phi$ 

Para el rotacional en esféricas tenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \times \left[ \left(f_r, f_\theta, f_\phi\right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\phi \end{pmatrix}_p d\theta + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\phi \end{pmatrix}_p d\phi \right] = 0$$

 $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}) \times \left[ \left( f_r, f_\theta, f_\phi \right) + (-f_\theta, f_r, 0)_p d\theta + (-\sin(\theta)f_\phi, -\cos(\theta)f_\phi, \sin(\theta)f_r + \cos(\theta)f_\theta)_p d\phi \right]$ 

$$\begin{array}{l} componente \ r: \frac{1}{r} \frac{\partial f_{\phi}}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \Big( f_{\theta} - \Big( \cos(\theta) f_{\phi} \Big)_{p} d\phi \Big) = \frac{1}{r \sin(\theta)} \Big( \frac{\partial}{\partial \theta} \Big( \sin(\theta) f_{\phi} \Big) - \frac{\partial}{\partial \phi} \Big( f_{\theta} \Big) \Big) \\ componente \ \theta: \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \Big( f_{r} - \Big( \sin(\theta) f_{\phi} \Big)_{p} d\phi \Big) - \frac{\partial f_{\phi}}{\partial r} = \frac{1}{r} \Big( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} (f_{r}) - \frac{\partial}{\partial r} (rf_{\phi}) \Big) \\ componente \ \phi: \frac{\partial f_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Big( f_{r} + (-f_{\theta})_{p} d\theta \Big) = \frac{1}{r} \Big( \frac{\partial}{\partial r} (rf_{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (f_{r}) \Big) \end{array}$$

El operador matricial correspondiente al rotacional en esféricas es

$$\nabla_{r\theta\phi} \times \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial_{\phi}}{r\sin(\theta)} & \frac{\left[\partial_{\theta}\sin(\theta)\right]}{r\sin(\theta)} \\ \frac{\partial_{\phi}}{r\sin(\theta)} & 0 & -\frac{\left[\partial_{r}r\right]}{r} \\ -\frac{\partial_{\theta}}{r} & \frac{\left[\partial_{r}r\right]}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

El corchete significa que su contenido debe ser interpretado como un operador. Vemos que el operador pierde su carácter antisimétrico debido al cambio de dirección de la base local en cada punto en coordenadas esféricas.

La divergencia resulta ser

$$\begin{split} & (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi}) \bullet \left[ \left( f_r, f_\theta, f_\phi \right) + \left( \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right)_p \left( \begin{matrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\phi \end{matrix} \right)_p d\theta + \left( \begin{matrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{matrix} \right)_p \left( \begin{matrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\phi \end{matrix} \right)_p d\phi \right] \\ & (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi}) \bullet \left[ \left( f_r, f_\theta, f_\phi \right) + (-f_\theta, f_r, 0)_p d\theta + (-\sin(\theta) f_\phi, -\cos(\theta) f_\phi, \sin(\theta) f_r + \cos(\theta) f_\theta)_p d\phi \right] \\ & = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{f_r}{r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin(\theta)} (\sin(\theta) f_r + \cos(\theta) f_\theta) \end{split}$$

El operador vectorial correspondiente a la divergencia en esféricas es

$$\nabla_{r\theta\phi} \bullet \equiv \left(\frac{1}{r^2} \left[\partial_r r^2\right], \frac{1}{r\sin(\theta)} \left[\partial_\theta \sin(\theta)\right], \frac{\partial_\phi}{r\sin(\theta)}\right) \bullet$$

El corchete significa que su contenido debe ser interpretado como un operador.

El Laplaciano se obtiene como la divergencia del gradiente

 $\nabla_{r\theta\phi}^{2}f = \nabla_{r\theta\phi} \bullet \left(\nabla_{r\theta\phi}f\right) = \left[\frac{1}{r^{2}}\left[\frac{\partial}{\partial r}r^{2}\right], \frac{1}{r\sin(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\sin(\theta)\right], \frac{1}{r\sin(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial \phi}\right]\right] \bullet \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) f = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin^{2}(\theta)}\left(\frac{\partial^{2}f}{\partial \phi^{2}}\right) = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin^{2}(\theta)}\left(\frac{\partial^{2}f}{\partial \phi^{2}}\right) = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin^{2}(\theta)}\left(\frac{\partial^{2}f}{\partial \phi^{2}}\right) = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin^{2}(\theta)}\left(\frac{\partial^{2}f}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin^{2}(\theta)}\left(\frac{\partial^{2}f}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin^{2}(\theta)}\left(\frac{\partial^{2}f}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{1}{r^{2}\sin^{2}(\theta)}\left(\frac{\partial^{2}f}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) = \frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$ 

el hecho de que sean ortogonales las bases locales del sistema de coordenadas esféricas hace que el *Laplaciano* no tenga términos en derivadas segundas cruzadas de dos coordenadas distintas. Esta simplificación es una razón para la preferir los sistemas de coordenadas con bases locales ortogonales dada la ubicuidad de la ecuación de Laplace en muchos problemas físicos.

Aplicación al caso de coordenadas cilíndricas

 $\bar{r} = (x, y, z) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi), z)$ 

 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -rsen(\phi) & r\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Rightarrow h_r = 1, h_\phi = \frac{1}{r}, h_z = 1 \Rightarrow \overline{\nabla}_{r\theta z} = (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z})$ 

La multiplicación por factores *h* hacen unitarios los vectores fila correspondientes.

$$GL = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -sen(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad GL^{-1} = (GL)^T = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -sen(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\partial GL^{-1} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) & -\cos(\phi) & 0 \\ \cos(\phi) & -sen(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_p d\phi; \quad GL\partial GL^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_p d\phi$$

Para el rotacional en cilíndricas tenemos

$$(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}) \times \left[ \left( f_r, f_{\phi}, f_z \right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} f_r \\ f_{\phi} \\ f_z \end{pmatrix}_p d\phi \right] = (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}, ) \times \left[ \left( f_r, f_{\phi}, f_z \right) + \left( -f_{\phi}, f_r, 0 \right)_p d\phi \right] = \begin{cases} \frac{1}{r}, \frac{\partial f_z}{\partial \phi}, -\frac{\partial f_z}{\partial z} \\ \frac{\partial f_r}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial f_r}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial f_r}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial f_r}{\partial z}, \frac{\partial f_r}{\partial z}, \\ \frac{\partial f_r}{\partial z}, \\ \frac{\partial f_r}{\partial z}, \frac{\partial f_r}{\partial z}, \\ \frac{\partial f_r}{\partial z}, \frac{\partial f_r}{\partial z}, \\ \\ \frac{\partial f_r}{\partial z}, \\ \frac{\partial f_r}{\partial z}, \\ \\ \frac{\partial f_r}{\partial$$

El operador matricial correspondiente al rotacional en cilíndricas es

$$\nabla_{r\phi z} \times \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \frac{\partial_{\phi}}{r} \\ \partial_z & 0 & -\partial_r \\ -\frac{\partial_{\phi}}{r} & \frac{[\partial_r r]}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

El corchete significa que su contenido debe ser interpretado como un operador.

La divergencia es

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}, \right) \bullet \left[ \left(f_r, f_{\phi}, f_z\right) + \left(\begin{array}{c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_p \left(\begin{array}{c} f_r \\ f_{\phi} \\ f_z \end{array}\right)_p d\phi \right] = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left[ \left(f_r, f_{\phi}, f_z\right) + \left(-f_{\phi}, f_r, 0\right)_p d\phi \right] = \frac{1}{r}\frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

El operador vectorial correspondiente a la divergencia en cilíndricas es

$$\nabla_{r\theta z} \bullet \equiv \left(\frac{1}{r} [\partial_r r], \frac{\partial_{\phi}}{r}, \partial_z\right) \bullet$$

El corchete significa que su contenido debe ser interpretado como un operador.

El Laplaciano

$$\nabla_{r\theta z} \bullet \nabla_{r\theta z} f = \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}r\right], \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \phi}\right], \left[\frac{\partial}{\partial z}\right]\right) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

El lector puede comprobar con los resultados obtenidos para los operadores de divergencia y rotacional que en coordenadas esféricas y cilíndricas se verifica

$$\nabla \times \nabla = 0 ; \quad \nabla \bullet \nabla \times = 0$$

Funcion corriente y flujos bidimensionales.

Hemos visto la función potencial  $\varphi$  como generadora del campo de velocidades para el caso de corrientes irrotacionales

$$\bar{u} = \nabla \varphi \Longrightarrow \nabla \times \bar{u} = \nabla \times \nabla \varphi = 0$$

en principio el campo de velocidades derivado de esta manera del potencial puede ser compresible o incompresible. Pero los flujos viscosos no verifican esto, ya que hemos visto que cualquier flujo incompresible viscoso debe ser de tipo rotacional. De este modo no disponemos de una función potencial como la anterior para el campo de velocidades en el caso de fluido viscoso. Sin embargo si el campo de velocidades tiene una simetría bidimensional plana/axial es posible introducir una función potencial distinta por otra vía. Según las compontentes de Helmholtz de cualquier campo vectorial puede existir un potencial vector A del que podemos derivar el campo. En nuestro caso deseamos derivar el campo de velocidades y el formalismo sería

$$\overline{u} = \nabla \times \overline{A} \Longrightarrow \nabla \bullet \overline{u} = \nabla \bullet \left(\nabla \times \overline{A}\right) = 0$$

es decir, el campo de velocidades se genera mediante el rotacional del potencial vector y esto supone necesariamente que el flujo es incompresible, pero no necesariamente irrotacional. Si ahora suponemos que el campo de velocidades tiene un valor permanentemente nulo en una coordenada de nuestro sistema genérico ( $\alpha\beta\gamma$ ), por ejemplo  $u_{\beta}=0$ , resulta que el potencial vector A se puede elegir con  $A_{\alpha}=A_{\nu}=0$ . Tomando la expresión genérica del rotacional y haciendo  $\psi = A_{\beta}$ 

$$\overline{\nabla}_{\alpha\beta\gamma} \times \left[ (0, \psi, 0) + (GL_{ij})_p \delta(GL_{ij})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \end{pmatrix}_p \right] = \overline{u}$$

Donde  $\psi$  es la función corriente. En el caso de coordenadas cartesianas el producto de matrices es nulo y tenemos

$$\overline{\nabla}_{xyz} \times (0, \psi, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (0, \psi, 0) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \Longrightarrow \begin{cases} u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \\ u_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

esta función corriente es válida en el caso del movimiento suave de un cilindro en una corriente, similar al caso de la paradoja de D'Alembert, pero es compatible con la viscosidad de la corriente.

En el caso de coordenadas cilíndricas tenemos

$$\overline{\nabla}_{r\phi z} \times (0, \psi, 0) = (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}, ) \times (-\psi_p d\phi, \psi, 0) \Longrightarrow \begin{cases} u_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \\ u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi)}{\partial r} \end{cases}$$

esta función corriente se puede aplicar al caso del *flujo de Stokes* sobre una pequeña esfera que se mueve suavemente en una corriente viscosa. Si la esfera se mueve a velocidad constante en el eje *z*, vemos que el campo de velocidades no depende de la coordenada angular  $\Phi$  ( $u_{\phi}=0$ ).

En los flujos bidimensionales será también importante conocer la función de Green correspondiente al laplaciano en dos dimensiones; que resulta no ser la misma que para tres dimensiones. En términos físicos intuitivos, la función de Green del laplaciano en tres dimensiones corresponde al potencial de una carga puntual. La función de Green en dos dimensiones corresponde al potencial de una distribución lineal de carga. Si tomamos el caso de una distribución uniforme de carga sobre el eje z, en los textos de física básica se calcula este potencial utilizando el *teorema de Gauss* con la simetría cilíndrica del sistema respecto al eje z y obteniendo para el potencial en coordenadas cilíndricas  $(r, \Phi, z)$  el valor

$$V - V_0 = \lambda \ln \frac{r}{r_0}$$

Tomaremos como función de Green *g* en coordenadas cilíndricas el siguiente valor

$$g = \frac{1}{2\pi} \ln r$$

para  $r \neq 0$  g(r) tiene un valor finito y se verifica la ecuación de Laplace en cilíndricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) = 0$$

si aplicamos ahora el teorema de la divergencia a un elemento de volumen de espesor dz y que incluya la región correspondiente r=0 tenemos

$$\int_{V} \nabla^{2} g \, r dr d\phi dz = dz \int_{V} \nabla^{2} g \, r dr d\phi = \int_{S} \nabla g \bullet d\overline{S} = \int_{S} \frac{r \bullet dS}{2\pi r^{2}}$$

sobre las superficies z=cte los vectores r y dS son perpendiculares y su producto se anula. Sobre la superficie lateral tenemos en coordenadas cilíndricas

$$\overline{r} \bullet d\overline{S} = r(rd\phi dz) \Rightarrow \int_{S} \frac{\overline{r} \bullet d\overline{S}}{2\pi r^2} = dz \int_{S} \frac{r^2 d\phi}{2\pi r^2} = dz$$

de modo que la función *g* es la función de Green del Laplaciano en dos dimensiones al verificar las siguientes relaciones

$$g = \frac{1}{2\pi} \ln r \Longrightarrow \left. \begin{array}{l} \int \nabla^2 g \, dS = 1 \\ r = 0 \in S \\ \nabla^2 g = 0 \ ; \ r \neq 0 \end{array} \right\} \equiv \nabla^2 g = \delta(r)$$

donde *S* es una superficie dentro del flujo bidimensional. En el contexto de las componentes intrínsecas de Helmholtz de un campo vectorial plano, en dos dimensiones en vez de tres, estas componentes deben calcularse a partir de la función de Green *g* del laplaciano en dos dimensiones. Evidentemente el punto singular no tiene por que estar en *r=0* sino en cualquier otro punto *r*' y una generalización inmediata para esto es

$$g = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \vec{r} - \vec{r'} \right| \Longrightarrow \nabla^2 g = \delta(\vec{r} - \vec{r'})$$

donde los vectores *r*,*r*' están en el plano del flujo.

Dado que las funciones de variable compleja f(x+iy) son soluciones de la ecuación de Laplace en dos dimensiones el análisis de variable compleja es también importante en los flujos planos.

En general una resolución analítica del campo en mecánica de fluidos solo es posible si el campo presenta cierta simetría en algún sistema de coordenadas, y es importante en general para el estudiante acostumbrarse a percibir las líneas de campo y su simetría. Si esta simetría no existe se necesitan métodos numéricos para resolver los problemas.

# REFERENCIAS

Introducción a la Mecánica de Fluidos – Julio Gratton. Disponible en Internet.

- [1] Cinemática y Dinámica del Sólido Rígido. Mismo Autror.
- [2] Espacio, tiempo, materia y vacío. Mismo Autror.
- [3] Sobre la ecuación de ondas. Mismo Autor.
- [4] Introducción a la Termodinámica. Mismo Autor.

Tensor de Cauchy http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy\_stress\_tensor#Transformation\_rule\_of\_the\_ stress\_tensor