Título del Trabajo	Cinemática y dinámica del sólido rígido.
Nombre	Enrique Cantera del Río
Filiación	C/Padre Benito Menni-6-2-E 47008 Valladolid (España)
Correo electrónico	benarrob@gmail.com
Resumen	Introdución a la física del sólido rígido para primeros cursos de carreras científico-técnicas.
Version 4ª	Incluye ampliación y revisión de la parte del apéndice dedicada a relatividad especial. También se incluyen apéndices sobre cálculo vectorial en componentes cartesianas.

CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Enrique Cantera del Río

Índice

I-SISTEMAS DE COORDENADAS EN FÍSICA CLÁSICA.

1-Introducción
2-Velocidad instantánea y regla de adición de velocidades.
3-Teorema de Euler y eje instantáneo de rotación.
4-Linealidad de la velocidad angular.
5-Transformaciones cinemáticas generales y forma general de la 2ª Ley de Newton.
6-Visualización y ejemplos.
Desplazamiento entre sistemas de coordenadas.
Aceleración Centrífuga.
Aceleración de Coriolis.
Aceleración de desplazamiento inercial.
7-Cinemática del sólido rígido.
8-Visualización y ejemplos.
Eje instantáneo de rotación.
La cara visible y la cara oculta de la luna.
Movimiento de una pelota en una plataforma que gira.

II-DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO.

1-Introducción.
2-Teoremas básicos sobre el centro de masas.
Fuerzas sobre un sistema de partículas.
Impulso mecánico de un sistema de partículas. Sistema de coordenadas centro de masas.
Energía mecánica de un sistema de partículas.
Momento angular de un sistema de partículas.
Momento de fuerzas en un sistema de partículas.
3-Momento angular de un sólido rígido respecto a su centro de masas.
El centro de masas de un sólido rígido puede considerarse como un punto mas del sólido rígido.
El tensor de inercia.
Ecuaciones de Euler del sólido rígido.
4-Visualización y ejemplos.
Precesión libre del eje instantáneo de rotación.
Oscilador mecánico.
Precesión debida al momento de las fuerzas. La peonza.
El caso de la bailarina.
Equilibrio mecánico en un sólido rígido y principio de los trabajos virtuales.
Rozamiento de Rodadura.
Cilindro lanzado rodando cuesta arriba por un plano inclinado.
Conservación local del momento angular.
El caso de la tierra y la luna. Principio de conservación del momento angular.
Precesión y Nutación en la rotación de la tierra.

Conservación del momento angular, sistema solar y el problema de Venus.
La precesión de Larmor.
Fuerzas internas de acción-reacción.
Energía de rotación y fuerzas externas.
Centro de masas y muelle sin masa.

III-CONSIDERACIONES FINALES.

APÉNDICE MATEMÁTICO

El teorema de la rotación de Euler.
Propiedades invariantes del producto escalar y vectorial.
Vectores superficie, producto mixto y triple producto vectorial.
Ejes principales del tensor de inercia.Diagonalización.
Formas cuadráticas.
El tensor velocidad angular.
Formulación de la cinemática utilizando vectores.
Los ángulos de Euler.
Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.
Traza del tensor de inercia.
Energía mecánica y Lagrangiana de la peonza.
Relatividad Especial : Orígenes de la idea de espacio-tiempo.
Trasformación de Lorentz genérica.
La precesión de Thomas.
Relatividad General : Sistemas de referencia giratorios, efecto Sagnac y GPS.
Curvatura del espacio-tiempo.
Álgebra básica de determinantes.
Calculo vectorial en componentes.
Relación entre los símbolos ε_{ijk} y δ_{ij}.
Bibliografia.

Citas

Las palabras lugar y espacio no significan nada que difiera verdaderamente del cuerpo del que decimos que está en algún lugar, y, nos indican solamente su magnitud, su figura y cómo está situado entre los otros cuerpos. Pues es necesario para determinar esta situación dar constancia de algunos otros que consideramos como inmóviles; pero según cuales sean los que así consideremos, podemos decir que una misma cosa cambia de lugar o que no cambia.
René Descartes - Principios de filosofía

El entendimiento no puede intuir nada y los sentidos no pueden pensar nada. Solo de su unión puede originarse conocimiento.
Emmanuel Kant.

La Geometría es el arte de pensar bien, y dibujar mal.
Anónimo.

I - SISTEMAS DE COORDENADAS EN LA FÍSICA CLÁSICA.

1-Introducción

Nuestra sensación de movimiento depende del funcionamiento de nuestra visión. Esta evolucionó durante millones de años para enfocar un objetivo y seguir su movimiento; una facultad básica para la caza. Nuestra idea de movimiento procede básicamente de la acción muscular asociada al giro de nuestros ojos al permanecer enfocados hacia un objeto que se está moviendo. En una experiencia común como es un viaje en tren o en automóvil *percibimos* a través de las ventanas que los objetos exteriores cercanos se mueven mas rápidamente que los mas alejados. Esta sensación se debe a que los ojos deben girar mas rápido para enfocar los objetos cercanos que los lejanos. Lo mismo es aplicable a otras situaciones. Vamos andando y miramos unas nubes en el cielo. Si las nubes están muy altas y enfocamos un punto de la nube, a medida que andamos nuestros ojos no variarán apreciablemente su ángulo para permanecer enfocados en dicho punto. En este caso tenemos la sensación de que las nubes “nos acompañan” a medida que andamos. Si las nubes son bajas es posible que los ojos si tengan que girar para permanecer enfocados en un punto de la nube, y la sensación anterior no aparece. Para trazar surcos lo mas rectos posibles, un agricultor conduce su arado teniendo como referencia un punto muy alejado, de modo que durante el proceso mantiene sus ojos enfocados y no aprecie movimiento en ellos.

Sin embargo la Física, basada en la medida, utiliza el concepto de sistema de coordenadas para referir la posición de un objeto. De este modo, y contrariamente a nuestra sensación mirando por la ventana del tren, la velocidad de todos los objetos externos al tren y fijos al suelo es la misma. La mecánica clásica requiere una descripción precisa del movimiento. En concreto y dada la importancia central de los sistemas de coordenadas inerciales, es preciso saber reconocer y distinguir las aceleraciones asociadas a observadores que utilizan sistemas de coordenadas no inerciales.

Un sistema de coordenadas se puede ver como un conjunto de puntos que llamaremos *puntos propios*. La forma que utilizaremos para *numerar* estos puntos propios será el sistema de coordenadas Cartesiano tri-rectángulo, de forma que todo punto propio queda distinguido por un conjunto de tres coordenadas reales (x,y,z). Siempre debe existir un punto propio *origen* con coordenadas (0,0,0) y debe poder considerarse también como un *punto físico*. La relación entre los sistemas de coordenadas y el sólido rígido es intrínseca, ya que comparten su propiedad fundamental: los puntos propios de un sistema de coordenadas y los puntos materiales de un sólido rígido mantienen sus distancias relativas constantes independientemente del estado de movimiento. Los sistemas de coordenadas tienen una característica adicional definitoria : los puntos propios de un sistema de coordenadas están en *reposo relativo unos respecto a otros*.

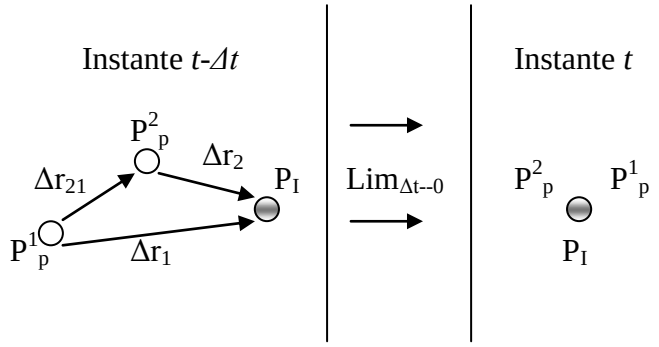
Un principio básico que se utilizará es que para cualquier sólido rígido animado por un movimiento arbitrario, siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas en el cual los puntos del sólido rígido no se mueven relativamente

entre sí; es decir, en dicho sistema las coordenadas de los puntos del sólido no cambian con el tiempo. En este caso el sólido rígido es una materialización física del sistema de coordenadas cartesiano. Llamaremos a este tipo de sistemas de coordenadas *intrínsecos*.

Sin embargo, inicialmente estamos interesados en la descripción del movimiento de *partículas independientes* puntuales, no de sólidos extensos. El movimiento de una partícula independiente en un sistema de coordenadas se describe mediante la asociación entre el tiempo y un punto propio del sistema : *(x(t),y(t),z(t))*. En el *mismo instante t,* en otro sistema de coordenadas distinto, la asociación señalada tendrá un valor diferente *(x'(t),y'(t),z'(t)).* Este hecho establece una asociación entre los *puntos propios* de dos sistemas de coordenadas de forma que debe existir alguna función matemática de la forma *f(x,y,z,t) = (x',y',z',t)*. Note el lector que mediante la variable tiempo podemos relacionar físicamente los puntos propios de dos sistemas, ya que una partícula independiente, en un instante determinado, solo puede estar en un punto propio en cada uno de los dos sistemas de coordenadas. Los dos puntos propios relacionados representan en realidad un único *punto físico*. Si los dos sistemas de coordenadas están en reposo relativo, entonces la función *f()* no dependerá del tiempo, pero si los sistemas se mueven relativamente en general habrá que incluir el tiempo en la función que relaciona los puntos propios de dos sistemas.

2-Velocidad instantánea y regla de adición de velocidades.

La velocidad instantánea de la partícula independiente se define mediante un paso al límite *local* en el punto propio que dicha partícula ocupa en el sistema de coordenadas correspondiente e instante determinado. En el dibujo vemos la situación un instante antes de que el punto propio de cada sistema (P^1_p ,P^2_p)y la partícula independiente (P_I) coincidan



Podemos representar la relación vectorial en el límite así.

$$Lim_{\Delta t-0}\ \frac{\Delta \bar{r}_{21}}{\Delta t} + Lim_{\Delta t-0}\ \frac{\Delta \bar{r}_{2}}{\Delta t} = Lim_{\Delta t-0}\ \frac{\Delta \bar{r}_{1}}{\Delta t}$$

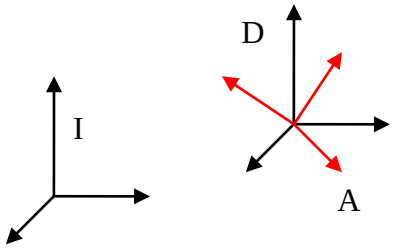
$$\overline{v_{21}} + \bar{v}_2 = \bar{v}_1$$

dado que en el límite coinciden los puntos propios y la partícula independiente, los valores *Δr* son tan pequeños como queramos; lo cual es una condición

necesaria para la existencia de los límites señalados. Note el lector que los vectores utilizados deben estar en un mismo sistema de coordenadas; pero en la *interpretación física clásica* las velocidades con índice *1* y *2 coinciden* con las velocidades de la partícula independiente *medidas* en dos sistemas de coordenadas *diferentes* 1 y 2. La causa de la velocidad con índice *21* es el movimiento relativo entre los sistemas de coordenadas. Esta velocidad dependerá en general del tiempo y el punto propio considerado.

Inicialmente consideramos las relaciones cinemáticas entre un sistema de coordenadas inercial (*I*) y otro no inercial (*A*) en movimiento arbitrario. Podemos descomponer el problema introduciendo un sistema de coordenadas intermedio (*D*) que tenga el mismo origen de coordenadas que el sistema (*A*) y que mantenga sus ejes coordenados cartesianos siempre paralelos a los de (*I*).

Los puntos propios del sistema de coordenadas *D* se desplazan todos con la misma velocidad y aceleración en cada instante respecto a los puntos propios del sistema de coordenadas *I* y la aplicación de la regla de adición de velocidades da el siguiente resultado



$$\bar{v}_I = \bar{v}_D + \bar{v}_{DI} \rightarrow \bar{a}_I = \bar{a}_D + \bar{a}_{DI}$$

donde v_{DI} es la velocidad relativa entre dos puntos propios correspondientes en los sistemas de coordenadas y las otras velocidades son las correspondientes al movimiento de una partícula material independiente observadas desde los dos sistemas de coordenadas *I,D*. Note el lector que v_{DI} no tiene por que ser constante en el tiempo y puede cambiar en módulo y dirección, pero la orientación de los ejes coordenados del sistema *D* se mantienen siempre paralelos a los de I; de lo contrario el desplazamiento relativo de los puntos de *D* no seria el mismo vector para todos ellos en un instante determinado. Por tanto en el caso de *desplazamiento* entre estos sistemas coordenados tenemos v_{DI}(t), pero en el caso general con *desplazamiento* y *giro* relativo será v_{DI}(x,y,z,t).

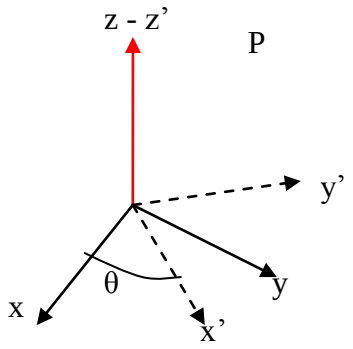
En el dibujo vemos al sistema de coordenadas cartesianas *A* en una posición arbitraria, pero compartiendo un origen común con *D*. Hemos reducido el problema general de encontrar las relaciones cinemáticas al caso de sistemas que comparten un origen común.

3-Teorema de Euler y eje instantáneo de rotación.

Considere el lector una esfera rígida que puede moverse con la única ligadura de mantener su centro fijo respecto al observador. Euler planteó y demostró el siguiente teorema (ver Apéndice Matemático)

Rotando una esfera de forma arbitraria alrededor de su centro inmóvil, siempre es posible encontrar un diámetro E cuya posición tras la rotación es igual que la que tenía antes de la rotación.

En base a esto, considere ahora el lector que el origen del sistema de coordenadas A es el centro de la esfera y los ejes coordenados de *A* están rígidamente unidos al material de la esfera: A es un sistema intrínseco de la esfera. El movimiento arbitrario aludido pasa a ser un movimiento relativo entre el sistema de coordenadas *A* y el *D*. Si consideramos un cambio de posición instantáneo, tan pequeño como se quiera, tenemos que existe en el sistema de coordenadas *A* un conjunto de puntos incluidos en una recta (E) que pasa por su origen que no han experimentado ningún cambio de posición juzgado por un observador en *D*. Los puntos de la esfera, que son los puntos propios del sistema de coordenadas *A*, tienen la propiedad de mantener su distancia relativa durante el movimiento. Por tanto, en el instante *dt* correspondiente el único movimiento posible de la esfera ha sido un giro respecto de un eje de rotación fijo definido por la recta (E). Este es el *eje instantáneo de rotación* y dada la arbitrariedad del movimiento, este eje puede variar de un instante a otro.



El teorema de Euler encamina el problema de encontrar las relaciones cinemáticas entre los sistemas de coordenadas *D* y *A* al estudio del giro de un sistema de coordenadas respecto de un eje instantáneo fijo. Sin pérdida de generalidad podemos imaginar los sistemas de coordenadas *D*(x,y,z) y *A*(x',y',z') con la configuración del dibujo; de modo que comparten un eje z-z' común *que coincide con el eje instantáneo de rotación en un instante dt.* En este contexto el movimiento del sistema de coordenadas *A* corresponde a un giro caracterizado por la modificación del ángulo θ. El problema de encontrar los puntos propios correspondientes entre estos dos sistemas de coordenadas se puede plantear utilizando el método de matrices

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overline{\overline{M}}(\theta)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}; \quad \overline{\overline{M}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Derivando respecto del tiempo, y teniendo en cuenta el álgebra del producto matricial podemos ver que

$$\overline{v_D} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}(\theta)\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}}(\theta)\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix};$$

$$\overline{a_D} = \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{d^2}{dt^2}\overline{\overline{M}}(\theta)\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 2\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}(\theta)\right)\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}}(\theta)\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix};$$

Las derivadas de la matriz son

$$\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}(\theta)=\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix}-sen(\theta) & -\cos(\theta) & 0\\ \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{d\theta}{dt}\overline{\overline{m}}'(\theta)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\overline{\overline{M}}(\theta)=\frac{d^2\theta}{dt^2}\begin{pmatrix}-sen(\theta) & -\cos(\theta) & 0\\ \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\begin{pmatrix}-\cos(\theta) & sen(\theta) & 0\\ -sen(\theta) & -\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{d^2\theta}{dt^2}\overline{\overline{m}}'(\theta)+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\overline{\overline{m}}''(\theta)$$

Sin pérdida de generalidad[1] podemos analizar los términos matriciales en *el instante en que θ = 0 y los dos sistemas de coordenadas coinciden*, obteniendo

$$\overline{\overline{M}}(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ \overline{\overline{m}}'(0)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ \overline{\overline{m}}''(0)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{m}}''(0)=\overline{\overline{m}}'(0)\overline{\overline{m}}'(0)$$

La última expresión indica que la matriz *m''(0)* es igual al producto matricial de *m'(0)* por si misma. Para el instante referido *M(0)* es la matriz identidad y por tanto los ejes coordenados coinciden : *x=x',y=y',z=z'*; de modo que las relaciones cinemáticas se pueden expresar por

$$\overline{v}_D=\left(\frac{d\theta}{dt}\overline{\overline{m}}'(0)\right)\overline{r}+\overline{v}_A$$

$$\overline{a}_D=\frac{d^2\theta}{dt^2}\overline{\overline{m}}'(0)\overline{r}+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\overline{\overline{m}}'(0)\overline{\overline{m}}'(0)\overline{r}+2\left(\frac{d\theta}{dt}\overline{\overline{m}}'(0)\right)\overline{v}_A+\overline{a}_A$$

donde *r* es el vector *(x,y,z)* igual al *(x',y',z')* en el instante considerado. Si introducimos el producto vectorial de los vectores velocidad y aceleración angular de modo que verifiquen

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\overline{\overline{m}}'(0)\right)=\overline{w}\times$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\overline{\overline{m}}'(0)\right)=\overline{\alpha}\times$$

encontramos las expresiones habituales en la bibliografía deducidas mediante el álgebra vectorial, como puede verse en el apéndice

$$\overline{v}_D=\overline{w}\times\overline{r}+\overline{v}_A$$

$$\overline{a}_D=\overline{\alpha}\times\overline{r}+\overline{w}\times\left(\overline{w}\times\overline{r}\right)+2\overline{w}\times\overline{v}_A+\overline{a}_A$$

De las expresiones anteriores podemos eliminar v_A en la aceleración y obtener

[1] En el apéndice matemático se da un planteamiento matemático mas riguroso.

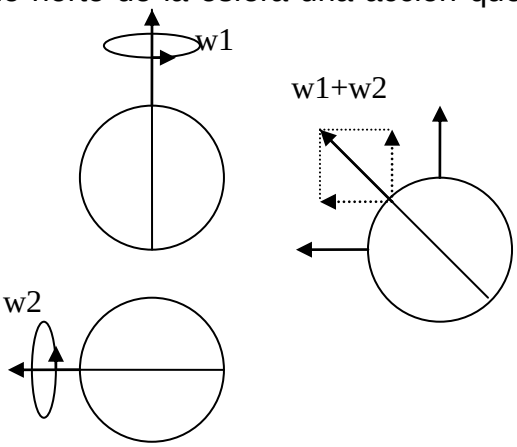
$$\bar{v}_A = (-\bar{w}) \times \bar{r} + \bar{v}_D$$
$$\bar{a}_A = (-\bar{\alpha}) \times \bar{r} + (-\bar{w}) \times \left((-\bar{w}) \times \bar{r}\right) + 2(-\bar{w}) \times \bar{v}_D + \bar{a}_D$$

que formalmente es la misma ley para la velocidad y aceleración sustituyendo los subíndices $_A$ por $_D$, *w* por –*w* y α por - α. Esto quiere decir que, para un observador en el sistema de coordenadas *A*, el sistema de coordenadas *D* está girando relativamente con una velocidad angular –*w* y aceleración angular –*α*. El ejemplo inmediato de esto es la propia tierra. Debido al giro diurno de la tierra vemos al sol y a todo el firmamento girar en dirección este-oeste (-*w*) alrededor de un eje norte-sur, cuando desde el sol (sistema inercial) el giro de la tierra respecto de su propio eje es de oeste a este (*w*).

El análisis hecho supone implícitamente que el eje instantáneo de rotación es fijo, no cambia de orientación. Evidentemente esto no es el caso mas general, pero aún podemos mantener este análisis si suponemos que el sistema de coordenadas *D* y el *A* mantienen un eje Z común en la dirección del eje instantáneo de rotación aunque este cambie. Esto supone que el sistema *D* y el *I* ya no mantienen paralelos sus ejes de coordenadas y las relaciones cinemáticas introducidas al principio ya no serían aplicables. Para eludir esto, podemos mantener *D* e *I* paralelos e introducimos un nuevo sistema de coordenadas intermedio, *G*, que comparte origen de coordenadas con *D* y *A*, y cuyo eje Z coincide siempre con el eje Z de *A* y con el eje instantáneo de rotación . Para los sistemas *G* y *A* serían aplicable el análisis de aceleraciones y velocidades hecho aquí y faltaría un análisis adicional entre los sistemas *G* y *D*. Solo mencionaré que el movimiento relativo entre *G* y *D* se denomina *precesión* y veremos mas adelante ejemplos donde se da este movimiento.

4-Linealidad de la velocidad angular.

Tomemos la esfera del teorema de Euler en reposo. Podemos aplicar sobre el polo norte de la esfera una acción que haga girar la esfera sobre el eje norte-sur con velocidad angular w1. Sobre la misma esfera en reposo también podemos aplicar otra acción en un punto ecuatorial que la haga girar con velocidad angular w2. Si aplicamos simultáneamente estas acciones a la esfera en reposo obtendremos una velocidad angular que será la *suma vectorial* de las velocidades angulares independientes. Además, en nuestro caso el centro de la esfera se mantiene en reposo, por lo que el eje instantáneo de rotación debe pasar por dicho centro. Esto determina totalmente el eje de rotación asociado a la composición de velocidades angulares.



Esta ley de composición permite también la existencia de sistemas de coordenadas (observadores) en los que todas o alguna componente del giro queden anuladas. Imagine el lector dos “observadores satélites” asociados a la

esfera en reposo: uno justo sobre el polo norte y otro justo sobre el ecuador. Serán estos observadores los que apliquen a la esfera las acciones w1 y w2, pero diferimos la aplicación de las acciones anteriores empezando por la acción w1. Además el observador en el ecuador consigue por algún medio seguir el movimiento de giro de la esfera sobre el ecuador, como si fuese un satélite. En este caso, para el observador polar la esfera estaría en giro, pero para el ecuatorial la esfera no estaría girando; estaría en reposo. Posteriormente el observador ecuatorial aplica la acción w2 sobre la esfera, que él percibe en reposo, y automáticamente el observador polar realiza el movimiento correspondiente a w2. Para un observador exterior el movimiento completo será la composición lineal de w1 y w2, pero para los observadores descritos el eje de giro de la esfera se mantiene siempre en el punto mas cercano a la esfera en que aplicaron las acciones. El observador ecuatorial no percibe el giro asociado a w1 y el polar no ve el giro asociado a w2.

En el ejemplo se ha presentado una composición de giros con ejes de rotación que comparten un punto común correspondiente al centro de la esfera, pero la regla de linealidad es general para giros con ejes de rotación que no se crucen, incluso paralelos.

Vemos de esta forma que el eje instantáneo de rotación es relativo al observador y los movimientos circulares pueden compensarse eligiendo adecuadamente el sistema de coordenadas.

5-Transformaciones cinemáticas generales y forma general de la 2ª Ley de Newton.

Incluyendo la velocidad y aceleración de desplazamiento respecto del sistema de coordenadas inercia I tenemos

$$\bar{v}_I = \bar{v}_{DI}(t) + \bar{w} \times \bar{r} + \bar{v}_A$$
$$\bar{a}_I = \bar{a}_{DI}(t) + \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right) + 2\bar{w} \times \bar{v}_A + \bar{a}_A$$

Note el lector que las magnitudes con subíndice *DI* solo dependen del tiempo. Si asignamos a la partícula a la que se refiere la aceleración de la 2ª expresión una masa *m*, multiplicando por la masa tenemos

$$m\bar{a}_I = m\bar{a}_{DI}(t) + m\bar{\alpha} \times \bar{r} + m\bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right) + 2m\bar{w} \times \bar{v}_A + m\bar{a}_A$$

la 2ª Ley de Newton nos dice que el término a la izquierda de la igualdad anterior ,correspondiente a un sistema de coordenadas inercial, equivale a la resultante de todas las fuerzas aplicadas a la partícula (ΣF_i). Por tanto

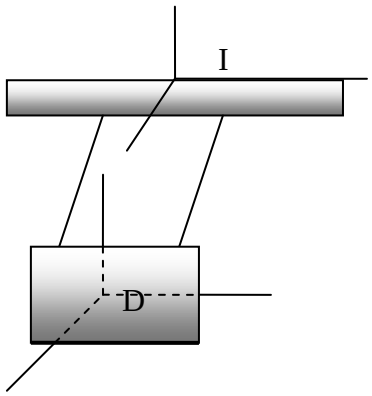
$$m\bar{a}_A = \left(\sum_i \bar{F}_i\right) - m\bar{a}_{DI}(t) - m\bar{\alpha} \times \bar{r} - m\bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right) - 2m\bar{w} \times \bar{v}_A$$

Esta es la 2ª Ley de Newton para un observador en un sistema de referencia arbitrario A. Esta ley no es totalmente general ya que no considera partículas de masa variable (ver el trabajo sobre gravedad de Newton).

6-Visualización y ejemplos.

1-Desplazamiento entre sistemas de coordenadas.

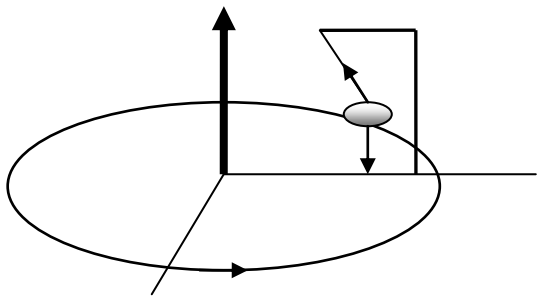
El bloque de la figura está colgado del techo por dos cuerdas de igual longitud de modo que la superficie inferior del bloque (marcada con una línea mas gruesa) se mantiene paralela a si misma en cualquier instante del movimiento. Lo mismo ocurre para las superficies laterales, frontal y posterior. Las líneas coordenadas de un sistema de coordenadas cartesiano (D) *arraigado* en el bloque (*sistema de coordenadas intrínseco del sólido rígido*) serán vistas desplazándose *sin cambiar de dirección* en todo el movimiento respecto a un sistema de coordenadas inercial (I) asociado al techo, por ejemplo. Imaginemos varias partículas materiales independientes referidos con el superíndice *i* .Estas partículas ocuparán en un instante *t* distintos puntos en el sistema de coordenadas D. El efecto del desplazamiento entre sistemas supone que la transformación de velocidades entre dichos sistemas es esta



$$\overline{v_I}(\overline{r_I^i},t)=\overline{v_{DI}}(t)+\overline{v_D}(\overline{r_D^i},t)$$

es decir, que la velocidad v_{DI} no depende de los puntos propios r^i_I , r^i_D concretos en un instante *t* determinado y es la misma para todos ellos en dicho mismo instante.

2-Aceleración Centrífuga.



El dibujo muestra un péndulo que reposa sobre un disco que está girando. La masa del extremo del péndulo está en reposo para un observador que gira con el disco.
En este caso podemos suponer que nuestros sistemas de referencia I,A y D comparten el mismo origen de coordenadas en el centro del disco. Dado que el origen de coordenadas es siempre el mismo para I y D, y sus ejes son paralelos, en realidad I y D representan el mismo sistema de coordenadas en este caso, de modo que en las expresiones correspondientes de velocidad y aceleración podemos hacer D=I. Los ejes X,Y del sistema de coordenadas A giran con el disco y el eje Z, en la vertical, es común a I y a A. En la imagen, los dos sistemas de coordenadas coinciden instantáneamente.

La condición de reposo de la masa del péndulo en el sistema de coordenadas A supone que desde el sistema de coordenadas inercial I=D tenemos

$$\bar{a}_D = \bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right)$$

que corresponde a una aceleración dirigida hacia el centro del disco y que justifica para el observador I el movimiento circular (centrípeto) de dicha masa. Para el observador inercial la 2ª Ley de Newton será

$$\bar{F}_I = m\bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right) = \bar{P} + \bar{T}$$

es decir, la fuerza total debe ser proporcionada por el peso (P) y la tensión de la cuerda (T). Para el observador no inercial que utiliza el sistema de coordenadas A la masa del péndulo no se mueve y una aplicación directa de la 2ª Ley de Newton resultaría en una fuerza nula y por tanto P y T deben sumar 0. Dos consecuencias incompatibles del mismo fenómeno no es lo que se espera de una ley física. Evidentemente la ecuación planteada desde el sistema inercial es la correcta y se puede contrastar experimentalmente la existencia de un ángulo entre *P* y *T*. Este hecho puede ser interpretado por el observador en A como una peculiaridad de su sistema de coordenadas. Todos los objetos que el observador en el sistema de coordenadas A libera tienen tendencia a alejarse del centro del disco (centrífuga) de modo que para mantenerles en reposo se les debe aplicar una fuerza que compense su tendencia centrífuga. Por tanto si la masa del péndulo está en reposo es por que la resultante de las fuerzas P y T compensa la tendencia centrífuga. Por tanto mientras P y T compensen el efecto centrífugo no habrá aceleración para el observador A

$$\bar{F}_A = m\bar{a}_A = \bar{P} + \bar{T} - m\bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right)$$

para el caso en que no hay aceleración la ecuación anterior da el resultado correcto. En caso de que A detecte aceleración, si el péndulo empieza a oscilar por ejemplo, la ecuación será correcta pero incompleta a falta del término de la aceleración de Coriolis:

$$\bar{F}_A = m\bar{a}_A = \bar{P} + \bar{T} - m\bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right) - 2m\bar{w} \times \bar{v}_A$$

En un caso en que las fuerzas reales P y T sumen cero tenemos

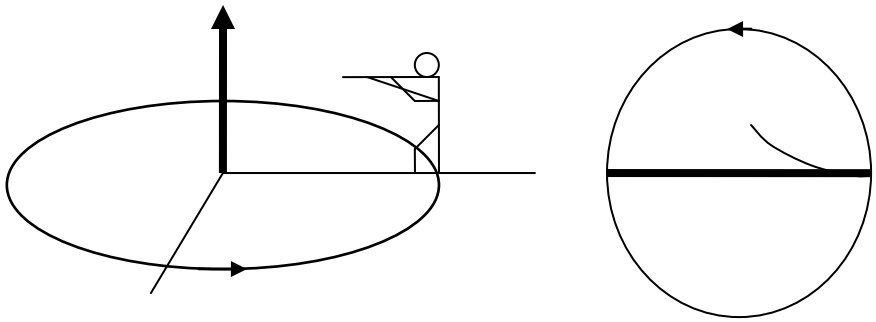
$$\bar{a}_A + \bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right) + 2\bar{w} \times \bar{v}_A = 0 = \bar{a}_I$$

es decir, la aceleración de la masa respecto de un sistema inercial es 0, lo cual se ajusta a la 2ª Ley de Newton con resultante nula de las fuerzas aplicadas. La ecuación anterior es válida por ejemplo para una bolita que se mueva sin rozamiento sobre la plataforma, donde *T* significa ahora la fuerza de contacto *N* entre la plataforma y la bolita. La ecuación diferencial correspondiente es, en sistema de coordenadas *A* y resolviendo el triple producto vectorial

$$\frac{d\bar{v}}{dt} - w^2\bar{r} + 2\bar{w} \times \bar{v} = 0$$

la resolución de esta ecuación permite conocer la trayectoria y dinámica de la bolita en el sistema de coordenadas de la plataforma. Multiplicando la ecuación anterior escalarmente por la velocidad (*v*) y vectorialmente por el radio (*r*) se obtienen fácilmente dos integrales parciales. A partir de aquí el lector puede estudiar la condiciones en que la trayectoria de la bolita es acotada, es decir, tiene un máximo para el cuadrado del radio. También se puede calcular la trayectoria fácilmente a partir de las integrales parciales utilizando coordenadas polares, análogamente al caso de un campo gravitatorio.

3-Aceleración de Coriolis.



Un tirador sobre la periferia de un disco que gira dispara a un blanco en el eje de giro, tal como muestra el dibujo. En este caso podemos suponer que nuestros sistemas de referencia I,A y D comparten el mismo origen de coordenadas en el centro del disco. Dado que el origen de coordenadas es siempre el mismo para I y D, y sus ejes son paralelos, en realidad I y D representan el mismo sistema de coordenadas en este caso, de modo que en las expresiones correspondientes de velocidad y aceleración podemos hacer D=I. Los ejes x,y del sistema de coordenadas A giran con el disco y el eje Z, en la vertical, es común a I y a A. En la imagen, los dos sistemas de coordenadas coinciden instantáneamente. En el instante t=0 la bala sale disparada y el observador inercial medirá una velocidad

$$\bar{v}_I = \bar{w} \times \bar{r}(0) + \bar{v}_A(0)$$

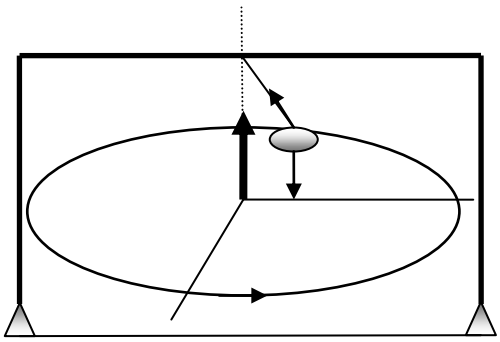
Si suponemos que la bala no está afectada posteriormente por mas fuerzas, entonces la velocidad de la bala debe mantenerse en el sistema de coordenadas inercial I. Por tanto, para el siguiente instante de tiempo *T*, correspondiente al periodo de giro, en que los sistemas de coordenadas *I* y *A* vuelvan a coincidir instantáneamente tenemos

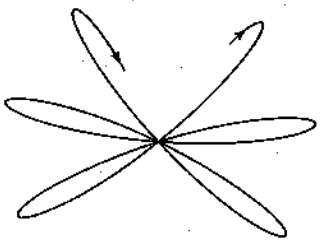
$$\bar{w} \times \bar{r}(0) + \bar{v}_A(0) = \bar{w} \times \bar{r}(T) + \bar{v}_A(T) \rightarrow \bar{v}_A(T) = \bar{v}_A(0) + \bar{w} \times (\bar{r}(0) - \bar{r}(T))$$

por tanto, juzgado por el observador en A (el tirador) aparece una desviación transversal en la velocidad inicial de la bala hacia el blanco. Este incremento de velocidad está provocado por la *aceleración de Coriolis*

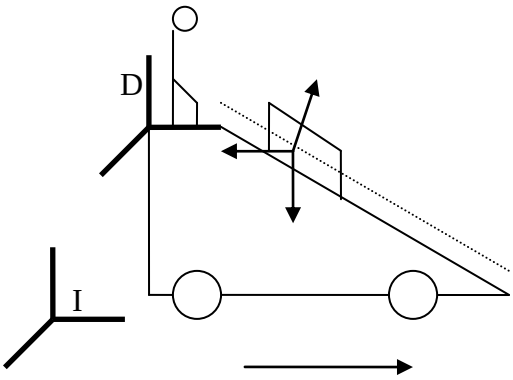
$$-2\bar{w} \times \bar{v}_A$$

y provoca, juzgado por el observador A, una curvatura en la trayectoria de la bala que la aleja del diámetro correspondiente, tal como aparece en la imagen del disco vista desde arriba. La imagen siguiente representa una disposición del similar al *péndulo de Foucault*. Tenemos una plataforma circular girando en contra de las agujas del reloj y un soporte rectangular apoyado en el suelo (sistema I), sin contacto con la plataforma circular. En el punto indicado en el dibujo correspondiente al cruce de la vertical por el centro de la plataforma y el soporte fijamos el extremo de un péndulo. El observador inercial I en el suelo hace oscilar el péndulo de modo que la trayectoria esté en el plano definido por el marco del soporte. Para el observador A en la plataforma este plano definido por el soporte está girando y la aceleración de Coriolis hace que el movimiento del péndulo no se mantenga en un plano fijo de modo que la trayectoria del péndulo sobre la plataforma describe una forma estrellada similar a la imagen adjunta; supuesto que la frecuencia de giro de la plataforma es *apreciablemente menor* que la frecuencia de oscilación del péndulo. Si el soporte está apoyado en la plataforma el movimiento del péndulo será el mismo <u>*siempre que*</u> el punto de enganche del péndulo se diseñe de tal forma que el giro de la plataforma no provoque torsión o retorcimiento en la cuerda del péndulo. Este es el caso del *péndulo de Foucault*, donde el giro corresponde a la rotación propia de la tierra sobre su eje propio Norte-Sur. La aceleración de Coriolis también se manifiesta para un observador terrestre en el péndulo de Foucault. En este caso la plataforma giratoria corresponde al paralelo terrestre en que esté el observador; pero en este caso la forma de la tierra hace que el observador y la gravedad estén inclinado respecto a esta plataforma un ángulo igual a la latitud.





4-Aceleración de desplazamiento inercial (a_{DI})



El aparato del dibujo es un plano inclinado que se mueve con una aceleración constante a_{DI} hacia la derecha respecto de nuestro sistema de coordenadas inercial. Respecto a un observador solidario al plano inclinado que utiliza el sistema de coordenadas *D*, el bloque cae en contacto con dicho plano y por tanto siguiendo una línea recta. En este caso el sistema de coordenadas *A* visto antes coincide con el *D*. Según la expresión general de la 2ª Ley de Newton, el observador *D* puede plantear la siguiente ecuación

$$m\bar{a}_D = \left(\sum_i \overline{F_i}\right) - m\bar{a}_{DI}$$

el lector puede ver la representación de las fuerzas reales que actual sobre el bloque: gravedad y fuerza de contacto normal al plano ; y de la componente inercial asociada a la aceleración del plano inclinado respecto de *I* cambiada de signo. El observador *D* puede continuar el análisis geométrico con este sistema de vectores basándose en la trayectoria y las componentes intrínsecas de la aceleración a_D que el punto centro de masas del bloque sigue en *D*; de modo que a_D está en la dirección paralela a la pendiente del plano (aceleración tangencial) y en la dirección perpendicular (aceleración normal) a_D es nula y por tanto la proyección resultante de la suma de fuerzas debe anularse en la dirección normal.

7-Cinemática del sólido rígido.

En lo anterior hemos relacionado el movimiento relativo de una partícula material en distintos sistemas de referencia. Vamos ahora a considerar un conjunto de partículas materiales con la característica de que para cualquier par de partículas, la distancia relativa entre ellas no se modifica durante el movimiento de dicho conjunto. En estas condiciones buscamos los *campos* de velocidades y aceleraciones asociados al sólido rígido.

Recuperando los sistemas *D* y *A*, suponemos que *A* es un *sistema de coordenadas intrínseco de un sólido rígido*, es decir, los ejes coordenados de *A* están unidos rígidamente a dicho sólido rígido. En esta situación, evidentemente la velocidad y aceleración de los puntos de dicho sólido respecto de *A* es nula ya que las coordenadas de un punto del sólido no varían con el tiempo en el sistema de coordenadas intrínseco al sólido, y por tanto

$$\bar{v}_D = \bar{w} \times \bar{r}$$
$$\bar{a}_D = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{w} \times \left(\bar{w} \times \bar{r}\right)$$

de modo que quedan eliminadas las referencias al sistema de coordenadas intrínseco *A* y tenemos una relación directa entre los puntos del sólido rígido y el sistema de coordenadas *D*. Este sistema *D*, tal como fue introducido, se caracteriza por ser paralelo al sistema de coordenadas *I* y por que su eje Z coincide con el eje de rotación instantáneo del sólido rígido. Seguimos sin considerar el movimiento de precesión y por tanto el eje instantáneo de rotación es una recta que no cambia de dirección con el tiempo.

Primer invariante cinemático del sólido rígido

Si tomamos la expresión de la velocidad para dos puntos distintos (1,2) del sólido rígido y restamos, dada la linealidad del producto vectorial tenemos

$$\boxed{\bar{v}(\bar{r}_1,t) - \bar{v}(\bar{r}_2,t) = \bar{w} \times (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)}$$

Esta expresión es válida para cualquier sólido rígido y en cualquier sistema de coordenadas. Para ver el carácter invariante basta sustituir la expresión de la transformación de velocidades entre sistemas de coordenadas de la sección 3:

$$\bar{v}'(\bar{r}'_1,t)-\bar{v}'(\bar{r}'_2,t)+\bar{w}_0\times(\bar{r}'_1-\bar{r}'_2)=\bar{w}\times(\bar{r}_1-\bar{r}_2)$$

y dado que la diferencia de vectores de posición (*r*) corresponde a un mismo vector con origen la partícula 2 y punta en la partícula 1 tenemos

$$\bar{v}'(\bar{r}'_1,t)-\bar{v}'(\bar{r}'_2,t)=\bar{w}'\times(\bar{r}'_1-\bar{r}'_2)$$
$$\bar{w}'=-\bar{w}_0+\bar{w}$$

que con la composición de velocidades angulares correspondiente, es la misma ley. Si nuestro sistema de coordenadas *I* es inercial y transformamos el invariante a otro sistema inercial *I'*, dado que los sistemas inerciales no giran entre sí será $\omega_0 = 0$ y por tanto $\omega = \omega'$. En otras palabras, la velocidad angular del sólido es invariante entre sistemas de coordenadas inerciales, y en general, entre sistemas de coordenadas que no giren entre si.

Segundo invariante cinemático del sólido rígido

Multiplicando escalarmente por la velocidad angular el primer invariante cinemático tenemos, utilizando las propiedades del producto mixto

$$\boxed{\begin{gathered}\bar{w}\bullet\left(\bar{v}(\bar{r}_1,t)-\bar{v}(\bar{r}_2,t)\right)=\bar{w}\bullet\left(\bar{w}\times(\bar{r}_1-\bar{r}_2)\right)=0\\ \bar{w}\bullet\bar{v}(\bar{r}_1,t)=\bar{w}\bullet\bar{v}(\bar{r}_2,t)=cte(t)\end{gathered}}$$

es decir, el producto escalar de la velocidad angular por la velocidad de una partícula del sólido rígido es, en un instante determinado, igual para todas las partículas del sólido. Evidentemente este resultado también es aplicable en cualquier sistema de coordenadas.

Eje instantáneo de rotación

El segundo invariante cinemático es un producto escalar que se puede expresar como el producto de los módulos de la velocidad angular y la velocidad lineal por el coseno del ángulo que forman estos vectores. Por tanto podemos ver que los puntos del sólido de menor velocidad deben tener una velocidad en la misma dirección que la velocidad angular, esto es, en la misma dirección que el eje instantáneo de rotación. Si r_o y v_o a representan la posición y velocidad de un punto determinado del sólido en un instante *t* tenemos

$$0=\bar{w}\times\bar{v}(\bar{r},t)=\bar{w}\times\bar{v}(\bar{r}_o,t)+\bar{w}\times(\bar{w}\times(\bar{r}-\bar{r}_o))\rightarrow$$
$$\bar{w}\times\bar{v}(\bar{r}_o,t)+\bar{w}(\bar{w}\bullet(\bar{r}-\bar{r}_o))-w^2(\bar{r}-\bar{r}_o)=0\rightarrow$$
$$\bar{r}=\bar{r}_o+\frac{1}{w^2}\bar{w}\times\bar{v}(\bar{r}_o,t)+\lambda\bar{w};\quad \lambda=\frac{\bar{w}\bullet(\bar{r}-\bar{r}_o)}{w^2}$$

obtenemos la ecuación de una recta que representa el eje instantáneo de rotación. Dependiendo del sistema de coordenadas y del movimiento del sólido, es posible que la recta del eje de rotación no pase por ningún punto del sólido;

en todo caso podemos imaginar una extensión del objeto físico rígido y su campo de velocidades a todo el espacio añadiendo puntos ideales de masa nula rígidamente unidos al sólido. La ecuación del eje de rotación es válida en cualquier sistema de coordenadas. En particular, si en un sistema de coordenadas la velocidad del punto de referencia r_o es $v_o = 0$, entonces dicho punto cumple la ecuación del eje instantáneo de rotación; está en el eje instantáneo de rotación. De esta forma vemos que la localización y dirección del eje instantáneo de rotación solo pueden precisarse en el contexto del sistema de coordenadas que utilicemos.

Descomposición canónica del movimiento del sólido rígido

Tenemos un sólido rígido moviéndose en el contexto de un sistema de coordenadas inercial I1. El resultado anterior determina matemáticamente el eje instantáneo de rotación. La velocidad instantánea de los puntos del eje instantáneo de rotación es la misma para todos ellos en módulo y dirección. Por tanto podemos asociar a este eje instantáneo de rotación un sistema de coordenadas inercial I2 de modo que en I2 los puntos del dicho eje estén, instantáneamente, en reposo. Si buscamos la velocidad de un punto determinado del sólido, aplicando la ley de composición de velocidades tenemos

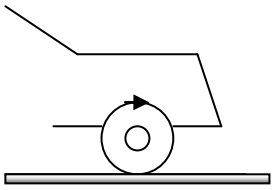
$$\bar{v}_{I1} = \bar{v}_{I1-I2} + \bar{v}_{I2} \equiv \bar{v}_{I1-I2}(t) + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

donde la velocidad v_{I1-I2} corresponde al desplazamiento entre sistemas de coordenadas inerciales y v_{I2} es la velocidad de una partícula que gira instantáneamente respecto a un eje en reposo. Por tanto el movimiento general de un sólido rígido resulta equivalente a una rotación pura alrededor del eje instantáneo de rotación más una traslación.

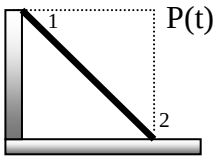
8-Visualización y ejemplos.

Eje instantáneo de rotación.

Un coche se desplaza a velocidad constante sobre el arcén. Percibido por un observador en el arcén el punto de la rueda en contacto instantáneo con el suelo está, instantáneamente, en reposo. Por tanto para dicho observador el eje instantáneo de rotación pasa por el punto de contacto con el suelo y por tanto se desplaza a medida que la rueda avanza. Los sucesivos ejes instantáneos de rotación son paralelos y en la dirección perpendicular al dibujo. Algo parecido pasa cuando andamos: durante el tiempo que la planta del pié está en el suelo la velocidad del pié es nula respecto del suelo y giramos respecto de este punto de apoyo. La articulación del tobillo es la que soporta este giro. Sin embargo para un observador dentro del coche, son los puntos del eje de la rueda los que están en reposo y por tanto el eje instantáneo de rotación es el eje de la rueda. Con este ejemplo vemos que el eje instantáneo de rotación no es un objeto invariante entre sistemas de coordenadas inerciales, aunque la velocidad angular si lo sea.



El dibujo adjunto muestra una barra rígida que cae en el plano del dibujo con sus extremos correspondientes en contacto permanente con el suelo y la pared. El lector puede demostrar que el eje instantáneo de rotación, en el sistema de coordenadas suelo-pared pasa por el punto *P(t)*, tal como se construye en el dibujo en cualquier instante de tiempo. Si ***r*** es un vector con origen *P(t)* el campo de velocidades de la barra es ***v***=***ω***(t)***xr*** y el módulo de ***ω***(t) es la derivada con el tiempo del ángulo que forma la barra con el suelo.El vector ***ω*** es perpendicular al plano y hacia afuera. Si aplicamos el primer invariante cinemático tomando como referencia el punto de contacto 1 tenemos

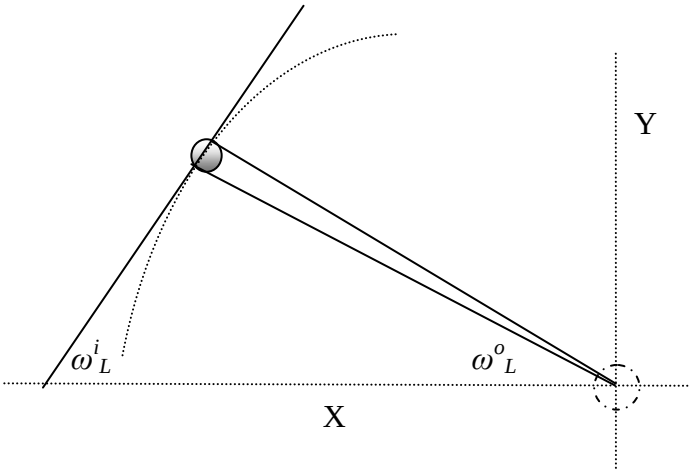


$$\bar{v}(\bar{r},t) = \bar{v}(\bar{r}_1,t) + \bar{w} \times (\bar{r}_1 - \bar{r})$$

Si *r* se mueve sobre la línea 1 hacia *P(t)* vemos que la velocidad *v(r,t)* disminuye hasta anularse en algún punto de dicha línea. Lo mismo sucede aplicando el primer invariante en el punto de contacto 2 : a lo largo de la línea 2 hay un punto que anula su velocidad; y por tanto ese punto queda determinado por la intersección de las dos líneas 1 y 2. Dado que la velocidad de *P(t)* es nula el eje instantáneo de rotación pasa por este punto.

Una forma de visualizar el eje instantáneo de rotación es mediante una rueda, por ejemplo de una bicicleta, forrada en toda su superficie por papel de periódico. Si giramos la rueda manteniendo fijo el eje de giro veremos que las letras impresas del periódico se ven mas claras cerca del eje. Si añadimos ahora un movimiento de *precesión* adicional a la rueda podemos ver que las letras que se ven mas nítidas se alejan del eje de la rueda; pero se mantienen cercanas al eje instantáneo de rotación. Para la experiencia se puede aprovechar el caso del movimiento de precesión de la rueda en la sección 4 de la parte II.

La cara visible y la cara oculta de la luna.



El dibujo adjunto representa un modelo simple del movimiento de la luna alrededor de la tierra. Utilizamos un sistema de coordenadas plano XY asociado al centro de la tierra y que no participa de su giro diurno intrínseco. En primera aproximación podemos suponer que la trayectoria de la luna vista desde la tierra sigue las leyes de Kepler y está incluida permanentemente en este plano del sistema de coordenadas. La recta que atraviesa diametralmente la luna está rígidamente unida a ella y el par de líneas que se cruzan en el origen de coordenadas determinan los extremos visibles de la luna para el observador terrestre en el origen de coordenadas. Para que este observador vea en todo momento la misma cara

de la luna el sistema de líneas marcadas en trazo continuo debe moverse rígidamente. Dado que la suma de ángulos de un triángulo es *180º* y el ángulo entre las líneas continuas se mantiene constante; entonces las variaciones con el tiempo de los ángulos de estas líneas con el eje *X* deben compensarse: $\omega^i_L = -\omega^o_L$ donde el subíndice "*L"* hace referencia a la luna, el superíndice *"i"* hace referencia al giro intrínseco de la luna respecto de su eje propio norte-sur y el superíndice "*o"* hace referencia al desplazamiento orbital de la luna alrededor de la tierra. El signo menos indica que los sentidos de giro intrínseco y orbital son opuestos: si uno es en la dirección de las agujas del reloj el otro es en dirección contraria. Respecto de esta aproximación sencilla hay varias correcciones que explican el fenómeno de la *libración lunar*, es decir, que en realidad se pueda ver para un observador en tierra algo mas que la misma mitad de la superficie lunar:

1-La trayectoria de la luna respecto a la tierra no es exactamente circular sino elíptica. La separación variable entre la luna y la tierra se demuestra por la existencia de distintos tipos de eclipses de sol : Los totales, en los que la luna oculta todo el disco solar (menor separación luna-tierra); y los anulares, en los que la luna no oculta todo el disco solar, dejando visible un anillo concéntrico (mayor separación luna-tierra). Por tanto debemos considerar la velocidad angular correspondiente variable : $\omega^o_L(t)$; mientras que ω^i_L es esencialmente constante por estar asociada al momento angular intrínseco de la luna. Concluimos de esto que es posible ver en la luna zonas en la dirección este-oeste mas allá de los límites del modelo sencillo.

2-Un observador real en tierra se mueve con el giro intrínseco de la tierra ω^i_T y esto hace que pueda percibir, según la hora, algo mas en uno de los extremos visibles este-oeste según el modelo sencillo. El caso es como si las líneas correspondientes del dibujo no se cruzan en el centro de la tierra, sino en la posición del observador en tierra (círculo punteado). El giro diario de la tierra sobre sí misma es 28 veces mas rápido que el giro de desplazamiento orbital de la luna. Además el radio de la tierra es unas 50 veces menor que la distancia tierra-luna. Estas condiciones hacen que el efecto del giro de la tierra sea equivalente a una pérdida de rigidez de las líneas continuas del modelo, de modo que hay una pequeña variación del ángulo entre ellas: $\omega^o_L + \omega^i_L \neq 0$; pero esta pequeña variación se anula en el promedio de un día terrestre.

3-El eje de rotación intrínseco de la luna está inclinado respecto al plano de su órbita alrededor de la tierra. Esto hace que un observador en tierra pueda percibir partes adicionales mas allá de los polos norte y sur de la luna a lo largo del mes lunar; que es el periodo de tiempo de 28 días en que la luna da una vuelta completa a la tierra. En el caso de la pareja sol-tierra la inclinación del eje norte-sur de la tierra respecto del plano de su órbita alrededor del sol provoca el fenómeno correspondiente del sol de media noche alternativo en los polos norte y sur de la tierra[3']; lo que supone que un observador en el sol pueda ver partes mas allá de los polos norte y sur de la tierra.

El efecto de la libración lunar supone que es visible el 59% de la superficie lunar para un observador en tierra. Por otro lado el plano de la órbita de la luna respecto a la tierra forma un ángulo de unos 5º respecto al plano de la eclíptica.

Por tanto los eclipses de sol o de luna solo son posibles cuando la luna ocupa el correspondiente punto de intersección de los dos posibles entre su órbita y el plano de la eclíptica. Sin embargo la órbita de la luna es mas compleja que una elipse debido a la influencia del sol.

Movimiento de una pelota en una plataforma que gira.

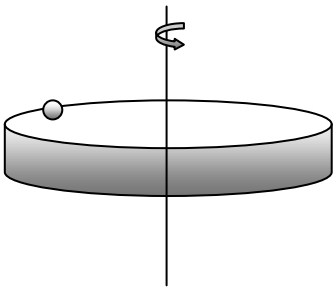
La ecuación de Newton (por unidad de masa) y las integrales de energía y momento angular para el caso de una pelota libre sin fuerzas de rozamiento con la plataforma son:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} - \omega^2\bar{r} + 2\bar{\omega}\times\bar{v} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{r}\times \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\bar{r}\times\bar{v} + \bar{\omega}r^2\right) = 0 \Rightarrow \bar{r}\times\bar{v} + \bar{\omega}r^2 = \bar{L} \\ \bar{v}\bullet \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(v^2 - \omega^2 r^2\right) = 0 \Rightarrow v^2 - \omega^2 r^2 = 2E = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \omega^2 r^2 \end{cases}$$

a partir de estos resultados obtenemos la ecuación diferencial de la trayectoria en coordenadas (r,θ)

$$r^2\frac{d\theta}{dt} + \omega r^2 = L \Rightarrow \frac{1}{dt} = \left(\frac{L}{r^2} - \omega\right)\frac{1}{d\theta} \Rightarrow \left(\frac{L}{r^2} - \omega\right)^2\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] = 2E + \omega^2 r^2 \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \pm\sqrt{\frac{2E + \omega^2 r^2}{\left(L - \omega r^2\right)^2}r^4 - r^2}$$

Considerando el rozamiento, es interesante el caso en que la pelota pueda estar en reposo respecto a la plataforma y en su periferia mientras esta gira. Esto indica que el rozamiento estático es capaz de compensar la fuerza centrífuga de modo que la pelota quede en reposo respecto a la plataforma. Si se aplica un impulso a la pelota (paralelo a la plataforma y hacia su interior) es posible que también el rozamiento dinámico de rodadura (que es menor que en reposo) sea capaz de compensar totalmente la fuerza centrífuga $m\omega^2 r$ y solo parcialmente la fuerza de Coriolis. El observador del disco tiene así una oportunidad para observar, exclusivamente, los efectos de la fuerza de Coriolis; que presentarán la forma de una fuerza perpendicular a la velocidad, muy similar al efecto de un campo magnético constante sobre una carga móvil. En estas condiciones la pelota describirá trayectorias circulares cerradas dentro de la plataforma.



En el caso del péndulo de Foucault tenemos una partícula sin rozamiento y sometida a una fuerza de carácter oscilatorio que produce una aceleración inercial de valor $-\omega^2_0 r$; $\omega^2_0 = g/l$ (g aceleración de la gravedad, l longitud del péndulo) En el caso en que la oscilación del péndulo es mucho mas rápida que el giro de la plataforma : $\omega_0 >> \omega$ y podemos simplificar la ecuación diferencial así

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \omega_0^2\bar{r} + 2\bar{\omega}\times\bar{v} = 0$$

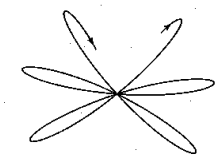
que corresponde a la 2ª ley de Newton, lo cual nos lleva a

$$\left.\begin{array}{l}\bar{r}\times\bar{v}+\bar{\omega}r^2=\bar{L}\\ v^2+\omega_0^2r^2=2E\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{dr}{d\theta}=\pm\sqrt{\frac{2E-\omega_0^2r^2}{\left(L-\omega r^2\right)^2}r^4-r^2}$$

Si el péndulo parte de la posición inicial *r=0* tenemos *L=0* y por tanto

$$\frac{dr}{d\theta}=\pm\sqrt{\frac{2E-\omega_0^2r^2}{\omega^2r^4}r^4-r^2}=\pm\sqrt{\frac{2E-\omega_0^2r^2}{\omega^2}-r^2}\approx\pm\sqrt{2\frac{E}{\omega^2}-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2r^2}\Rightarrow$$

$$\frac{dr}{d\theta}=\pm\frac{\sqrt{2E}}{\omega}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2E}}r\right)^2}$$



la integración de este resultado es

$$\pm\frac{\omega_0}{\omega}\theta=\arcsin\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2E}}r\right)+C\rightarrow(r=0,\ \theta=0\ inicialmente)\rightarrow r=\pm\frac{\sqrt{2E}}{\omega_0}Sen\left(\frac{\omega_0}{\omega}\theta\right)$$

que corresponde a la trayectoria del péndulo de Foucault, donde los radios máximos de la trayectoria corresponden a las direcciones θ_n de modo que

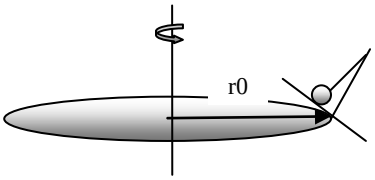
$$\theta_n^{r-\max}=(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0},\ n=0,1,2.....$$

lo que indica que el ángulo entre dos "pétalos" consecutivos de la trayectoria es

$$\Delta\theta=\pi\frac{\omega}{\omega_0}$$

y los radios mínimos (*r=0*)corresponden a las direcciones

$$\theta_n^{r-\min}=n\pi\frac{\omega}{\omega_0},\ n=0,1,2.....$$



Entre dos pasos por el origen consecutivos el tiempo será $T_0/2$, lo que permite calcular fácilmente la velocidad angular de giro del plano del péndulo. En la realidad el péndulo de Foucault en la superficie de la tierra tiene la geometría indicada en el dibujo donde la plataforma corresponde a la propia tierra girando respecto al eje Norte-Sur y el péndulo oscila paralelamente a la superficie tangente a la tierra en el punto considerado. El análisis de este caso se puede hacer fácilmente expresando la 2ª ley de Newton, que debe incluir la fuerza centrífuga por el alto valor de r_0, en el sistema de coordenadas local formado por el plano tangente y su vertical

$$\frac{d\bar{v}}{dt}+\omega_0^2\left(\bar{r}-\bar{r}_0\right)-\omega^2\bar{r}_0+2\bar{\omega}\times\bar{v}=0$$

donde <u>*aproximamos la aceleración inercial por la de un oscilador armónico*</u> en el plano tangente a la superficie de la tierra en el punto r_0. Las posiciones y velocidades de la partícula están aproximadamente en el plano local tangente a la superficie en r_0 ,de modo que tenemos

$$\frac{d\bar{v}_l}{dt}+\omega_0^2\bar{r}_l-\omega^2 r_0\cos(\lambda)\bar{e}_l+2\bar{\omega}_p\times\bar{v}_l=0\ ;\ \bar{\omega}=\bar{\omega}_l+\bar{\omega}_p;\ \omega_l=\omega_p=\omega Sen(\lambda);\ \lambda=latitud$$

donde e_l es un vector unitario constante sobre el plano, ω_p es la componente de la velocidad angular perpendicular al plano local y los subíndices *l* hacen referencia a vectores sobre el plano local. El término centrífugo se puede incluir en el término de oscilación inercial definiendo un vector constante r^l_0 de esta forma

$$\frac{d\bar{v}_l}{dt}+\omega_0^2\left(\bar{r}_l-\bar{r}_l^0\right)+2\bar{\omega}_p\times\bar{v}_l=0\ ;\ \omega_0^2\bar{r}_l^0=\omega^2 r_0\cos(\lambda)\bar{e}_l$$

y finalmente, salvo un desplazamiento de valor r^l_0 la ecuación diferencial es equivalente a

$$\frac{d\bar{v}_l}{dt}+\omega_0^2\bar{r}_l+2\bar{\omega}_p\times\bar{v}_l=0$$

que es la misma ecuación que ya hemos analizado en el caso sencillo, y por tanto la trayectoria del péndulo sobre el plano local es la misma que ya hemos encontrado. Esto nos lleva a un giro del plano del péndulo de velocidad angular Ω

$$\Omega=\frac{\Delta\theta}{T_0/2}=\pi\frac{\omega Sen(\lambda)}{\omega_0\ T_0/2}=\omega Sen(\lambda)$$

y por tanto la velocidad de giro del plano del péndulo está relacionada directamente con el movimiento de rotación terrestre y con la latitud en que oscila el péndulo. La dirección de giro se puede deducir de la relación

$$\bar{r}\times\bar{v}+\bar{\omega}_p r^2=0\Rightarrow\bar{r}\times\bar{v}=-\bar{\omega}_p r^2\Rightarrow r^2\frac{d\theta}{dt}\bar{e}_p=-\omega Sen(\lambda)r^2\bar{e}_p$$

donde e_p es un vector unitario perpendicular al plano local y hacia arriba. De modo que $d\theta/dt$ y λ tienen signos distintos y por tanto el plano del péndulo gira en sentido horario en el hemisferio norte y en sentido anti-horario en el hemisferio sur. En el ecuador $\lambda=0$ y el péndulo de Foucault no gira su plano.

Los péndulos de Foucault suelen disponer de algún tipo de compensación de la amortiguación del movimiento por rozamiento.

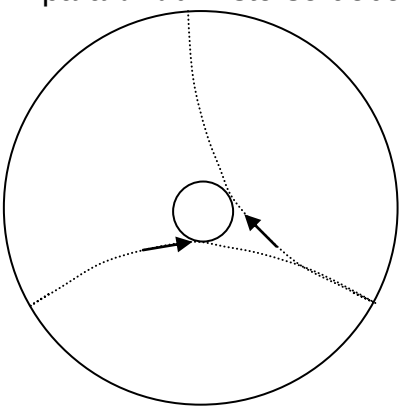
En caso de que el péndulo inicie su movimiento sin velocidad inicial desde una distancia al centro de coordenadas *R* tenemos

$$E=\frac{1}{2}\omega_0^2R^2,\ L=R^2\omega_p$$

En este caso el péndulo no pasa por la posición $r=0$ y existirán unos radios mínimo y máximo de la trayectoria que podemos calcular al anular la derivada $dr/d\theta$

$$\frac{dr}{d\theta}=\pm\sqrt{\frac{2E-\omega_0^2r^2}{\left(L-\omega_p r^2\right)^2}r^4-r^2}=\pm r\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_p^2}\frac{r^2}{R^2-r^2}-1}=0;\ \Rightarrow r^2=\frac{R^2}{1+\frac{\omega_0^2}{\omega_p^2}}\Rightarrow r\approx R\frac{\omega_p}{\omega_0}$$

obtenemos un solo valor que debe corresponder al radio mínimo. El radio máximo es *R*, pero en la expresión anterior este valor produce un valor infinito para $dr/d\theta$. Esto se debe a que en $r=R$ se produce un cambio entre las ramas positiva y negativa de la derivada. El resultado nos lleva a una trayectoria similar a la del dibujo. El péndulo parte en reposo y a medida que gana velocidad la fuerza de Coriolis le va desviando progresivamente del centro hasta pasar por un radio mínimo y llegar a una nueva posición $r=R$ donde recupera el reposo relativo a la plataforma. A partir de aquí el proceso se repite generando la trayectoria del dibujo.



El fenómeno del péndulo de Foucault significa que cualquier sistema de coordenadas puede determinar, mediante medidas internas al sistema, si es un sistema inercial o no lo es. La relatividad general amplía este hecho y establece que todo sistema de coordenadas puede determinar mediante medidas internas si la métrica global aplicable es la quasi-euclídea de Minkowski o no lo es.

II – DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO.

1-Introducción.

Clásicamente sabemos que podemos dividir la materia rompiendo las fuerzas internas que la mantienen unida, como el caso de un martillo que desmenuza una piedra, un hacha que tala un árbol. Como el martillo que desmenuza la piedra nos muestra, podemos llegar a descomponer la piedra hasta granos lo suficientemente pequeños para llamarlos partículas. El lector no debe confundir el concepto clásico de partícula por el de átomo. Una partícula clásica es un objeto lo bastante pequeño como para que cumpla las leyes mecánicas mas elementales: las tres leyes de Newton; pero no tan pequeño como para que se ponga de manifiesto el comportamiento cuántico.

Por tanto, desde el punto de vista clásico sabemos que la materia se comporte de partículas o fragmentos más pequeños. En el caso del sólido rígido debemos suponer también que estas partículas se mantienen unidas por medio de fuerzas internas, de modo que se mantengan las distancias relativas entre ellas independientemente del movimiento del sólido.

El centro de masas de un sistema de partículas es un concepto muy útil en el estudio de la dinámica de un sistema de partículas y en especial, como veremos, para el caso del sólido rígido. El centro de masas de un sistema de partículas se define por la expresión

$$\overline{r_{CM}} = \frac{\sum_i m_i \overline{r_i}}{M}; \; M = \sum_i m_i$$

donde el índice *i* numera cada partícula del sistema, que tiene asociada una masa y una posición determinada. La masa *M* es la masa total del sistema. Podemos suponer que las fuerzas que unen las distintas partículas son de naturaleza *química* y por tanto resulta aplicable la ley de conservación de la masa de *Lavoisier*: “En una reacción química ordinaria la masa permanece constante, es decir, la masa consumida de los reactivos es igual a la masa obtenida de los productos”. Por tanto clásicamente podemos considerar la masa como una magnitud siempre conservada y por tanto la masa total de sistema *M* es igual a la suma de las masas de todas las partículas.

En el desarrollo que viene a continuación se utilizaran las propiedades del producto mixto y el doble producto vectorial (ver apéndice) :

$$para\ cualesquiera\ vectores\ \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$$

$$\overline{A} \bullet \left(\overline{B} \times \overline{C}\right) = \left(\overline{A} \times \overline{B}\right) \bullet \overline{C} = \left(\overline{C} \times \overline{A}\right) \bullet \overline{B} \qquad producto\ \ mixto$$

$$\overline{A} \times \left(\overline{B} \times \overline{C}\right) = (\overline{A} \bullet \overline{C})\overline{B} - (\overline{A} \bullet \overline{B})\overline{C} \qquad doble\ producto\ vectorial$$

2-Teoremas básicos sobre el centro de masas.

Fuerzas sobre un sistema de partículas y centro de masas

Sobre una partícula, numerada por *i*, se aplican las fuerzas externas al sistema y las fuerzas internas causadas por otras partículas del sistema numeradas por *j.* La suma de todas estas fuerzas debe cumplir la 2ª Ley de Newton

$$\overline{F}_i^{Total} = \overline{F}_i^{Externa} + \sum_j \overline{F}_{ij}^{Interna} = m_i \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2}$$

Sumando la expresión anterior en todo el índice *i* tenemos

$$\sum_i \overline{F}_i^{Total} = \sum_i \overline{F}_i^{Externa} + \sum_{ij} \overline{F}_{ij}^{Interna} = \frac{d^2}{dt^2}(\sum_i m_i \overline{r}_i)$$

El índice combinado *ij* es el producto cartesiano del índice *i* por si mismo. Si ordenamos el sumatorio en grupos {ij} de modo que cada grupo se compone de los pares (i,j) y (j,i) , consideramos aplicable la 3ª Ley de Newton F*ij* = - F*ji* y suponemos que la fuerza de una partícula sobre si misma es cero : F*ii* =0; entonces todos los grupos {ij} suman cero y por tanto el sumatorio correspondiente se anula. Aplicando la definición del centro de masas resulta

$$\sum_i \overline{F}_i^{Externa} = M \frac{d^2 \overline{r}_{CM}}{dt^2} = M \overline{a}_{CM}$$

La resultante de las fuerzas externas equivale a la masa del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masas.

Impulso mecánico de un sistema de partículas referido al centro de masas. Sistema de coordenadas centro de masas.

Recuperando el desarrollo sobre la velocidad relativa, podemos asignar como sistema A a un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de masas. Mantenemos el sistema I como inercial y el sistema D en desplazamiento relativo a I y compartiendo origen de coordenadas con el centro de masas de modo que tenemos

$$\overline{v}_I = \overline{v}_{DI}(t) + \overline{w} \times \overline{r} + \overline{v}_{CM}$$

cambiando de notación, utilizando los superíndices para indicar el sistema de coordenadas y los subíndices para identificar una partícula i podemos poner

$$\overline{v}_i^{I} = \overline{v}_{cm}^{I}(t) + \overline{w} \times \overline{r}_i^{DI} + \overline{v}_i^{CM}$$

donde el primer término del segundo miembro corresponde a la velocidad del punto centro de masas. Si multiplicamos la expresión anterior por la masa de la partícula i y dividimos por la masa total tenemos

$$\frac{d\overline{r}_{cm}^{I}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \overline{v}_i^{I}}{M} = \frac{\sum_i m_i}{M}\overline{v}_{cm}^{I}(t) + \overline{w} \times \frac{\sum_i m_i \overline{r}_i^{DI}}{M} + \frac{\sum_i m_i \overline{v}_i^{CM}}{M}$$

dado que la masa total corresponde a la suma de masas de las partículas la velocidad del centro de masas respecto al sistema I cancela a los dos lados de la igualdad. Además el factor de la velocidad angular corresponde a la posición del centro de masas en un sistema de coordenadas DI con origen el centro de masas, por lo que este valor tiene que ser (0,0,0) y el término correspondiente se anula. Como conclusión tenemos

$$\sum_i m_i \overline{v}_i^{CM} = \sum_i \overline{p}_i^{CM} = 0$$

es decir, referido a un sistema de coordenadas cuyo origen es el centro de masas el impulso mecánico neto de un conjunto de partículas es nulo en cualquier instante de tiempo. Este resultado es general y no depende de si los ejes del sistema de coordenadas asociado al punto CM giran o no respecto del sistema de coordenadas inercial de referencia. Mas adelante utilizaremos por conveniencia un sistema de coordenadas con origen en el centro de masas cuyos ejes no giran respecto del sistema de coordenadas inercial de referencia.

Energía mecánica de un sistema de partículas y centro de masas

El trabajo mecánico de un sistema es la transferencia de energía debida al desplazamiento (*dr)* del punto material de aplicación de las fuerzas *(F)* que actúan sobre sus partículas. Matemáticamente

$$W\Big|_A^B = \sum_i \int_A^B \overline{F}_i \bullet d\overline{r}_i$$

donde *i* numera cada partícula del sistema y *A,B* representan estados inicial y final del sistema. El cálculo de esta magnitud en cualquier sistema mecánico es de importancia suma ya que está directamente relacionada con el *principio de conservación de la energía en un sistema aislado; que no interacciona con el exterior*. Dado que por la cinemática sabemos que el desplazamiento y la trayectoria de un punto varía según el sistema de coordenadas que utilicemos, debemos precisar que nos referimos al desplazamiento respecto de un sistema de coordenadas inercial. La energía intercambiada por la partícula i-esima corresponde al trabajo de la fuerza neta que actúa sobre dicha partícula, que a su vez debe ser igual a la variación de energía cinética de dicha partícula según la 2ª Ley de Newton

$$dW_i = \overline{F}_i^{Total} \bullet d\overline{r}_i = \left(\overline{F}_i^{Externa} + \sum_j \overline{F}_{ij}^{Interna} \right) \bullet d\overline{r}_i = m_i \frac{d\overline{v}_i}{dt} \bullet d\overline{r}_i = d\left(\frac{1}{2} m_i \overline{v}_i^2 \right)$$

sumando todas las contribuciones

$$dW^{Total} = \sum_i dW_i = \sum_i \overline{F}_i^{Externa} \bullet d\overline{r}_i + \sum_{ij} \overline{F}_{ij}^{Interna} \bullet d\overline{r}_i = d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \overline{v}_i^2 \right)$$

Nos fijamos en el término del trabajo debido a fuerzas internas, sumando en grupos {ij} y aplicando la 3ª Ley de Newton

$$\sum_{ij} \overline{F}_{ij}^{Interna} \bullet d\overline{r}_i = \sum_{\{ij\}} \overline{F}_{ij}^{Interna} \bullet d\overline{r}_i + \overline{F}_{ji}^{Interna} \bullet d\overline{r}_j = \sum_{\{ij\}} \overline{F}_{ij}^{Interna} \bullet (d\overline{r}_i - d\overline{r}_j) \rightarrow$$

Para el caso del sólido rígido podemos aplicar el invariante cinemático vectorial y continuar la expresión anterior de este modo

$$\rightarrow \sum_{\{ij\}} \overline{F}_{ij}^{Interna} \bullet dt(\overline{v}_i - \overline{v}_j) = \sum_{\{ij\}} \overline{F}_{ij}^{Interna} \bullet dt(\overline{w} \times (\overline{r}_i - \overline{r}_j)) = \overline{w} dt \bullet \left(\sum_{\{ij\}} (\overline{r}_i - \overline{r}_j) \times \overline{F}_{ij}^{Interna} \right)$$

Si consideramos que la fuerza entre las partículas *i,j* es paralela a la línea recta que las une, entonces la expresión anterior asociada al trabajo de las fuerzas internas se anula completamente. Hay que decir que esta hipótesis sobre la dirección de las fuerzas internas no es aplicable en general en caso de *comportamiento elástico* del sistema o si este presenta cierta *viscosidad o rozamiento interno*. En concreto el concepto de *esfuerzo o tensión cortante*, en el contexto de la elasticidad, supone que la fuerza entre elementos de materia no está en la línea que les une. Cuando un sólido elástico es sometido a tensión es posible que acumule cierta cantidad de *energía interna* por esta vía de modo que a mayor tensión las fueras de acción-reacción internas se van separando mas de las líneas que unen dos partículas. El caso del sólido rígido supone este efecto nulo o despreciable, por lo que no contaremos con él. El trabajo sobre el sistema queda así:

$$dW^{Total} = \sum_i \overline{F}_i^{Externa} \bullet d\overline{r}_i = d\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \overline{v}_i^2 \right) \rightarrow \Delta W^{Total} = \sum_i \int \overline{F}_i^{Externa} \bullet d\overline{r}_i = \Delta\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \overline{v}_i^2 \right)$$

donde la segunda expresión es la forma integral de la primera. El término de trabajo asociado a las fuerzas externas incluye, por supuesto, fuerzas conservativas y no conservativas.

Nos fijaremos ahora en el término asociado a la energía cinética en la expresión anterior. Suponemos que nuestro sistema de coordenadas, que llamaremos sistema de coordenadas *Laboratorio,* es inercial. Podemos imaginar otro sistema de coordenadas con origen en el punto centro de masas de modo que este punto esté *siempre* en reposo relativo: lo llamaremos *sistema de coordenadas del centro de masas*. Según el efecto de las fuerzas externas al sistema, el centro de masas se moverá de forma acelerada o sin aceleración, con lo cual el sistema de coordenadas del centro de masas puede ser o no ser inercial. Además *exigimos* que los ejes del sistema de coordenadas del centro de masas se mantienen siempre paralelos a los de nuestro sistema de coordenadas , o mas generalmente no giran relativamente. En estas circunstancias la velocidad de cualquier partícula cumple

$$\bar{v}_i^{LAB} = \bar{v}_{cm}^{LAB}(t) + \bar{v}_i^{CM}$$

donde el superíndice *LAB* indica nuestro sistema de coordenadas, el superíndice *CM* indica el sistema de coordenadas del centro de masas y los subíndices *i* y *cm* indican la partícula, numerada por *i,* y el punto del centro de masas respectivamente. La energía cinética E_{c-i} para la partícula *i* es

$$E_{c-i}^{LAB}(t) = \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_{cm}^{LAB} + \bar{v}_i^{CM})^2$$

Desarrollando el cuadrado y sumando en el índice *i*

$$\sum_i E_{c-i}^{LAB}(t) = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\bar{v}_{cm}^{LAB})^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\bar{v}_i^{CM})^2 + \sum_i m_i (\bar{v}_{cm}^{LAB} \bullet \bar{v}_i^{CM})^2$$

La condición de ejes paralelos entre el sistema LAB y el sistema CM hace que v^{LAB}_{cm} solo dependa del tiempo y no de la coordenada de la partícula, es decir, es v^{LAB}_{cm} es igual para todas las partículas *i* en un instante *t* determinado; lo cual permite hacerlo factor común

$$\sum_i E_{c-i}^{LAB}(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right)(\bar{v}_{cm}^{LAB})^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\bar{v}_i^{CM})^2 + \bar{v}_{cm}^{LAB} \bullet \left(\sum_i m_i \bar{v}_i^{CM}\right)$$

$$E_{c-total}^{LAB}(t) = \frac{1}{2} M (\bar{v}_{cm}^{LAB})^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\bar{v}_i^{CM})^2$$

vemos que el término asociado al impulso mecánico de las partículas respecto del centro de masas es nulo, ya que se puede reducir a la velocidad del punto centro de masas respecto del sistema de coordenadas centro de masas. En resumen, la energía cinética total del sistema de partículas en un instante *t* es la suma de la energía cinética del centro de masas y de la energía cinética del sistema de partículas respecto al sistema de coordenadas del centro de masas.

Por tanto la ecuación completa correspondiente a la conservación de la energía en un sólido rígido es, en términos integrales:

$$\boxed{\sum_i \int \bar{F}_i^{Externa} \bullet d\bar{r}_i = \Delta\left(\frac{1}{2} M (\bar{v}_{cm}^{LAB})^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\bar{v}_i^{CM})^2\right)}$$

es decir, el trabajo de las fuerzas externas medido desde el sistema de coordenadas del laboratorio es igual a la variación de la energía cinética total del sistema.

Momento angular de un sistema de partículas y centro de masas

El momento angular de una partícula del sistema numerada por *i* puede escribirse, utilizando el sistema de coordenadas centro de masa como

$$\overline{L}_i^{LAB} = \overline{r}_i^{LAB} \times m_i \overline{v}_i^{LAB} = m_i(\overline{r}_{cm}^{LAB} + \overline{r}_i^{CM}) \times (m_i \overline{v}_{cm}^{LAB} + m_i \overline{v}_i^{CM})$$

Extendiendo el producto, sumando y factorizando convenientemente, como en el caso de la energía, para todas las partículas tenemos

$$\sum_i \overline{L}_i^{LAB} = (\sum_i m_i)\overline{r}_{cm}^{LAB} \times \overline{v}_{cm}^{LAB} + \overline{r}_{cm}^{LAB} \times (\sum_i m_i \overline{v}_i^{CM}) + (\sum_i m_i \overline{r}_i^{CM}) \times \overline{v}_{cm}^{LAB} + \sum_i \overline{r}_i^{CM} \times m_i \overline{v}_i^{CM}$$

vemos que los dos sumatorios centrales a la derecha de la igualdad pueden reconducirse a la posición y velocidad del centro de masas referidos al propio sistema de coordenadas centro de masa, lo cual anula dichos términos resultando

$$\boxed{\overline{L}_{total}^{LAB}(t) = \overline{r}_{cm}^{LAB} \times M \overline{v}_{cm}^{LAB} + \sum_i \overline{r}_i^{CM} \times m_i \overline{v}_i^{CM}}$$

es decir : el momento angular total del sistema calculado respecto de un punto fijo del laboratorio, se puede descomponer en la suma del momento angular del centro de masas respecto de dicho punto fijo en el laboratorio y el momento angular del sistema de partículas respecto al centro de masas.

Momento de fuerzas en un sistema de partículas y centro de masas

El momento de la fuerza aplicada a una partícula *i* del sistema es

$$\overline{M}_i^{LAB}(t) = \overline{r}_i^{LAB} \times \overline{F}_i^{LAB} = (\overline{r}_{cm}^{LAB} + \overline{r}_i^{CM}) \times (\overline{F}_{i-ext}^{LAB} + \sum_j \overline{F}_{ij}^{LAB})$$

Se ha introducido la posición del centro de masas y la distinción entre fuerzas externas e internas aplicadas a la partícula *i*. Note el lector que r_i se refiere al punto de aplicación de una fuerza, que para el caso de una partícula corresponde con la posición de dicha partícula. Note también que en este caso en realidad solo se utiliza la definición del punto centro de masas, no se utiliza el movimiento relativo entre el sistema de coordenadas centro de masa y el sistema laboratorio; por tanto la notación utilizada r^{CM}_i puede inducir a confusión en este caso ya que antes la hemos utilizado para medidas respecto del sistema centro de masas. Sin embargo la notación quedará justificada posteriormente. Extendiendo el producto y sumando para todas las partículas tenemos

$$\sum_i \overline{M}_i^{LAB}(t) = \overline{r}_{cm}^{LAB} \times (\sum_i \overline{F}_i^{LAB}) + \overline{r}_{cm}^{LAB} \times (\sum_{ij} \overline{F}_{ij}^{LAB}) + (\sum_i \overline{r}_i^{CM} \times \overline{F}_{i-ext}^{LAB}) + (\sum_{ij} \overline{r}_i^{CM} \times \overline{F}_{ij}^{LAB})$$

El segundo sumatorio a la derecha de la igualdad es nulo según la 3ª ley de Newton, ya que los sumandos cancelan simétricamente, por ejemplo F_{12}=-F_{21} ; por tanto el término correspondiente se anula. El último sumatorio a la derecha del signo es una suma sobre el índice compuesto *ij* sobre todos los pares ordenados (i,j). Podemos igualmente hacer la suma sobre grupos de números; así el grupo {1,2} corresponde a los pares (1,2) y (2,1).

$$\sum_{\{ij\}} \bar{r}_i^{CM} \times \bar{F}_{ij}^{LAB} + \bar{r}_j^{CM} \times \bar{F}_{ji}^{LAB} = \sum_{\{ij\}} (\bar{r}_i^{CM} - \bar{r}_j^{CM}) \times \bar{F}_{ij}^{LAB}$$

donde hemos aplicado la 3ª Ley de Newton como se ha presentado antes. Evidentemente el grupo {1,2} es igual que el grupo {2,1} y no debemos sumar dos veces lo mismo.

Si consideramos que la fuerza entre las partículas *i,j* es paralela a la línea recta que las une, entonces la expresión anterior se anula completamente resultando

$$\bar{M}_{total}^{LAB}(t) = \bar{r}_{cm}^{LAB} \times \bar{F}_{ext}^{LAB} + \sum_i \bar{r}_i^{CM} \times \bar{F}_{i-ext}^{LAB}$$

De forma similar al caso de la energía, esta hipótesis sobre la dirección de las fuerzas internas no es aplicable en general, solo para el caso de sólido rígido que no es capaz de acumular energía elástica o de disipar energía por rozamiento interno. Sin embargo note el lector que ahora se trata de momentos de fuerza internos, no de energía. El concepto correspondiente en elasticidad es el de *momento flector*.

El lector puede comprobar rápidamente que, para nuestro caso de sólido rígido, el momento total de fuerzas corresponde a la derivada del momento angular total del sistema y se verifica

$$\bar{M}_{total}^{LAB}(t) = \frac{d}{dt}\bar{L}_{total}^{LAB}(t) = \bar{r}_{cm}^{LAB} \times M\,\bar{a}_{cm}^{LAB} + \frac{d}{dt}\sum_i \bar{r}_i^{CM} \times m_i \bar{v}_i^{CM}$$

y comparando con la expresión anterior tenemos

$$\boxed{\bar{M}_{externo}^{CM}(t) = \frac{d}{dt}\sum_i \bar{r}_i^{CM} \times m_i \bar{v}_i^{CM} = \frac{d}{dt}\bar{L}_{total}^{CM}(t)}$$

En un sólido rígido, la resultante del momento de las fuerzas externas, calculado respecto al punto centro de masa (en el sistema de coordenadas centro de masa), es igual a la derivada en el tiempo del momento angular total del sistema calculado también respecto al centro de masa (en el sistema de coordenadas centro de masa). Note el lector que la coherencia exige evaluar momentos angulares y de fuerza siempre respecto de un mismo punto de referencia en el mismo sistema de coordenadas. En el caso de la última expresión el punto de referencia es el centro de masas.

3-Momento angular de un sólido rígido respecto a su centro de masas.

El centro de masas de un sólido rígido puede considerarse como un punto del sólido rígido.

La propiedad definitoria del sistema de partículas que forman un sólido rígido es que mantienen constates sus distancias relativas independientemente del estado de movimiento del sistema. Podemos ver que el centro de masas de un

sólido rígido cumple esta condición; si numeramos con *k* una partícula arbitraria del sólido rígido tenemos

$$\bar{r}_{CM} - \overline{r_k} = \frac{\sum_i m_i \overline{r_i}}{\sum_i m_i} - \overline{r_k} = \frac{\sum_i m_i (\overline{r_i} - \overline{r_k})}{M} \rightarrow \quad M^2 (\bar{r}_{CM} - \overline{r_k})^2 = \left(\sum_i m_i (\overline{r_i} - \overline{r_k}) \right)^2$$

la última expresión corresponde a la distancia al cuadrado entre una partícula k arbitraria del sólido rígido y su centro de masas multiplicado por el cuadrado de la masa del sólido, que es constante. Si derivamos respecto al tiempo esta expresión

$$M^2 \frac{d}{dt} (\bar{r}_{CM} - \overline{r_k})^2 = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i (\overline{r_i} - \overline{r_k}) \right)^2 = 2 \left(\sum_i m_i (\overline{r_i} - \overline{r_k}) \right) \bullet \left(\sum_i m_i (\overline{v_i} - \overline{v_k}) \right)$$

aplicando el invariante cinemático vectorial podemos continuar la expresión así

$$M^2 \frac{d}{dt} (\bar{r}_{CM} - \overline{r_k})^2 = 2 \left(\sum_i m_i (\overline{r_i} - \overline{r_k}) \right) \bullet \left(\sum_i m_i \overline{\omega} \times (\overline{r_i} - \overline{r_k}) \right) = 2 \sum_{ij} m_i m_j (\overline{r_i} - \overline{r_k}) \bullet (\overline{\omega} \times (\overline{r_j} - \overline{r_k}))$$

Sumando en grupos {*ij*}

$$\sum_{ij} m_i m_j (\overline{r_i} - \overline{r_k}) \bullet (\overline{\omega} \times (\overline{r_j} - \overline{r_k})) = \sum_{\{ij\}} m_i m_j (\overline{r_i} - \overline{r_k}) \bullet (\overline{\omega} \times (\overline{r_j} - \overline{r_k})) + m_j m_i (\overline{r_j} - \overline{r_k}) \bullet (\overline{\omega} \times (\overline{r_i} - \overline{r_k}))$$

aplicando las propiedades del producto mixto de vectores tenemos

$$\sum_{\{ij\}} m_i m_j (\overline{r_i} - \overline{r_k}) \bullet \left[\overline{\omega} \times (\overline{r_j} - \overline{r_k}) + (\overline{r_j} - \overline{r_k}) \times \overline{\omega} \right] = 0$$

expresión que se anula debido a las propiedades del producto vectorial.

En conclusión la distancia entre el centro de masa de un sólido rígido y cualquiera de las partículas de dicho sólido se mantiene constante. Dependiendo de la distribución de materia en el sólido rígido el centro de masas puede coincidir con una partícula del sólido o puede que no, sin embargo el centro de masas siempre estará localizado, respecto de un sistema de coordenadas intrínseco del sólido, en las mismas coordenadas. Por tanto el punto centro de masas de un sólido rígido puede considerarse cinemáticamente como un punto más del sólido rígido y evidentemente es un punto fijo, con velocidad nula, en el sistema de coordenadas del centro de masas. Por tanto respecto del sistema de coordenadas centro de masas el movimiento de un sólido rígido equivale a un giro respecto de un eje instantáneo de rotación que pasa siempre por el punto centro de masas. El movimiento total del sólido se puede describir como la composición de un desplazamiento del sistema de coordenadas centro de masas y un giro respecto del sistema de coordenadas centro de masas.

Dado que el centro de masa se puede considerar siempre un punto del sólido rígido, su trayectoria en general será una línea suave de modo que podemos integrar la 2ª Ley de Newton de esta forma

$$\int_A^B \left(\sum_i \overline{F}_i^{Externa} \right) \bullet d\overline{r}_{cm} = M \int_A^B \frac{d^2 \overline{r}_{cm}}{dt^2} \bullet d\overline{r}_{cm} = \frac{1}{2} M \overline{v}_{cm}^2 \Big|_A^B = \Delta \left(\frac{1}{2} M \overline{v}_{cm}^2 \Big| \right)$$

Si entre las fuerzas externas figura la gravedad al nivel de la superficie terrestre (*Mg*) tenemos

$$\int_A^B \left(\sum_{i \neq gravedad} \overline{F}_i^{Externa} \right) \bullet d\overline{r}_{cm} = -\int_A^B M\overline{g} \bullet d\overline{r}_{cm} + M \int_A^B \frac{d^2 \overline{r}_{cm}}{dt^2} \bullet d\overline{r}_{cm} = Mgh_{cm} + \frac{1}{2} M \overline{v}_{cm}^2 \Big|_A^B = \Delta \left(Mgh_{cm} + \frac{1}{2} M \overline{v}_{cm}^2 \right)$$

Note el lector que una interpretación *directa* en términos de *trabajo físico* del resultado anterior no es posible ya que el desplazamiento de las fuerzas externas no tiene por que coincidir con el desplazamiento dr_{cm} del centro de masas; aunque si es posible una interpretación energética. Una aplicación de este resultado se verá en el análisis del movimiento de la peonza.

El tensor de inercia.

Dado que el centro de masas se puede considerar como un punto del sólido rígido se le puede aplicar la cinemática correspondiente. En particular, dado que el centro de masas está en reposo para un observador desde el sistema de coordenadas centro de masas, entonces para dicho observador el eje instantáneo de rotación del sólido siempre pasa por el punto centro de masas. Por tanto podemos expresar el momento angular respecto del sistema centro de masas así

$$\overline{L}_{total}^{CM} = \sum_i \overline{L}_i^{CM} = \sum_i \overline{r}_i^{CM} \times m_i (\overline{w} \times \overline{r}_i^{CM}) = \sum_i m_i (\overline{w} (\overline{r}_i^{CM})^2 - \overline{r}_i^{CM} (\overline{w} \bullet \overline{r}_i^{CM}))$$

dado que la velocidad de cada partícula es un giro puro respecto al eje de rotación instantáneo en reposo. Se han aplicado también las propiedades del doble producto vectorial.

En este punto estamos en la misma situación en que, históricamente, se empezó a concebir el concepto matemático de *tensor*. Tomando un sumando del sumatorio anterior, y expresando los vectores por sus componentes cartesianas tenemos

$$L_i^\alpha = m_i \left[w^\alpha r_i^2 - x_i^\alpha \sum_\beta w^\beta x_i^\beta \right] = m_i \left[\sum_\beta (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_i^\alpha x_i^\beta) w_\beta \right]$$

donde los super-índices α,β hacen referencias a las componentes cartesianas de la posición de la partícula numerada con "i" (con el significado $x_i=x_i^1, y_i=x_i^2, z_i=x_i^3$) en el sistema *CM* y la expresión $\delta_{\alpha\beta}$ o *delta de Kronecker* tiene el valor 1 si $\alpha=\beta$ y 0 si $\alpha\neq\beta$. ¿Qué hay de nuevo en esto? La novedad es

que el valor de las componentes L_i^{α} se ha expresado en la misma <u>*forma matemática* en que una matriz actúa sobre un vector</u>, tal como vimos en la parte cinemática. Si denominamos *I* a esta "matriz" 3x3 tenemos

$$\overline{L}_i = \overline{\overline{I}}_i \overline{w} \; ; \; I_i^{\alpha\beta} = m_i\left(\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_i^{\alpha} x_i^{\beta}\right)$$

Sin embargo *I* tiene un *significado físico muy distinto* al de las matrices que se han venido utilizando ya que no representa una transformación entre dos sistemas de coordenadas. Los vectores relacionados por *I*: *L* y *w,* son físicamente diferentes, se miden con distintas unidades, y los dos están definidos en el mismo sistema de coordenadas. Históricamente se denominó a este tipo de magnitudes *tensores* por que esta estructura matemática también aparece en el análisis de tensiones internas en sólidos elásticos. La teoría matemática actual concibe las matrices, vectores y escalares como tipos especiales de tensores.

Dado que se pueden aplicar las propiedades lineales de las matrices, aplicando la propiedad distributiva y en notación vectorial

$$\overline{L}_{total}^{CM} = \sum_i \overline{\overline{I}}_i^{CM} \overline{w} = \left(\sum_i \overline{\overline{I}}_i^{CM}\right)\overline{w} = \overline{\overline{I}}_{total}^{CM} \overline{w}$$

$$I_{total}^{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_i^{\alpha} x_i^{\beta})$$

Vemos claramente que los componentes del tensor de inercia *I* dependen exclusivamente de la distribución geométrica de la masa tal como se percibe desde el sistema de coordenadas centro de masa. Dado que el sólido rígido gira respecto del centro de masas, esta distribución en general varía con el tiempo, con lo que debemos considerar que el tensor de inercia varía con el tiempo

$$\boxed{\overline{L}_{total}^{CM}(t) = \overline{\overline{I}}_{total}^{CM}(t)\,\overline{w}(t)}$$

El tensor de inercia también aparece en la energía cinética del sólido rígido respecto de su centro de masas. Para la i-ésima partícula la energía respecto del centro de masas será, utilizando las propiedades del producto mixto:

$$E_i^{CM} = \frac{1}{2} m_i (\overline{v}_i^{CM})^2 = \frac{1}{2} m_i (\overline{w} \times \overline{r}_i) \bullet (\overline{w} \times \overline{r}_i) = \frac{1}{2} m_i \overline{w} \bullet \left[\overline{r}_i \times (\overline{w} \times \overline{r}_i)\right] \rightarrow$$

$$E_i^{CM} = \frac{1}{2} \overline{w} \bullet \left(\overline{\overline{I}}_i^{CM} \overline{w}\right)$$

y aplicando las propiedades asociativas del producto escalar y de las matrices

$$E_{total}^{CM} = \sum_i E_i^{CM} = \sum_i \frac{1}{2} \overline{w} \bullet \left(\overline{\overline{I}}_i^{CM} \overline{w}\right) = \frac{1}{2} \overline{w} \bullet \left(\sum_i \overline{\overline{I}}_i^{CM} \overline{w}\right) = \frac{1}{2} \overline{w} \bullet \left[\left(\sum_i \overline{\overline{I}}_i^{CM}\right)\overline{w}\right] \rightarrow$$

$$E_{total}^{CM} = \frac{1}{2} \overline{w} \bullet \left[\overline{\overline{I}}_{total}^{CM} \overline{w}\right] \Rightarrow E_{total}^{CM}(t) = \frac{1}{2} \overline{w}(t) \bullet \overline{L}_{total}^{CM}(t)$$

La relación tensorial entre *L* y *w* supone que las direcciones de estos vectores no serán en general paralelas. De la definición del tensor de inercia vemos que es simétrico respecto de los índices *α,β:* $I^{\alpha\beta}=I^{\beta\alpha}$ *en cualquier sistema de coordenadas, y en particular, en cualquier sistema de coordenadas con origen en el centro de masas*. Esta simetría asegura la posibilidad de *diagonalización* del tensor de inercia (ver apéndice matemático: diagonalización y formas cuadráticas). Esto significa que se puede encontrar un *sistema de coordenadas cartesiano principal con origen en el centro de masas* en el que las componentes $I^{\alpha\beta}$ con $\alpha\neq\beta$ son nulas, de forma que en dicho sistema la relación tensorial es

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I^{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{xx} w_x \\ I^{yy} w_y \\ I^{zz} w_z \end{pmatrix}$$

En general los ejes de este sistema de coordenadas principal son solidarios al sólido rígido, es decir, se trata de un sistema de coordenadas intrínseco del sólido. Evidentemente en un sistema de coordenadas intrínseco el sólido no gira, pero note el lector que las componentes del tensor de inercia son completamente *independientes* del giro del sólido rígido y solo dependen de la distribución espacial de materia en el sistema de coordenadas considerado. Aunque dependiendo de la simetría del sólido puede haber degeneración en los ejes. Hay casos en que podemos elegir dos ejes que no giren con el sólido y que unido al eje que si lo hace formen un sistema de coordenadas en el que *I* se mantenga en forma diagonal. El caso mas extremo de degeneración es una esfera homogénea, en la que cualquier sistema de tres ejes perpendiculares entre sí con origen en el centro de la esfera es un sistema de coordenadas principal.

Ecuaciones de Euler del sólido rígido

Combinando resultados anteriores tenemos

$$\boxed{\overline{M}^{CM}_{externo}(t) = \frac{d}{dt}\overline{L}^{CM}_{total}(t) = \frac{d}{dt}\overline{\overline{I}}^{CM}_{total}(t)\,\overline{w}(t)}$$

Veremos que la dependencia con el tiempo de esta ecuación puede simplificarse. La ecuación anterior es válida respecto del sistema de coordenadas centro de masa, sistema que por definición no gira respecto del sistema de coordenadas inercial de referencia. Sin embargo, podemos referir la ecuación anterior a un sistema de coordenadas intrínseco del sólido con origen en el centro de masa considerando el valor del vector *L* en este sistema intrínseco. Siempre podemos imaginar un instante t_0 en que los ejes del sistema intrínseco coinciden hasta la identidad con los ejes de nuestro sistema centro de masas. En este instante t_0 vamos a obtener que el valor del vector *L* en el sistema de coordenadas del centro de masas corresponde a la expresión

$$\overline{L}^{CM}_{total}(t_0) = \overline{\overline{I}}^{Intrins}_{total}\,\overline{w}^{CM}(t_0)$$

Donde hemos subrayado la velocidad angular como vector medido respecto al centro de masas. Esto es cierto no solo para una coincidencia respecto al sistema centro de masas, sino para coincidencias respecto al grupo formado por todos los sistemas de coordenadas con origen el centro de masas, orientados arbitrariamente y en reposo relativo permanente respecto al centro de masas. El vector velocidad angular *w* va a ser el mismo en todos los sistemas de coordenadas incluidos en este grupo, ya que se trata de sistemas que no giran relativamente entre si. Por tanto, para este grupo de sistemas de coordenadas se verifica la siguiente ecuación en cualquier instante

$$\overline{L}^{G}_{total}(t) = \overset{=Intrins}{I}_{total}\,\overline{w}^{G}(t)$$

donde el indice *G* hace referencia al sistema de coordenadas del grupo que, en el instante arbitrario *t* coincide con el sistema intrínseco. Esto significa que las componentes de *L* y *w* en la expresión anterior son las proyecciones vistas desde *G* de dichos vectores sobre los ejes del sistema intrínseco. El lector no debe confundir estas proyecciones con el valor de *L* y *w* respecto del sistema de coordenadas intrínseco, ya que estos valores serían nulos pues en dicho sistema el sólido permanece en reposo permanentemente.

Podemos expresar este resultado respecto al sistema de coordenadas centro de masa aplicando la matriz de transformación *T* correspondiente

$$\overline{L}^{CM}_{total}(t) = T(t)\overline{L}^{G}_{total}(t) = T(t)\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\,\overline{w}^{G}(t)\right]$$

con lo que podemos derivar respecto del tiempo y obtener, aplicando resultados del apéndice matemático(tensor velocidad angular) y resultados anteriores

$$\overline{M}^{CM}_{externo}(t) = \frac{d}{dt}\overline{L}^{CM}_{total}(t) = \frac{d}{dt}\left[T(t)\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\,\overline{w}^{G}(t)\right]\right] = \left[\left[\frac{d}{dt}T(t)\right]T^{-1}(t)\right]T(t)\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\,\overline{w}^{G}(t)\right] + T(t)\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\frac{d}{dt}\overline{w}^{G}(t)\right] \Rightarrow$$

$$\overline{M}^{CM}_{externo}(t) = \overline{w}^{CM}(t)\times T(t)\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\,\overline{w}^{G}(t)\right] + T(t)\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\frac{d}{dt}\overline{w}^{G}(t)\right]$$

Si aplicamos a la expresión anterior la transformación inversa T^{-1}(t) y utilizando las propiedades del producto vectorial tenemos

$$T^{-1}(t)\overline{M}^{CM}_{externo}(t) = T^{-1}(t)\left[\overline{w}^{CM}(t)\times T(t)\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\,\overline{w}^{G}(t)\right]\right] + T^{-1}(t)T(t)\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\frac{d}{dt}\overline{w}^{G}(t)\right] =$$

$$T^{-1}(t)\overline{w}^{CM}(t)\times T^{-1}(t)T(t)\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\,\overline{w}^{G}(t)\right] + T^{-1}(t)T(t)\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\frac{d}{dt}\overline{w}^{G}(t)\right]$$

resultando $$\overline{M}^{G}_{externo}(t) = \overline{w}^{G}(t)\times\left[\overset{=Intri}{I}_{total}\,\overline{w}^{G}(t)\right] + \left[\overset{=Intri}{I}_{total}\frac{d}{dt}\overline{w}^{G}(t)\right]$$

donde las componentes de todos los vectores: $M_{externo}$, *w* ; se evalúan proyectando estos vectores, que percibimos desde el sistema de coordenadas

centro de masas, sobre el sistema intrínseco en cada instante de tiempo. Note el lector que ahora el tensor de inercia *I* ya no depende del tiempo, sino que se evalúa una vez en el sistema intrínseco elegido. Evidentemente resulta ventajoso utilizar como sistema intrínseco uno en que el tensor de inercia *I* sea diagonal. En este las componentes forman el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\overset{=Intri}{I}_{total} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$M_x(t) = w_y(t)w_z(t)\left(I_{zz} - I_{yy}\right) + I_{xx}\frac{dw_x(t)}{dt}$$

$$M_y(t) = w_z(t)w_x(t)\left(I_{xx} - I_{zz}\right) + I_{yy}\frac{dw_y(t)}{dt}$$

$$M_z(t) = w_x(t)w_y(t)\left(I_{yy} - I_{xx}\right) + I_{zz}\frac{dw_z(t)}{dt}$$

En el caso de ser $M_{externo} = 0$ las ecuaciones representan el movimiento libre de un sólido rígido. Aunque las componentes vectoriales de las ecuaciones de Euler son, en rigor, proyecciones en el sistema intrínseco de medidas vectoriales en el sistema centro de masa, el caso del movimiento rígido de la tierra es un caso especial. Desde un sistema de coordenadas intrínseco ligado a la tierra se puede medir indirectamente la velocidad angular de las ecuaciones de Euler por medio del giro nocturno aparente del firmamento, es decir, mediante medidas astronómicas. Generalizando, la velocidad angular desde el sistema intrínseco se puede medir indirectamente por el giro relativo del sistema de coordenadas centro de masas y el momento de las fuerzas externas referido al punto centro de masas puede ser medido directamente en el sistema intrínseco.

4-Visualización y ejemplos.

Precesión libre del eje instantáneo de rotación.

En el caso en que no existan fuerzas externas aplicadas al sólido rígido, se sigue que el centro de masas se mueve a velocidad constante o está en reposo respecto de nuestro sistema de coordenadas inercial Laboratorio. Por economizar en imaginación elegimos este último caso, de esta forma podemos considerar que el sistema de coordenadas Laboratorio equivale al sistema de coordenadas centro de masa.

Debido a la ausencia de momentos de fuerzas, el momento angular del sólido debe permanecer constante, ya que se verifica

$$\overline{M}^{LAB}_{total}(t) = \frac{d}{dt}\overline{L}^{LAB}_{total}(t) = 0 \Rightarrow \overline{L}^{LAB}_{total} = cte$$

Por otro lado no existe transferencia de energía con el exterior y por tanto la energía cinética de rotación debe ser constante

$$E^{LAB}_{total} = \frac{1}{2}\overline{w}(t) \bullet \overline{L}^{LAB}_{total} = cte$$

de esta expresión no deducimos que *w* sea constante, sino que dado que *E y L* son constantes, lo que se mantiene constante es la componente de la velocidad angular proyectada sobre la dirección, constante, del momento angular *L.* Ahora debemos hacer dos distinciones:

1-El sólido gira respecto de uno de los ejes principales:

Si tomamos en las ecuaciones de Euler para un instante *t* con $M(t)_{externo}=0$, $\omega_y(t)=0$, $\omega_z(t)=0$ y $\omega_x(t)$ no nulo ; se predice que $d\omega_y/dt = d\omega_z/dt = 0$. Por tanto ω_y y ω_z seguirán siendo nulos en el instante *t+dt* y así sucesivamente. Pero hay que considerar que estos resultados de la ecuación de Euler son componentes proyectadas al sistema de coordenadas intrínseco del sólido centrado en el centro de masas y orientado de modo que el tensor de inercia sea diagonal. En este sistema de coordenadas los valores proyectados de *L* y ω solamente tienen componente <*x*>, en cualquier momento. Visto desde el sistema de coordenadas centro de masas, *L* debe permanecer constante, lo que exige que el eje <*x*> del sistema de coordenadas intrínseco no cambie de dirección para un observador en el sistema de coordenadas centro de masas; y por tanto en este caso no hay precesión del eje instantáneo de rotación siendo ω constante.

2-El sólido gira respecto de un eje que no es principal:

En este caso podemos elegir el sistema de coordenadas centro de masa de forma que coincida en un instante *t* arbitrario con el sistema de coordenadas propio del sólido rígido. En este instante *t* el tensor de inercia *I* se hace diagonal. En caso de no haber fuerzas externas el vector *L* será constante y la energía cinética de rotación *E* también constante. Por tanto podemos escribir lo siguiente para este instante

$$L^2 = \left(I^{xx}w_x\right)^2 + \left(I^{yy}w_y\right)^2 + \left(I^{zz}w_z\right)^2 \quad ; \quad E = \frac{1}{2}\left(I^{xx}w^2{}_x + I^{yy}w^2{}_y + I^{zz}w^2{}_z\right)$$

estas relaciones no determinan unívocamente las componentes de la velocidad angular. Además, un instante después de *t*, el tensor de inercia tomará otra forma no diagonal y para mantener constantes *L* y *E* en todos los casos posibles debemos aceptar la posibilidad de que la velocidad angular *w* cambie con el tiempo.

En resumen, tenemos que en ausencia de fuerzas externas un sólido que gira respecto de de un eje no principal sufre una deriva o precesión en su velocidad angular y eje instantáneo de rotación de modo que se puedan mantener constantes la energía y el momento angular. Este movimiento de precesión se puede apreciar en el lanzamiento de balones en el rugby. Debido a su forma alargada, giran en general respecto de algún eje que no es el de simetría, lo que se percibe en el movimiento de la punta del balón. Durante el vuelo del balón, el valor constante de la gravedad hace que el momento de fuerzas respecto del centro de masas del balón sea nulo. Este movimiento de precesión también se da en el caso del giro de la tierra [2], pero no se trata del movimiento conocido como precesión de los equinoccios, cuyo origen está asociado a momentos de fuerza externos del sol y la luna. Si consideramos la

tierra aproximadamente como un elipsoide de revolución con achatamiento en los polos[3'], entonces el sistema de coordenadas intrínseco formado por el plano ecuatorial y el eje norte-sur forman un sistema de coordenadas que diagonaliza el tensor de inercia. Si el eje norte-sur es el <*z*>, tenemos $I_{xx}=I_{yy}$. De las ecuaciones de Euler tenemos que w_z es constante y w_x ,w_y deben satisfacer lo siguiente (*i* es la unidad compleja):

$$\left.\begin{array}{l} 0 = w_y\Omega_E + \dfrac{dw_x}{dt};\ \ 0 = -w_x\Omega_E + \dfrac{dw_y}{dt};\ \ w_z = cte; \\ \Omega_E = \left(1 - \dfrac{I_{zz}}{I_{xx}}\right) w_z\ \ ; I_{xx} = I_{yy} \end{array}\right\} \rightarrow \overline{w} = (w_x, w_y, w_z);\ \ \overline{\Omega} = (0,0,\Omega_E) \Rightarrow \frac{d\overline{w}}{dt} = \overline{\Omega} \times \overline{w}$$

$$w = w_x + iw_y \Rightarrow \frac{dw}{dt} = i\Omega_E w \Rightarrow w = A\exp(i\Omega_E t) \Rightarrow \begin{cases} w_x = A\cos(\Omega_E t) \\ w_y = Asen(\Omega_E t) \end{cases}$$

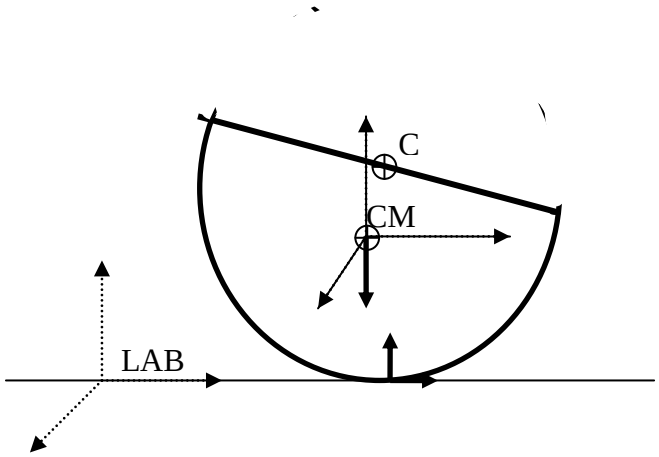
que conducen a una frecuencia de oscilación armónica Ω_E para las componentes w_x ,w_y de la velocidad angular proyectadas sobre el sistema de coordenadas intrínseco; el valor *A* está relacionado con la energía cinética de rotación *E*. La velocidad w_z corresponde aproximadamente a la rotación diurna de 24 horas. Para obtener la ley correspondiente respecto al centro de masas podemos aplicar el resultado de la sección sobre el tensor velocidad angular del apéndice matemático tomando como vector *C* la velocidad angular *w* de modo que tenemos

$$\left.\frac{d\overline{w}}{dt}\right|_{CM} = \overline{w} \times \overline{w} + \overline{\Omega} \times \overline{w} = \overline{\Omega} \times \overline{w}$$

y por tanto respecto del CM obtenemos la misma ley para la velocidad angular. El movimiento obtenido representa ahora una *precesión*[2] del vector velocidad angular *w* (no de *L*) de frecuencia angular Ω_E. Este movimiento de la tierra se denomina *bamboleo de Chandler* y queda reflejado en el firmamento por una ligera variación con el tiempo de las coordenadas a las que apunta un telescopio terrestre para ver cualquier estrella, por ejemplo la polar que está en la dirección del eje instantáneo de rotación de la tierra. Estas modificaciones son periódicas cada 433 días aproximadamente. Note el lector que hemos considerado una *primera aproximación* en la que no existen momentos de fuerza externos sobre la tierra. Aunque el movimiento de la tierra como un sólido rígido parece ser la razón principal del bamboleo de Chadler, esto no explica completamente los datos experimentales. Se investiga sobre posibles modificaciones del tensor de inercia debido a las partes fluidas de la tierra : aumento del nivel del mar y cambios locales de la presión del fondo marino, corrientes oceánicas y atmosféricas, terremotos y capas internas de la tierra.

[2] ver el caso de la precesión de la peonza mas adelante.

Oscilador mecánico



La figura representa un semi-cilindro que se balancea en contacto con el suelo afectado por la gravedad. Vemos representados los sistemas de coordenadas del laboratorio y del centro de masa, siempre con ejes paralelos. Con flechas mas gruesas se representan la fuerza de contacto con el suelo, con una componente de rozamiento y la fuerza de gravedad actuando sobre el centro de masas. Si suponemos que no hay deslizamiento en el punto de contacto del sólido con el suelo, entonces la velocidad del punto correspondiente del sólido en contacto con tierra es cero. Por tanto el eje instantáneo de rotación, juzgado desde el sistema de coordenadas del laboratorio pasa por dicho punto de contacto y por tanto el eje instantáneo de rotación se mueve con el tiempo para el observador laboratorio. Desde el sistema de coordenadas centro de masa el eje instantáneo pasa por el punto centro de masas y resulta evidente que la dirección del eje es en la perpendicular al papel. Dado que no hay giro entre LAB y CM la dirección del eje instantáneo de rotación en LAB será la misma: en la perpendicular al papel. De la definición de momento angular, el lector puede comprobar que el momento angular medido respecto al origen de CM es un vector también perpendicular al papel. Por tanto el sistema está girando alrededor de un eje principal en el sistema CM y por tanto se verifica la relación escalar

$$L_z = I^{zz} w_z$$

donde el eje z es el perpendicular al papel asociado al sistema de coordenadas CM. El movimiento de oscilación es tal que la inclinación del sólido alcanzara un máximo y después invierte su movimiento. Esto supone que la velocidad angular cambia en signo y en valor absoluto y por tanto por continuidad existe un instante en que la velocidad angular se anula; correspondiendo con la máxima inclinación. Dado que la componente del momento de inercia se mantiene constante al girar respecto de un eje principal, entonces el momento angular debe modificarse. Esto supone que el sistema debe estar sometido a un momento de fuerza neto no nulo y se verifica

$$\overline{M}^{CM}_{externo}(t) = \frac{d}{dt}\overline{L}^{CM}_{total}(t)$$

donde el momento externo hay que calcularlo respecto del centro de masas. El lector puede partir de la definición de momento de fuerzas y concluir que, en este caso y dado que la fuerza de gravedad es igual para todos los elementos de masa, entonces el momento de fuerzas de la gravedad respecto al centro de masa es nulo. Por tanto solamente queda el momento de fuerzas respecto del

centro de masa que genera la fuerza de contacto con tierra. Es evidente que la velocidad angular tendrá un valor máximo en cada ciclo de oscilación y en este máximo será

$$M_{externo}^{CM}(t) = I^{zz}\frac{d}{dt}w(t) = 0$$

lo que supone que, respecto al centro de masas el momento de fuerzas debe anularse en el instante de máximo. Dado que la fuerza de contacto no se anula en general, esto solo es posible si el radio vector desde el punto centro de masas y la fuerza de contacto son paralelos en el instante de máximo.

La energía mecánica se conservará, ya que la gravedad es una fuerza conservativa y la fuerza de contacto no consume energía mecánica, bien sea por conversión a otras formas de energía potencial o disipación en forma de calor o modificación de energía cinética del planeta tierra. Por tanto en nuestro caso la cantidad (h_{cm} es la altura del centro de masas)

$$E = Mgh_{cm} + \frac{1}{2}M\bar{v}_{cm}^{2} + \frac{1}{2}I^{zz}w^{2}$$

se conserva a lo largo del tiempo. Respecto del sistema LAB la velocidad del centro de masas será, en módulo

$$v_{cm}(t) = w(t)R(t)$$

siendo *R(t)* la distancia del centro de masas al eje instantáneo de rotación, es decir, el punto de contacto con el suelo del semicilindro. Por tanto cuando la velocidad angular se anule toda la energía será potencial gravitatoria. Por otro lado es evidente en la expresión de la energía que en el instante de mínimo en la altura del centro de masas (h_{cm}) se da un máximo en la velocidad angular y por tanto la anulación del momento de fuerzas respecto al centro de masas, como se ha dicho antes.

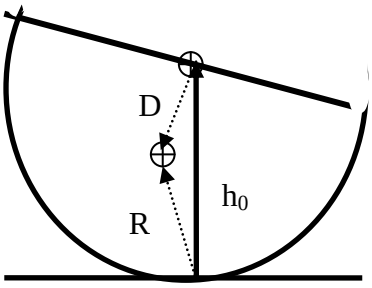
El cálculo de I^{zz} corresponde a la expresión ($x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$)

$$I_{total}^{zz} = \sum_i m_i(\delta_{33}r_i^{\,2} - x_i^{\,3}x_i^{\,3}) \equiv \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

o en términos integrales

$$I_{total}^{zz} = \int dm(x^2 + y^2)$$

que aplicado a un eje que pase por el centro de masas puede resultar en un cálculo pesado. Aplicando el *teorema de Steiner*, que el lector puede consultar en el apéndice matemático, es posible reconducir el cálculo a un caso más sencillo. Este teorema relaciona los momentos de inercia de un sólido respecto de dos ejes paralelos, uno de ellos pasando por el centro de masas. En este caso el cálculo se simplifica para un eje de rotación paralelo que pase por el centro del tramo recto, según el dibujo, del semicilindro. Para una referencia sobre el cálculo de momentos de inercia el lector puede consultar [2].



Es evidente que la altura h_0 del punto *C* se mantiene constante en cualquier instante y que el módulo de D también se mantiene constante pues se corresponde con la distancia entre dos puntos del sólido rígido. Si tomamos esta altura como origen podemos determinar la altura del centro de masas en cualquier instante como $h = -D*\cos(\theta)$, donde θ es el ángulo, entre *D* y h_0 , que ha girado el semicilindro y *D* es la distancia entre los puntos *C* y *CM*. De este modo podemos plantear la conservación de la energía mecánica así

$$E = -Mg\,\mathrm{D}\cos(\theta) + \frac{1}{2}MR^2 w^2 + \frac{1}{2}I^{zz}w^2 = Mg\,\mathrm{D}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\left(MR^2 + I^{zz}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

donde hemos utilizado también el resultado previo sobre la velocidad del centro de masas y la definición de velocidad angular.

El lector puede analizar el triángulo vectorial $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{h_0}+\boldsymbol{D}$. Elevando al cuadrado tenemos $R^2=h_0^2 + D^2-2\,Dh_0\cos(\theta)$, sustituyendo este resultado y derivando en el tiempo la ecuación anterior obtenemos

$$0 = MDg\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt} + MDh_0\sin(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3 + \left(MR^2 + I^{zz}\right)\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt}\left[\left(g + h_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)MD\sin(\theta) + \left(MR^2 + I^{zz}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

en un caso análogo a la *ecuación de Binet* [3] la factorización de la ecuación diferencial nos lleva a dos soluciones : $d\theta/dt=0$ que representa un estado en reposo y

$$\left.\begin{array}{l} M\left(g + h_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\mathrm{D}\,\sin(\theta) + \left[M\left(h_0 - D\right)^2 + I^{zz}\right]\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \\ g >> h_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;\ \ \sin(\theta) \approx \theta \end{array}\right\} \Rightarrow Mg\mathrm{D}\,\theta + \left[M\left(h_0 - D\right)^2 + I^{zz}\right]\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

La ecuación diferencial obtenida[3] para pequeñas oscilaciones corresponde al caso de un oscilador armónico de frecuencia ω

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \sqrt{\frac{Mg\,\mathrm{D}}{M\left(h_0 - D\right)^2 + I^{zz}}}$$

con este resultado podemos comprobar las condiciones de la aproximación $g>>h_0(d\theta/dt)^2$, que resulta en un valor de h_0 suficientemente alto. Debido al *rozamiento de rodadura* las oscilaciones irán disminuyendo hasta que el semicilindro acabe en reposo. Sin embargo los osciladores mecánicos de este tipo (péndulos) tienen la propiedad del *isocronismo*, es decir, aunque la amplitud de oscilación disminuya por el rozamiento la frecuencia de oscilación se mantiene en el tiempo. Este descubrimiento se acredita a Galileo al observar la oscilación de un candelabro en una catedral midiendo el tiempo con el pulso

[3] Recordando la ecuación $M_{cm}(t)=dL_{cm}/dt$ podemos reconocer $dL_{cm}/dt=I^{zz}d^2\theta/dt^2$, de modo que será $M_{cm}(t)=-MgD\theta-M(h_0-D)^2\ d^2\theta/dt^2$

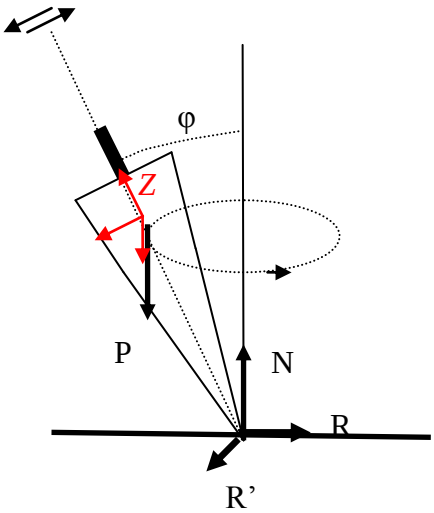
de los latidos de su propio corazón. Este hecho es la base del funcionamiento de los relojes de péndulo. El rozamiento tiene un efecto acelerativo y por tanto debe ser incluido como una fuerza adicional en la 2ª ley de Newton. Modelando el *rozamiento de rodadura* como un término adicional *ηdθ/dt* en la ecuación diferencial anterior, que corresponde con la 2ª ley de Newton, la solución que se obtiene es una oscilación amortiguada de amplitud decreciente, pero manteniendo una frecuencia determinada[4]; lo que corresponde con la característica experimental del isocronismo[5]:

$$Mg\,\mathrm{D}\,\theta + \eta\frac{d\theta}{dt} + \left(M\left(h_0 - D\right)^2 + I^{zz}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

Se puede seguir el mismo método utilizado aquí para encontrar la ecuación del oscilador de un péndulo matemático, es decir, un punto de masa *m* que oscila colgado de una cuerda sin masa: se parte de la ecuación de conservación de la energía, se pone la altura y la velocidad en función del ángulo, se deriva en el tiempo y se restringe a pequeños ángulos.

Precesión debida al momento de las fuerzas

El movimiento de una peonza se suele tomar como ejemplo de este tipo de movimiento, debido sin duda a ser una experiencia accesible para la mayoría de las personas. Una vez que hacemos girar la peonza esta va pasando, de una posición inicialmente casi vertical a ir declinando poco a poco hacia abajo manteniendo el punto de contacto con el suelo. Esta declinación es gradual y va acompañada de un giro del eje de la peonza alrededor una línea vertical que pasa por el punto de contacto *fijo* con el suelo, giro también denominado *precesión*. También se puede notar un ligero movimiento de oscilación o *nutación* del eje indicado en el dibujo por las dos flechas sobre el eje de la peonza. Dado que el punto de contacto con el suelo es fijo las fuerzas de contacto no tienen asociado un desplazamiento y por tanto no implican un intercambio de energía externo. Basta tomar momentos respecto al punto fijo para ver que estas fuerzas tampoco suponen un intercambio de momento angular. Por tanto las fuerzas de contacto solamente pueden intercambiar impulso mecánico con la peonza. La precesión hace que el centro de masas siga una trayectoria aproximadamente circular como aparece en el dibujo. Para que esto suceda, las fuerzas externas (peso y contacto con el suelo) deben cancelar en la vertical y en la horizontal debe actuar una componente asociada al rozamiento que justifique la aceleración centrípeta necesaria. La peonza es un objeto simétrico de forma que podemos suponer que el centro de masas se sitúa en algún punto del eje de simetría de la



[4] Frecuencia que también depende del coeficiente de rozamiento η
[5] Note el lector la analogía de esta ecuación y la de un circuito eléctrico RLC.

peonza, tal como aparece en el dibujo. Sin embargo el eje de simetría de la peonza no es en este caso el eje instantáneo de rotación. Sabemos que el eje instantáneo de rotación pasa por el punto de contacto con el suelo en el que la punta de la peonza está en reposo en el sistema de coordenadas del laboratorio, pero no puede pasar por el centro de masas ya que el centro de masas no está en reposo como hemos dicho.

Sin embargo podemos considerar un sistema de coordenadas *S* (en rojo en el dibujo)que se mueva de tal forma que la precesión quede compensada (anulada). El eje *Z* de este sistema coincide con el eje de simetría de la peonza y es solidario (arraigado) a ella. Sin embargo los otros dos ejes no son igualmente solidarios (arraigados) a la peonza; pero todos los ejes de *S* giran, exclusivamente, según la *velocidad angular de precesión Ω*. En este sistema de coordenadas están en reposo tanto el punto de contacto con el suelo como el centro de masas y por tanto el eje instantáneo de rotación equivale en todo momento al eje *Z*. Para ver el movimiento del eje instantáneo de rotación respecto del observador del laboratorio podemos combinar los dos movimientos: la rotación observada desde *S* y la precesión de *S* vista desde el laboratorio. De esta forma el movimiento del eje instantáneo de rotación aparece asociado a la rodadura entre dos conos, como aparece en el dibujo adjunto (*Diagrama de Poncelet*). El cono de la derecha está asociado al movimiento de precesión del eje *Z* y el de la izquierda la rotación de la peonza respecto del sistema *S*. El vértice de los conos es el punto de contacto de la peonza con el suelo, que en ambos sistemas de coordenadas (*S* y *LAB*) es un punto de reposo de la peonza. El cono de la izquierda rueda sin deslizar sobre el cono de la derecha, debido a esto, los puntos correspondientes de la peonza (cono izquierdo) están en reposo instantáneo respecto del sistema *LAB* y por tanto están en el *eje instantáneo de rotación respecto de LAB*. Por tanto en *LAB* el eje instantáneo de rotación no corresponde con el eje de la peonza. El cono izquierdo no representa la peonza completa, sino que su ángulo de abertura está limitado en la zona de rodadura por los puntos de la peonza en reposo relativo a *LAB*. De la condición de rodadura tenemos una medida de la anchura relativa de los conos $\Omega d_{LAB}=\omega d_{S;}$ de modo que si $\Omega<<\omega$ entonces $d_S<<d_{LAB}$ y la anchura del cono giratorio asociado a la peonza es muy pequeña.

Podemos aplicar el resultado de que el momento de las fuerzas externas respecto del centro de masas equivale a la velocidad de cambio de momento angular respecto del centro de masas. El Sistema de coordenadas centro de masas no es el sistema de coordenadas *S* anterior, pero dada la simetría de la peonza el sistema *S* es un sistema de ejes propio que diagonaliza el tensor de inercia. Podemos suponer un instante en que el sistema de coordenadas centro de masas coincide con *S.* Si el giro de precesión es, *en primera aproximación*, mucho mas lento que el de giro de la peonza respecto de su eje de simetría, podemos aplicar lo antes señalado, en este instante, así

$$\overline{P}+\overline{N}=0;\ \ \overline{r}_0^{CM}\times\overline{N}=\frac{d\overline{L}}{dt};\ \ \overline{L}=I^{zz}\overline{w}$$

La primera ecuación es el balance de fuerzas verticales externas sobre el centro de masas y se justifica si el centro de masas se mueve sobre un plano horizontal. La segunda ecuación es el momento de fuerzas respecto del sistema centro de masas de acuerdo a la aproximación anterior; en este punto suponemos que el momento de las fuerzas *R, R'* respecto del centro de masas es despreciable. La tercera ecuación indica que si despreciamos la precesión, lo cual es coherente con tomar *R=0* como veremos, el eje de rotación instantáneo de la peonza es su eje de simetría y por tanto se trata de un eje propio en el que las direcciones de *L* y *w* son las mismas. En estas condiciones los vectores *L* y r_0^{CM} son aproximadamente paralelos ($r_0^{CM} = \lambda L$, λ coeficiente de proporcionalidad lineal) y, multiplicando escalarmente por el *vector L* la segunda ecuación, obtenemos que el módulo de *L* es constante en el tiempo. Por tanto la velocidad de cambio de *L* corresponde al *giro de un vector de módulo constante* en el sistema de coordenadas centro de masas respecto de un punto fijo, algo que se expresa por medio del producto vectorial como vimos en la cinemática (ver apéndice matemático: tensor velocidad angular):

$$\bar{r}_0^{CM} \times m\bar{g} = \lambda \bar{L} \times m\bar{g} = -\frac{d\bar{L}}{dt} = -\bar{\Omega} \times \bar{L} \Rightarrow \bar{\Omega} = \lambda m\bar{g} = \pm \frac{r_0^{CM} m}{L} \bar{g}$$

donde *Ω* es la velocidad angular asociada al movimiento de *precesión*, es decir, la velocidad angular con que el eje instantáneo de rotación se va desplazando, de generatriz en generatriz, por el lateral del cono de la derecha en el diagrama de Poncelet. Vemos claramente que el incremento instantáneo *dL* es perpendicular al propio vector *L*. El signo que precede a la última expresión depende de si el sentido de los vectores r_0^{CM} y *L* es el mismo o es opuesto. Note el lector que hemos partido de una situación estática despreciando la precesión y el resultado obtenido es un valor para la precesión. Esta precesión provoca la rodadura entre conos en el diagrama de Poncelet y por tanto la precesión de la propia peonza. Este resultado es una primera aproximación cuasiestática que puede realimentar un proceso para una *segunda aproximación*; ya que el valor *Ω* da una medida para $R = m\,\Omega^2\, d_{cm}$; en una aproximación basada en la percepción física del *CM* moviéndose uniformemente en una trayectoria circular de radio d_{cm} : siendo $d_{cm} = r_0^{CM} sen(\varphi)$ la distancia entre el *CM* y la recta vertical que pasa por el punto fijo en tierra de la peonza. Con este nuevo componente, la ecuación anterior de momentos de fuerza respecto al centro de masas se plantea, en forma escalar, de esta forma

$$r = r_0^{CM}\,;\; rN\, sen(\varphi) + m\, r^2 \Omega^2\, sen(\varphi)\cos(\varphi) = \Omega L\, sen(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\Omega L - rN}{m r^2 \Omega^2}$$

En *segunda aproximación* tenemos que el eje de la peonza forma cierto ángulo *φ* con la vertical y esto supone $rN \neq L\Omega$, pero la diferencia de valores $rN - L\Omega$ mantiene un valor aproximadamente constante de modo que el ángulo de inclinación del eje de la peonza se mantiene también aproximadamente constante. Sin embargo la experiencia física de la nutación del eje de la peonza nos informa de que el ángulo *φ* oscila ligeramente. Podemos relacionar esto con una pequeña oscilación en la precesión $\Delta\Omega << \Omega$. Si la precesión *Ω* cambia con el tiempo debemos introducir también una componente de fuerza tangencial *R'* al movimiento del centro de masas, cuyo valor aproximado será

R' = md$_{cm}$ dΩ/dt. El lector puede comprobar que la dirección de la fuerza *R'* generará un momento de fuerza respecto del centro de masas que supone un incremento ΔL^n del momento angular de la peonza que lo hace oscilar en la dirección del cabeceo de nutación. Este ΔL^n es también aproximadamente perpendicular a *L*; de modo que, para valores de *L* suficientemente elevados, podemos seguir suponiendo que el módulo de *L* es aproximadamente constante. La precesión oscilará entre dos valores extremos. Partiendo del mínimo de *Ω* y considerando un alto valor de *L*, un pequeño aumento ΔΩ supone en segunda aproximación un aumento de Δ*N* según la relación *ΩL – rN ≈ constante*. Si *N* va en aumento, podemos suponer que la dinámica está en un estado en que *N<mg* y que en centro de masas está cayendo; pero a medida que éste cae *Ω y N* aumentan llegando a valores máximos. Es previsible por tanto que *N* llegue a un valor que frene la caída del centro de masas (*N>mg*) y éste acabe por elevarse. En el ascenso desde valores máximos *N* y *Ω* irán disminuyendo hasta el punto en que el centro de masas no pueda seguir su ascenso en la nutación y vuelva a repetir la fase oscilatoria de descenso. De este modo el *promedio temporal de la nutación* resulta en unos valores promedio de *N=mg*, *Ω y φ* constantes según la segunda aproximación comentada antes.

En el contexto de la aproximación que manejamos, podemos comprobar que la variación de energía potencial del centro de masas no puede ser absorbida totalmente por una variación de la energía cinética del mismo centro de masas, y por tanto la energía cinética de rotación debe verse afectada para cumplir con la conservación de la energía.

$$E_{rot}^{CM} = E - E_{cm} = E - \left(E_{cm}^{cinetica} + E_{cm}^{potencial}\right) \approx E - \left(\frac{1}{2} mr^2\Omega^2 sen^2(\varphi) + E_{cm}^n + mgr\cos(\varphi)\right);$$

$$\frac{dE_{rot}^{CM}}{dE_{cm}^{potencial}} \approx \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\Omega^2}{g/r}\cos(\varphi) \approx \dfrac{m^2 r^3 g}{L^2}\cos(\varphi) \\ \dfrac{sen(\varphi)}{L}\dfrac{mr^2 d\Omega}{d\varphi} = \dfrac{M_n^{CM}}{Ld\varphi/dt} = 1 \end{array} \right\} = \frac{r\Omega^2}{g}\cos(\varphi) - \frac{dE_{cm}^n}{dE_{cm}^{potencial}} \Rightarrow$$

$$\frac{dE_{rot}^{CM}}{d\varphi} = -mr^2\Omega^2 sen(\varphi)\cos(\varphi) - \frac{dE_{cm}^n}{d\varphi}$$

E^n_{cm} es la energía cinética del *centro de masas* en la *dirección de nutación*. Por otro lado la variación de un vector *L* de módulo constante por la velocidad angular de nutación (*dφ/dt)* debe satisfacer $M_n^{CM}=Ld\varphi/dt$; donde M_n^{CM} es el momento de la fuerza que provoca la nutación respecto al centro de masas. Para valores de *L* suficientemente grandes (*L>>mr√gr*) podemos aproximar el resultado anterior por $\frac{d}{d\varphi}\left(E_{rot}^{CM} + E_{cm}^n\right) \approx 0$ y la energía de nutación del centro de masas se compensa aproximadamente con la energía de rotación respecto al centro de masas. Para valores de *L* no tan grandes la aproximación no es válida y tenemos un movimiento de nutación distinto; y en general el movimiento resultante depende de las *condiciones iniciales* de estos movimientos de precesión y nutación.

Si partimos inicialmente de una caída del centro de masas tenemos $d\varphi>0$ y $dE^{n}_{cm}>0$ y por tanto $dE^{CM}_{rot}<0$; lo que supone una disminución de la energía cinética de rotación. La interpretación física de este resultado es que la peonza transfiere energía de rotación para evitar la caída del centro de masas: realiza un "trabajo" sobre el centro de masas. Podemos ver esto haciendo la integral de línea de la 2ª Ley de Newton para el centro de masas según el desplazamiento de dicho centro de masas dr_{cm}

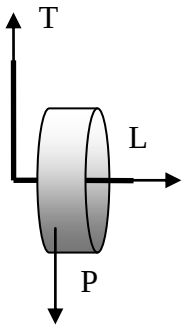
$$\sum \overline{F}_{ext} = m\overline{g} + \overline{N} = m\overline{a}_{cm} \Rightarrow \overline{N} \bullet d\overline{r}_{cm} = -m\overline{g} \bullet d\overline{r}_{cm} + m\overline{a}_{cm} \bullet d\overline{r}_{cm} \Rightarrow$$
$$dW^{N}_{cm} = dE^{potencial}_{cm} + dE^{cinetica}_{cm}$$

Aquí N agrupa las componentes de la fuerza de contacto con la punta de la peonza, y en rigor esta fuerza no supone ningún trabajo o transferencia de energía a la peonza ya que actúa sobre un punto fijo que no se desplaza. Sin embargo en la integral anterior aparece un trabajo no nulo dW^{N}_{cm} asociado al desplazamiento del centro de masas. Si expresamos $N = -mg+\Delta N$ en el resultado anterior el término de energía potencial desaparece. Tenemos que concluir por tanto que este trabajo dW^{N}_{cm} incluye transferencias de energía *internas* a la peonza, en este caso entre la energía cinética de rotación y la energía cinética del centro de masas. De la misma forma podemos multiplicar la 2ª Ley vectorialmente por r_{cm} y obtenemos

$$\overline{r}_{cm} \times m\overline{g} + \overline{r}_{cm} \times \left(-m\overline{g} + \Delta\overline{N}\right) = \overline{r}_{cm} \times m\overline{a}_{cm} = \frac{d}{dt}\left(\overline{L}_{cm}\right) \Rightarrow \overline{r}_{cm} \times \Delta\overline{N} = \frac{d}{dt}\left(\overline{L}_{cm}\right)$$

ya que sabemos que las fuerzas de contacto no suponen un intercambio de momento angular en este caso, debemos concluir que estas fuerzas están asociadas a una transferencia interna entre el momento angular de rotación y momento angular del centro de masas.

El dibujo adjunto presenta un ejemplo similar de precesión: una rueda gira soportada solo por una cuerda atada a un extremo de su eje de giro. El momento de giro L hace que la rueda decline hacia el suelo lentamente y haciendo un giro de precesión respecto al eje definido por la cuerda a medida que actúa el momento de fuerzas asociado al peso (P). Colocando un dinamómetro en la cuerda podemos observar la evolución de la tensión T con el tiempo. La presentación hecha sobre el movimiento de la peonza es una aproximación ligada a nuestra percepción física. Un tratamiento matemáticamente mas riguroso se deriva de la utilización de los *ángulos de Euler* y las ecuaciones de *Euler-Lagrange.* El uso de estas ecuaciones, basadas en el *principio de D´Alembert,* es recomendable debido a la dificultad de evaluación de las fuerzas de ligadura en el contacto entre la peonza y el suelo. En el apéndice matemático se hace un planteamiento del Lagrangiano de la peonza.



El caso de la bailarina

Un ejemplo muy común sobre conservación del momento angular es el de una bailarina que está girando con sus brazos en cruz y posteriormente los acerca a su cuerpo. Si suponemos que las fuerzas externas están equilibradas y el momento de dichas fuerzas respecto del centro de masa es nulo, entonces el momento angular respecto del centro de masa debe conservarse. Dado que el momento de inercia respecto del eje de giro (I^{ZZ}), que suponemos es un eje principal, disminuye al acercarse la masa al eje de rotación, entonces la velocidad angular de la bailarina aumenta. Esto hace que la energía cinética de rotación aumente. El cambio en la distribución de la masa supone en general un cambio en la posición (altura) del centro de masa y por tanto un cambio en la energía potencial. Si este cambio no compensa el aumento de energía cinética, entonces, ya que no actúan fuentes de energía externas, la energía no compensada debe proceder de fuentes internas: del metabolismo fisiológico y la *energía interna* [**7**] de la bailarina a través de su esfuerzo por acercar los brazos al tronco.

Equilibrio mecánico en un sólido rígido y principio de los trabajos virtuales[5].

Según el principio de los trabajos virtuales, un sistema mecánico en equilibrio se caracteriza por que cualquier modificación *virtual* δr_i de la posición de sus elementos compatible con las restricciones geométricas es tal que el trabajo virtual neto de las fuerzas del sistema f_i es nulo:

$$\sum_i \overline{f_i} \bullet \delta \overline{r_i} = 0$$

donde *i* numera cada una de las partes en que se puede dividir el sistema. En el caso de un sólido rígido, una modificación de la posición compatible con las restricciones geométricas debe cumplir con el primer invariante cinemático, de modo que

$$\delta \overline{r_i} = \left(\overline{v}_0 + \overline{w} \times (\overline{r}_i - \overline{r}_0)\right) dt$$

donde v_0 y w son valores asociados a un *movimiento virtual*, y por tanto son valores arbitrarios e independientes entre sí. El vector r_0 es un punto de referencia en el sólido rígido y el r_i varía en todos los puntos de sólido rígido. Sustituyendo esto en la ecuación del trabajo virtual tenemos

$$\sum_i \overline{f_i} \bullet \left(\overline{v}_0 + \overline{w} \times (\overline{r}_i - \overline{r}_0)\right) dt = \left[\overline{v}_0 \bullet \sum_i \overline{f_i} + \overline{w} \bullet \sum_i (\overline{r}_i - \overline{r}_0) \times \overline{f_i} \right] dt = 0$$

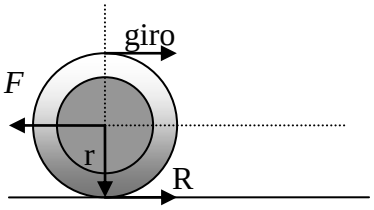
Dado que podemos tomar cualesquiera valores para v_0 y w, concluimos que el equilibrio mecánico supone equilibrio de fuerzas y de momentos

$$\sum_i \overline{f_i} = 0; \quad \sum_i (\overline{r}_i - \overline{r}_0) \times \overline{f_i} = 0 \Rightarrow \sum_i \overline{r}_i \times \overline{f_i} = 0$$

Las fuerzas que aparecen f_i aquí incluyen fuerzas internas al sólido y fuerzas externas. Dado que en un sólido rígido la suma de fuerzas internas se anula por acción-reacción y la suma de momentos de fuerza internos también se

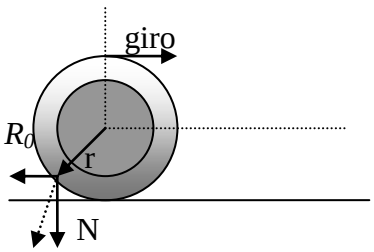
anula; entonces el resultado anterior equivale a equilibrio de fuerzas y momentos de fuerzas externas.

Rozamiento de Rodadura.



Si damos un impulso inicial a una rueda y la dejamos libre, al final acaba dejando de girar y en reposo. Visto desde el centro de masas de la rueda, está actuando un momento de fuerzas que frena el giro de dicha rueda. Si despreciamos la influencia del aire, lo cual está justificado a bajas velocidades, este momento puede asociarse al rozamiento entre la rueda y el suelo. El dibujo muestra la rueda y los ejes del sistema de coordenadas centro de masa en línea de puntos. El momento de la fuerza de rozamiento *R* es el producto vectorial *r x R* y tiene sentido opuesto al giro de la rueda. Por tanto la rueda tiende a girar mas despacio. El sistema centro de masas de la rueda es no inercial y disminuye su velocidad progresivamente. Recordando el ejemplo 4 de la sección 6 del trabajo sobre cinemática, tenemos que debe haber una *fuerza extra F* en dirección contraria a *R*, de modo que el balance de estas fuerzas sea una disminución progresiva de la velocidad del centro de masas de la rueda.

Tal como se ha hecho, la exposición anterior se puede considerar una *reducción al absurdo*. Si no consideramos la existencia de aire, la única causa posible para la fuerza *F* es el contacto entre la rueda y el suelo. Pero la fuerza asociada a este contacto es precisamente *R*. En consecuencia la fuerza de contacto entre la rueda y el suelo no puede ser, geométricamente, tal como se ha dibujado la fuerza *R*; si queremos explicar que la rueda al final acabe parándose. Si la rueda girase uniformemente, entonces podría ser *R=0* y se mantendrían los principios de conservación de la cantidad de movimiento, del momento angular y de la energía para la rueda.



Considerar que *R* va en sentido contrario tampoco facilita las cosas, al contrario, ya que predice un aumento de la velocidad de giro de la rueda y un freno del centro de masas y por tanto conduce a deslizamiento entre la rueda y el suelo. El dibujo adjunto muestra una configuración geométrica adecuada para explicar el movimiento de la rueda en este caso. Esta configuración permite un freno del centro de masas combinado con una reducción del giro de la rueda. Sin embargo el punto de aplicación de la fuerza, descompuesta en el dibujo en sus componentes geométricas R_0 y *N* es poco intuitivo y debemos aclarar cual es el origen físico de esta fuerza. Tomemos como referencia una rueda de goma de un automóvil, debido a su elasticidad, hace contacto con la calzada no en un punto sino en una superficie rectangular determinable. Los puntos del neumático están afectados por las componentes de rozamiento *R* y normal *N* asociadas al contacto con el suelo. La componente *R* depende de la situación dinámica específica de la rueda. Sin embargo en los *bordes* de este rectángulo hay que considerar *fuerzas específicas del fenómeno físico de la rodadura; de*

ahí la notación R_0. Para percibir mejor esto, imagine el lector que la superficie de la rueda y la del suelo tuviese algo similar a las capas del *velcro*. La parte de la rueda que sube desde el suelo sufrirá una fuerza que tiende a frenar el movimiento de la rueda. Esta fuerza es la representada en la imagen anterior; aunque de forma exagerada, ya que está asociada al extremo de la zona de contacto entre la rueda real (no circular) y el suelo. Esta es una imagen del origen del *rozamiento por rodadura*. También permite entender la medida del coeficiente de rozamiento de rodadura. Si colocamos nuestra rueda en reposo en un plano inclinable, existirá un margen en que la inclinación del plano no provocará el giro de la rueda. El equilibrio mecánico exige equilibrio de momentos y fuerzas. Si calculamos los momentos de fuerza para todas las partículas de la rueda respecto del centro del rectángulo de contacto entre la rueda y el plano inclinado tenemos:

$$\sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{g} + \sum_i \bar{r}_i \times (\bar{N}_i + \bar{R}_i) = 0$$

donde el primer sumatorio es el momento de fuerzas asociado a la gravedad y el segundo sumatorio es el momento de fuerzas asociado a las fuerzas de contacto entre la rueda y el plano. Con las condiciones de simetría adecuadas, es evidente que el momento asociado a la gravedad tiene una dirección bien determinada que tiende a girar la rueda sobre su perímetro circular haciéndola caer por el plano. Los momentos asociados a las fuerzas *R,* paralelas al plano, siempre son perpendiculares al momento neto asociado a la gravedad, y por tanto los términos $r_i x R_i$ deben cancelar entre ellos en el segundo sumatorio. Los momentos asociados a las fuerzas *N,* perpendiculares al plano, tienen geométricamente posibilidad de compensar el momento asociado a la gravedad. Con esto, expresando el momento angular asociado a la gravedad en términos del centro de masa y aplicando el *teorema del valor medio* la expresión anterior queda así:

$$r_{cm} Mg\, sen(\alpha) + \mu' \sum_i N_i = rMg\, sen(\alpha) + \mu' N = 0$$

donde *μ'* es el coeficiente de rozamiento de rodadura y depende del tipo de materiales en contacto y del radio de la rueda. El equilibrio de fuerzas nos proporciona dos nuevas relaciones

$$N + Mg\cos(\alpha) = 0; N = \sum_i N_i\,; R + Mg\, sen(\alpha) = 0; R = \sum_i R_i$$

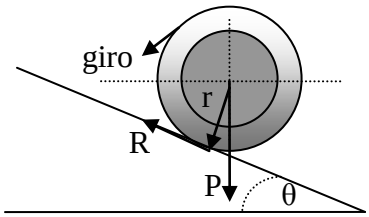
El valor del coeficiente será una función del ángulo del plano inclinado *μ'(θ)* mientras que la rueda se mantenga en reposo y en general irá en aumento a medida que el ángulo aumenta; mientras la rueda se mantenga en reposo. En la sección anterior sobre el *oscilador mecánico* el lector pude ver el análisis de un caso particular que incluye el rozamiento de rodadura en condiciones dinámicas.

La medida del coeficiente de rodadura requiere que la rueda tenga un pequeño margen de elasticidad. Para que una rueda real, afectada por rozamiento de rodadura, se mueva a velocidad constante es necesario que este sometida a

una fuerza exterior F_{ext} que compense la rodadura (R_0); si consideramos despreciable la resistencia del aire. Si suponemos la fuerza exterior aplicada en el punto centro de masas de la rueda, entonces debemos aceptar la existencia de un *momento de fuerzas* asociado al rozamiento (R), en el centro de la zona de contacto entre la rueda y el suelo, que cancele con el momento de fuerzas asociado al rozamiento de rodadura (R_0). El momento de fuerza de rodadura tiende a disminuir el giro de la rueda y por tanto, para que el momento de fuerzas de rozamiento cancele con el de rodadura la dirección de la fuerza R será opuesta a la que aparece en el primer dibujo de esta sección. De este modo el *momento angular* de la rueda respecto del centro de masas, y por tanto el giro de la rueda, se mantiene constante en el tiempo. En el caso de que la rueda formase parte de una bicicleta, la F_{ext} será transmitida por el cuadro hasta el eje de dicha rueda. La acción del freno de la bicicleta sobre la rueda supondrá una disminución de energía cinética de rotación por frotamiento y consecuentemente la aparición de un momento de fuerzas de frenado respecto del centro de masas de la rueda que tiende a disminuir la velocidad de giro de la rueda. En este caso la fuerza R en el centro de contacto entre la rueda y el suelo apuntará en dirección opuesta a la que aparece en el primer dibujo de esta sección para que el centro de masas de la bicicleta entera frene de forma efectiva, superando el efecto de frenado del rozamiento por rodadura (R_0).

Cuando un automóvil o camión circula por un terreno arenoso, tal vez subiendo o bajando una cuesta, es posible que pierda agarre con el suelo (R) y las ruedas empiecen a deslizar. Una forma de compensar en parte la pérdida de agarre es desinflar un poco los neumáticos, de modo que el agarre se distribuya en una superficie superior en el contacto del neumático con el suelo; y sea menos intenso por unidad de superficie que el agarre que puede proporcionar el terreno.

Cilindro lanzado rodando cuesta arriba por un plano inclinado



Nuestra intuición del movimiento nos dice que el cilindro tenderá a girar (ω) cada vez mas despacio a medida que sube por el plano. El efecto del rozamiento de rodadura en este caso sería similar al caso en que el cilindro rodase en llano, lo cual es claramente insuficiente en este caso para explicar la disminución del giro. Debemos por tanto incluir una fuerza de rozamiento R en el centro del área de contacto del cilindro con el plano inclinado. La dirección de R es tal que el momento rxR respecto del centro de masas del cilindro favorezca la disminución del momento angular de dicho cilindro respecto de su centro de masas. En este caso R no supone necesariamente una aceleración neta plano-arriba del centro de masas ya que debe incluirse la componente del peso P plano-abajo. De hecho el resultado neto de esta combinación de fuerzas debe ser opuesto a R de modo que tanto el giro como la velocidad del centro de masas del cilindro disminuyen a medida que el cilindro asciende en el plano inclinado. Podemos formalizar esta discusión con las siguientes fórmulas

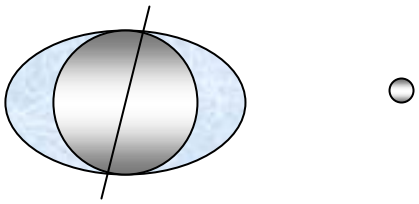
$$I\frac{d\omega}{dt} = -rR;\ \ R - mg\ \sin(\theta) = mr\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \left(I + mr^2\right)\frac{d\omega}{dt} + mgr\ \sin(\theta) = 0$$

donde *I* es el correspondiente momento de inercia que es constante por ser el caso de un eje principal. La solución de la ecuación anterior es linealmente decreciente con el tiempo: $\omega = \omega_0 - \alpha t$; lo cual permite calcular el tiempo hasta que el cilindro se para. Aunque hemos despreciado el efecto de la rodadura, si el ángulo del plano inclinado está en el margen adecuado, el cilindro puede incluso quedar en reposo permanentemente debido al rozamiento de rodadura.

Conservación local del momento angular.

Si uno toma un bol lleno de agua con pequeños objetos flotando, como trozos de papel, y gira como si fuese una peonza, observará que el agua también empieza a girar respecto al centro del bol y en dirección contraria a la del experimentador. Podemos ver una tendencia a la compensación local de las variaciones de momento angular; análogo a la acción-reacción de la 3ª Ley de Newton. Análogamente, la tierra es un recipiente para la atmósfera y el océano; de modo que cualquier variación en la rotación terrestre tendrá su correspondiente reacción en el océano y en la atmósfera. El lector interesado en reproducir la experiencia tenga cuidado de no marearse. El simple acto de andar también proporciona un ejemplo de conservación local del momento angular. Cuando una pierna gira hacia adelante el brazo del mismo lado gira de forma natural hacia atrás como compensación.

El caso de la tierra y la luna. Principio de conservación del momento angular.



La imagen representa, de forma muy exagerada, el efecto de marea generado por la luna sobre el agua de los océanos de la tierra. También se representa el eje de rotación de la tierra inclinado respecto de la eclíptica. El movimiento relativo entre la tierra y la luna es tal que el giro de la masa continental de la tierra (24 horas por ciclo) es muy superior al de la luna en su órbita (28 días por ciclo); juzgado por un observador en el centro de masas del sistema. A medida que la tierra gira, el pico de marea se mantiene alineado con la luna e, inevitablemente, alcanza las costas continentales. En esta toma de contacto la masa de agua de marea frena a la masa continental de modo que disminuye la velocidad de rotación de la tierra; disminuyen tanto el momento angular como la energía cinética de rotación de la tierra. Por otra parte, al desaparecer el pico de marea en la zona continental, la acción gravitatoria de la tierra sobre la luna es menos intensa, lo que aumenta la energía potencial gravitatoria del sistema tierra-luna. Vemos en este caso una transferencia entre energía potencial gravitatoria y energía de rotación, que recuerda algo el caso del movimiento de la peonza. Consideremos al sistema tierra-luna como aislado y veamos el comportamiento de las leyes de conservación. Invocando el *principio de conservación del momento angular* en un sistema aislado, si disminuye el momento angular intrínseco de rotación diurna de la tierra (respecto de su propio centro de masas), debe haber otro objeto en el sistema que aumente su momento angular y compense el momento angular total. Para una órbita circular de la luna respecto de la tierra tenemos [3]

$$E = -\frac{m}{2}\left(\frac{GMm}{L}\right)^2 = -G\frac{Mm}{2r} \Rightarrow r = \frac{L^2}{GMm^2}$$

y vemos inmediatamente que un aumento del módulo del momento angular orbital de la luna (*L*) supone también un aumento de la distancia tierra-luna (*r*) y de la energía (*E*) mecánica de la luna. Pero una justificación completa debe incluir el carácter vectorial del momento angular. Para que se den una disminución del módulo del momento angular diurno de la tierra y un aumento equivalente del módulo del momento angular orbital de la luna los dos vectores correspondientes deben ser paralelos y del mismo sentido, al menos aproximadamente; y en efecto este es el caso ya que la rotación diurna de la tierra y la velocidad orbital de la luna son ambos hacia el este. Por tanto si la tierra pierde momento angular intrínseco y energía mecánica de rotación, es posible que las mareas lunares (o solares) provoquen una disminución de la velocidad angular de la tierra y un aumento de la distancia tierra-luna(o sol). Otra forma de ver el fenómeno es que el aumento de energía potencial gravitatoria del sistema implica que la Luna está en una órbita con exceso de energía cinética de su centro de masas; este exceso de energía cinética hace que la Luna sufra una transferencia de órbita del tipo de *Hohmann[3]*. Aunque se trata de un efecto relativamente pequeño es acumulativo, y a lo largo de millones de años ha tenido un efecto susceptible de ser medido. Se estima, en base a registros fósiles y geológicos, que hace unos 3.800 millones de años la duración del día terrestre era entre 18 y 20 horas; frente a las 24 actuales. Mediciones muy precisas, utilizando un rayo laser y espejos reflectores colocados en la luna durante las misiones Apollo de la NASA, indican un aumento de *38 milímetros/año* en la distancia tierra-luna.

Hemos despreciado la posible modificación del momento angular intrínseco de la luna, pero el hecho de que la luna presente la misma cara hacia la tierra hace que en la luna no haya *propagación* de ondas de marea debidas a la gravedad de la tierra, y por tanto no hay frenado o aceleración en el giro de la luna por esta causa (*tidal locking*)[3].

Precesión y Nutación en la rotación de la tierra

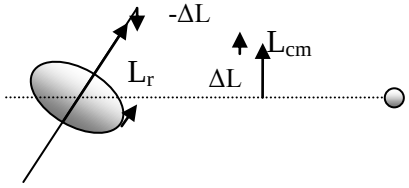
El movimiento de giro diurno de 24 horas la tierra sigue las mismas leyes que la peonza. Pero en este caso no existe un punto de apoyo fijo para la tierra y la gravedad que actúa es principalmente la del sol. Para la peonza vimos que el momento de la fuerza de gravedad respecto del centro de masas se anula debido a que la intensidad gravitatoria *(g)* es una constante. Sin embargo, a escala de toda la tierra, la intensidad gravitatoria del sol es superior en las partes de la tierra más cercanas al sol que las más alejadas. Esto hace que el momento externo gravitatorio solar, medido respecto del centro de masas de la tierra, no se anule. De la misma forma que en la peonza este momento externo produce una precesión y nutación en el momento angular de la tierra; medido respecto del centro de masas de la tierra. El movimiento de precesión se detectó en la antigüedad tras siglos de observaciones astronómicas del fenómeno de los equinoccios. El equinoccio corresponde a la fecha que se puede determinar de una forma precisa en la que la duración del día y de la noche son iguales y corresponden a los cambios de estación invierno-

primavera y verano-otoño. En la antigüedad se constató que durante estas fechas, el sol estaba en la constelación de Aries en un caso y en la de Libra en el otro. Esas serían las constelaciones zodiacales[3] de fondo que tendría el sol visto desde la tierra. Pero con el paso de los siglos se evidenció que las constelaciones de fondo del sol cambiaban durante los equinoccios y lo que antiguamente era Aries ahora es Piscis y Libra es Virgo. Esta precesión del eje de giro terrestre se realiza respecto al *polo eclíptico*, es decir, respecto a un eje ideal perpendicular al plano de la órbita terrestre alrededor del sol y solidario al centro de masas de la tierra. Actualmente se considera que el desplazamiento angular correspondiente en el círculo de las constelaciones zodiacales es de 50,290966 segundos de arco por año, lo que supone un giro de precesión completo cada 25.776 años. Debido a esto también el eje de la tierra cambia de dirección y la estrella del Norte del firmamento nocturno ha ido cambiando de "titular" con el paso del tiempo. La estrella que ahora conocemos como *Polar*, que ahora indica el norte en la constelación de la Osa Menor(hemisferio norte), hace 4.800 años era *Thuban*, en la constelación del Dragón.

El movimiento de nutación de la tierra tiene un periodo mucho mas corto que el de precesión : 18.6 años y se evidencia en la localización de los paralelos terrestres correspondientes a los trópicos y los círculos polares. Debido a la nutación la localización de estos paralelos varía periódicamente cada 18.6 años. La imagen adjunta muestra la posición del trópico de cáncer en años sucesivos en una zona de México. Por supuesto este movimiento también afecta a la dirección del eje de rotación de la tierra, pero el efecto es relativamente pequeño.

Conservación del momento angular, sistema solar y el problema de Venus.

Consideremos el sistema Sol-Tierra, abstrayendo por el momento la Luna. Como se explica en el apéndice (*Energía mecánica y Lagrangiana de una peonza*) y en secciones anteriores, existe un movimiento natural de nutación de la tierra. Si este movimiento es natural y no forzado externamente entonces, siguiendo el dibujo adjunto, si el eje de rotación se eleva por nutación hacia la vertical, entonces la fuerza del sol sobre el conjunto de la tierra aumenta. Pero note el lector que si el proceso de nutación no es forzado externamente, entonces la energía y momento angular del sistema permanecen constantes frente al aumento de la fuerza. Esto es análogo a lo que ocurre con la peonza, donde las fuerzas de contacto con el suelo varían con el tiempo pero no aportan ni energía ni momento angular al sistema. Esta analogía nos pone sobre la pista de una transferencia de energía y momento angular entre el centro de masas y la masa terrestre en rotación. Si el centro de masas mantiene su trayectoria orbital, esto implica que su energía cinética debería aumentar en correspondencia al aumento de la gravedad. Esto es posible si hay una transferencia entre energía cinética de rotación y energía cinética del centro de



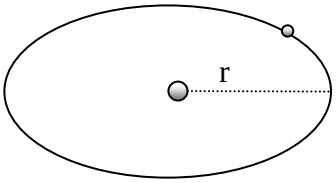
masas; análogamente al caso de la peonza. En términos de momento angular este proceso significa un aumento ΔL del momento angular orbital del centro de masas (L_{cm}) y por tanto una disminución equivalente del momento angular de rotación para que el momento angular total se conserve; tal como se ve en el dibujo. Por tanto frente a un ascenso del eje de la tierra debido a la nutación el sistema reacciona bajando el momento angular de rotación, lo que implica una tendencia al descenso del eje de rotación de la tierra. Vemos por tanto la posibilidad de un mecanismo de compensación capaz de mantener una órbita estable para el centro de masas de la tierra. En este proceso suponemos que la oscilación de la tierra suponemos que la gravedad solar actúa transfiriendo impulso mecánico pero no energía. Esto no es un comportamiento extraño y también ocurre en el caso de órbitas circulares.

Dado que el desplazamiento de la luna en su órbita y la rotación propia de la tierra son en la misma dirección : de oeste a este visto desde el sistema centro de masas del sistema (que es prácticamente el de la tierra); este proceso de compensación también es posible en el sistema tierra-luna y contribuye a la estabilidad del eje de rotación terrestre. Todos los planetas se desplazan en el mismo sentido en sus órbitas (antihorario visto desde el polo norte solar) y el ángulo L_r-L_{cm} es menor de 90 grados; a excepción de Venus donde L_r apunta en dirección contraria según el dibujo, es decir, hacia el inferior del plano orbital según el dibujo (*giro retrógrado*). Esto hace que el mecanismo de conservación del momento angular descrito no sea aplicable para Venus. Sin embargo es el caso que este planeta, de tamaño y masa similar a la tierra, tiene un valor de L_r relativamente muy pequeño, ya que un día en Venus dura unos 243 días terrestres. Esto hace que la conservación del momento angular asociada a la nutación de Venus pueda verificarse en base al movimiento de masas de aire (viento) de su también densa atmosfera. A lo largo de los tiempos estos vientos pudieron frenar la rotación de Venus hasta el valor tan bajo que ahora observamos. El caso de Urano es diferente ya que el ángulo L_r-L_{cm} es de unos 97 grados y L_r está prácticamente en el plano de la órbita.

Sin embargo el hecho de que el achatamiento de Venus sea mucho menor que el de la tierra[3] hace pensar que, desde sus orígenes, la rotación de Venus es muy pequeña. Por otra parte Venus tienen un cuasi-satélite: el asteroide *2002-VE68* que se mueve entre las órbitas de la tierra y mercurio; de unos 200 metros de diámetro se presume de influencia muy pequeña en la dinámica de Venus.

La precesión de Larmor

En electromagnetismo se puede demostrar que la acción de un campo magnético B sobre una partícula con momento magnético μ tiene asociado un momento de fuerzas M de valor



$$\overline{M} = \overline{\mu} \times \overline{B}$$

En el modelo de Borh del átomo de hidrógeno el electrón (de carga e) gira entorno al núcleo, de modo que podemos interpretar esto como una *corriente eléctrica* de intensidad I moviéndose en un

circuito cerrado que delimita un área. Esto es suficiente para asignar un momento magnético al átomo de hidrógeno

$$\overline{\mu} = I\overline{S} \Rightarrow \mu = \frac{e}{2\pi r} v \pi r^2 = \frac{e}{2} rv$$

Según este modelo podemos hacer la hipótesis de suponer una relación entre el momento magnético del átomo de hidrógeno y el *momento angular mecánico orbital L* del electrón dentro del átomo de hidrógeno, de modo que tenemos

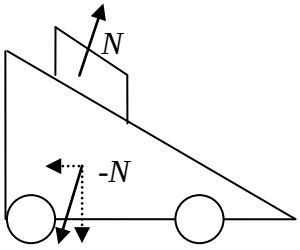
$$\overline{\mu} = \frac{e}{2m} \overline{r} \times m\overline{v} \Rightarrow \overline{M} = \gamma \overline{L} \times \overline{B} \ ; \ \gamma = \frac{e}{2m} \ , \ \overline{L} = \overline{r} \times m\overline{v}$$

donde γ es una constante numérica que depende, en principio, de las propiedades de la partícula. Podemos poner la ecuación anterior de forma similar al caso de la peonza

$$\overline{M} = \frac{d\overline{L}}{dt} = \overline{L} \times \gamma \overline{B} = \overline{\Omega} \times \overline{L} \Rightarrow \overline{\Omega} = -\gamma \overline{B}$$

lo cual describe una precesión del momento angular intrínseco de la partícula respecto de la dirección local del campo magnético, o *precesión de Larmor*. Si tomamos una muestra de hidrógeno atómico afectada por un campo magnético y le aplicamos radiación electromagnética a la frecuencia de Larmor resulta que se produce un llamativo fenómeno de absorción de radiación conocido como *efecto Zeeman*; algo que no ocurre para otras frecuencias en las mismas condiciones y que es típico del comportamiento resonante de sistemas como los circuitos eléctricos de corriente alterna. Además esta frecuencia de máxima absorción resonante sigue la forma de la frecuencia de Larmor, es decir, si modificamos el campo magnético la frecuencia de máxima absorción cambia proporcionalmente al campo magnético; y la constante de proporcionalidad también corresponde con $\gamma = e/2m$ en el caso del hidrógeno sin considerar el spin del electrón. Note el lector que, a diferencia del caso de la peonza, el giro de precesión Ω es independiente del momento angular orbital de la partícula. De hecho Ω es *independiente de la trayectoria de la partícula*, lo cual ya es un indicio relacionado con el *principio de incertidumbre de Heisenberg* que nos introduce en la física cuántica. Basado en la *teoría del electrón de Lorentz* y previo incluso al *experimento de Rutherford* y al *modelo de Borh*, el *efecto Zeeman* y su modificación de las líneas espectrales de los distintos átomos es un <u>*pilar experimental*</u> de la física en el que se apoyan conceptos tan fundamentales de la mecánica cuántica como las *reglas de selección*, *momento magnético de spín*, *factor g de Landé, acoplamiento de momentos spin-orbita*…

Fuerzas internas de acción-reacción.

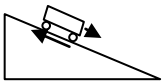


Imagínese de pie sobre una báscula casera para medir su peso. Si se eleva un brazo se puede ver que el indicador de peso se pone a oscilar. Esto es debido a las fuerzas internas al cuerpo que aparecen en el proceso, fuerzas relacionadas por el

principio de acción y reacción. Al mover el brazo, inicialmente la velocidad del centro de masas del brazo aumenta, llega a un máximo y disminuye hasta anularse cuando el brazo está totalmente en alto. En la primera fase la aceleración del centro de masas del brazo será positiva y corresponde según la 2ª ley de Newton a una fuerza hacia arriba. Esta fuerza procede de la interacción con el resto del cuerpo y por tanto el resto del cuerpo sufre una fuerza de reacción hacia abajo. Esta reacción hacia abajo hace que los pies presionen mas fuertemente la balanza y el indicador de peso aumente. En la segunda fase pasa lo contrario: la fuerza sobre el brazo es hacia abajo y la fuerza de reacción del resto del cuerpo es hacia arriba, lo que hace que los pies presionen menos sobre la balanza y el indicador de peso disminuya. La oscilación del indicador de la balanza es por tanto una señal de la existencia de fuerzas de acción y reacción en el interior de nuestro propio cuerpo. El dibujo adjunto representa un plano inclinado sobre el que se desliza un bloque. El plano inclinado puede moverse a izquierda-derecha debido a las ruedas que tiene. El dibujo representa la fuerza *N* normal, asociada la superficie de contacto entre bloque y plano, aplicada al centro de masas del bloque. También se representa la correspondiente fuerza de reacción –*N* actuando sobre el centro de masas del plano inclinado. Para determinar la dinámica del centro de masas del plano inclinado falta incluir el peso *P* del plano inclinado y las normales *N'* del contacto entre el plano inclinado y el eje de las ruedas, o entre las ruedas y el suelo si se prefiere. Estas componentes *P* y *N'* están geométricamente en la dirección vertical y pueden compensar la componente vertical de –*N* para que la suma sea cero en la vertical. Pero si el rozamiento de rodadura no es suficiente, entonces la componente horizontal de –*N* no queda compensada y el plano inclinado empieza a moverse hacia la izquierda. De esta forma el movimiento del plano inclinado es una consecuencia del principio de acción-reacción.

Energía de rotación y fuerzas externas

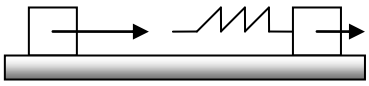
Suponga el lector un carrito con cuatro ruedas que cae por un plano inclinado de dos formas diferentes. En el primer caso las ruedas están bloqueadas y cae deslizándose sin rozamiento por el plano. En el segundo las ruedas están desbloqueadas y giran ,sin deslizamiento, en contacto con el plano. ¿En que caso se mueve mas rápido? Si en ambos caso el carrito cae desde la misma altura, es decir : parten con la misma energía potencial inicial; entonces claramente el segundo caso incluye un término de energía de rotación de las ruedas que restará velocidad a la energía cinética del centro de masas. Por tanto el carrito que rueda se moverá mas lentamente en todo momento, es decir, su aceleración de caída será menor. Si consideramos el momento angular desde el *centro de masas* de una cualquiera de las ruedas, vemos que el giro cada vez mas rápido de la rueda supone un aumento con el tiempo del momento angular de la rueda y que esto debe estar asociado a un momento de fuerzas externas; momento de fuerzas que no puede proceder de la gravedad, ni de la fuerza de contacto normal con el plano. Debemos por tanto asignar una fuerza adicional al contacto de la rueda con el plano inclinado, y esta fuerza , combinada con el resto de fuerzas produce también un efecto de reducción de la aceleración de caída del centro de masas respecto al caso de caída sin rozamiento, y un aumento



progresivo del momento angular respecto al centro de masas. Esta fuerza sobre las ruedas del carro en caída, corresponde a un rozamiento sin deslizamiento que no tiene asociada una transferencia externa de energía; pero provoca una transferencia interna entre energía cinética del centro de masas y energía cinética de rotación de las ruedas. Lo que si transfiere esta fuerza, del exterior al carro, es impulso mecánico y angular.

Centro de masas y muelle sin masa.

Un cuerpo de masa de 3 kg. se desliza, sin fricción, sobre una mesa horizontal con una velocidad inicial 9 m/s. Frente a él, moviéndose en la misma dirección y sentido se encuentra el cuerpo de masa 4 kg. cuya velocidad inicial es 3 m/s, éste tiene unido un resorte en la parte de atrás, cuya constante elástica es k = 1120 N/m, ¿cuál será la máxima compresión del resorte cuando los cuerpos choquen?



Las leyes físicas se aplican en cualquier punto del espacio e instante del tiempo. Si podemos, debemos elegir los instantes y puntos en que la aplicación de las leyes sea la mas sencilla posible. La máxima compresión del muelle corresponde al mínimo de distancia entre las masas. En el instante de la máxima compresión la velocidad relativa entre masas es 0, ya que corresponde con la derivada temporal, y por tanto las masas tienen la misma velocidad para cualquier observador inercial. Por tanto en el momento de máxima compresión cada parte del sistema se mueve con la misma velocidad del centro de masas del sistema. En este estado se pueden calcular la modificación de energía cinética de cada masa, despreciando la mas del muelle, y sumarlas. Se verá que la suma no es nula. De acuerdo con el principio de conservación de la energía esta energía debe compensarse con la energía absorbida por el muelle.

III – CONSIDERACIONES FINALES.

La marca distintiva de la física clásica es la aproximación cuasiestática. Toda acción sobre un sistema de partículas está sometida a algún tipo de propagación ondulatoria de energía e impulso a velocidad finita por el sistema. En el caso del sólido rígido estos estados intermedios no aparecen y solamente se consideran estados cinemáticos con velocidad angular y eje de rotación instantáneo definidos. La aplicación del cálculo diferencial supone considerar que la propagación ondulatoria es tan rápida como queramos (velocidad infinita) de modo que podemos considerar que el cambio de estado del sistema corresponde a una cinemática como la que hemos visto.

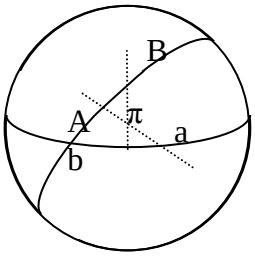
Hemos adoptado varias hipótesis en la cinemática. Primero considerar que el tiempo es un parámetro absoluto, es decir existe una medida común del tiempo para observadores en distintos sistemas de coordenadas. Que dos sistemas de coordenadas en movimiento relativo pueden coincidir en un instante dado, de modo que la matriz de transformación en ese instante es la identidad. Que la masa de un cuerpo es la suma de las masas de sus partículas.

La velocidad instantánea de propagación, el tiempo absoluto, la coincidencia de coordenadas entre sistemas en movimiento relativo y la conservación de la masa son incompatibles o de validez no general en la teoría especial de la relatividad. Por tanto el lenguaje que debemos utilizar es que suponemos una velocidad de propagación muy elevada, un tiempo aproximadamente común entre observadores, una coincidencia entre coordenadas muy aproximada y en general velocidades muy por debajo de la velocidad de la luz. En relación a la masa en relatividad, si el enlace entre dos moléculas tiene asociada una energía *E,* entonces el sistema de las dos moléculas ha perdido una masa estimada en E/c^2. Esta es una cantidad tremendamente pequeña en la práctica, por lo que en tiempos de Lavoisier los datos experimentales se interpretaron como justificantes de la conservación de la masa en las reacciones químicas.

Para un sólido rígido que gira respecto de un eje fijo, la velocidad instantánea de un punto cualquiera respecto de dicho eje será $\bar{v} = w \times \bar{r}$ lo cual supone superar la velocidad de la luz para puntos suficientemente alejados. Según la relatividad esto no es posible. En este punto es importante algo que se dijo al principio de la cinemática: la velocidad instantánea debe calcularse o medirse localmente; de modo que para el caso de la velocidad de la luz el valor del radio *r* será muy elevado y en ese lugar remoto debería seguir existiendo nuestro sistema de coordenadas y nuestro sólido rígido girando, lo cual es físicamente imposible ya que ningún objeto físico con masa puede alcanzar ni superar la velocidad de la luz. Por tanto la condición básica de que nuestro sistema de coordenadas debe ser un objeto físicamente realizable limita en este caso la extensión sobre la que puede utilizarse dicho sistema. Según la Relatividad General los sistemas de coordenadas clásicos (incluidos los de la relatividad especial), solamente pueden aspirar a una *validez local*: en *entornos relativamente próximos a un origen o referencia*; y entre dos de estos sistemas locales hay que considerar la *curvatura del espacio-tiempo*. Sin embargo “relativamente próximo” en este caso tiene un sentido bastante amplio; el sistema solar se puede considerar un entorno “relativamente próximo” al sol al nivel de precisión que requiere la física clásica.

APÉNDICE MATEMÁTICO.

El teorema de la rotación de Euler



Consideremos una esfera que puede moverse con la única restricción de mantener fijo su centro geométrico. Registrando las posiciones iniciales y finales en nuestro sistema de coordenadas vamos construyendo la imagen del dibujo. Nos fijamos inicialmente en el círculo máximo ecuatorial, cuyos puntos etiquetamos con letras minúsculas. Después de un movimiento arbitrario y debido a la rigidez de la esfera, los puntos del círculo ecuatorial inicial se habrán movido a otro círculo máximo final que puede ser en principio cualquiera de los posibles. Los puntos de este nuevo círculo máximo los etiquetamos en mayúsculas. Vemos que estos dos círculos máximos intersectan en un punto que hemos etiquetado con las letras A, b:

1-Si consideramos este punto como perteneciente al círculo máximo final lo llamamos *A (*mayúscula) . Este punto final debe corresponder al movimiento de un punto procedente del círculo ecuatorial inicial, que llamaremos *a* (minúscula) y que elegimos libremente en este círculo ecuatorial inicial.

2-Si consideramos este punto como perteneciente al círculo ecuatorial inicial lo llamamos *b* (minúscula). Este punto debe corresponder al movimiento de otro punto en el circulo máximo final, que llamaremos *B* (mayúscula). Este punto ya no puede ser elegido libremente ya que debido a la rigidez de la esfera la longitud del arco *[a,b]* debe ser la misma que la longitud del arco *[A,B]* y cada punto del arco *[a,b]* acaba ocupando una posición en el arco *[A,B]* al final del movimiento.

Partiendo de los puntos medios de los arcos de círculo máximo *[a,b]* y *[A,B]* trazamos, sobre la superficie esférica, dos círculos máximos que pasen por dichos puntos medios y sean perpendiculares a los arcos correspondientes. Estos círculos máximos, en el dibujo en trazo de puntos, intersectan en un punto de la superficie de la esfera etiquetado como π. Debido a su construcción, resulta que la distancia entre π y los puntos *a,b* es la misma que entre π y los puntos *A,B*. Lo mismo se puede decir cada punto del arco *[a,b]* y su punto correspondiente del arco *[A,B]*. Por tanto el punto π verifica la propiedad fundamental del movimiento de un sólido rígido : las distancias relativas entre sus puntos se mantienen constantes; pero con la salvedad de que consideramos el mismo punto π antes y después del movimiento. Es decir , el punto π no se ha movido.

De esta forma vemos que un movimiento arbitrario de la esfera en estas condiciones mantiene dos puntos fijos: el centro de la esfera y el punto π. Evidentemente este punto π concreto no tiene por que estar permanentemente en reposo y la arbitrariedad del movimiento indica que π puede estar en cualquier parte de la superficie de la esfera. Pero para un movimiento cualquiera que mantenga en reposo el centro de la esfera debe existir un punto sobre la superficie de la esfera que también se mantenga en reposo en dicho

movimiento. Por tanto el movimiento de una esfera que mantiene fijo su centro es equivalente a un giro respecto de un eje de rotación que pasa por el centro de dicha esfera.

Propiedades invariantes del producto escalar y vectorial

Tomemos 2 vectores *A,B*. Si hacemos el producto escalar de los dos en términos del producto de matrices podemos hacer

$$\left(A_x, A_y, A_z\right)\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \left(A_x, A_y, A_z\right)M^{-1}M\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \left[\left(A_x, A_y, A_z\right)M^T\right]\left[M\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}\right] = \left(A'_x, A'_y, A'_z\right)\begin{pmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{A} \bullet \overline{B} = \overline{A'} \bullet \overline{B'}$$

donde *M* es una matriz de transformación entre dos sistemas de coordenadas girados que comparten un origen común. Por tanto para estos sistemas de coordenadas el producto escalar de dos vectores no varía su valor.

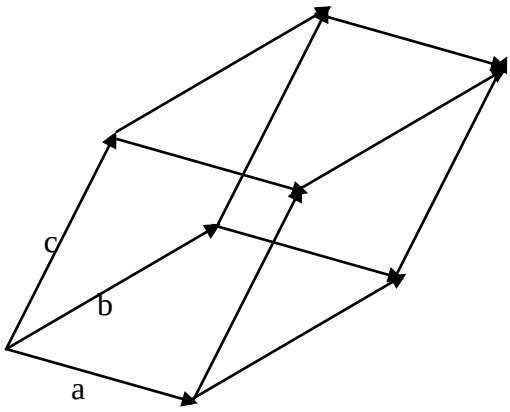
Si tomamos un tercer vector *C* tal que en nuestro sistema de coordenadas sea *AxB=C*, podemos expresar el producto vectorial en forma tensorial así

$$\overline{C} = \overline{A} \times \overline{B} \rightarrow \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \Rightarrow M\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \left\{M\begin{pmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix}M^T\right\}M\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} C'_x \\ C'_y \\ C'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A'_z & A'_y \\ A'_z & 0 & -A'_x \\ -A'_y & A'_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} \rightarrow \overline{C'} = \overline{A'} \times \overline{B'}$$

y por tanto si C es el producto vectorial de A y B en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales S y transformamos estos vectores al sistema S' girado respecto del anterior según la matriz M; entonces los vectores transformados en S' siguen relacionados por la operación del producto vectorial.

Producto mixto, triple producto vectorial y vectores superficie.



El dibujo representa un paralelepípedo generado por los vectores *(a,b,c).* Podemos asociar un vector área *S* haciendo el producto vectorial de los vectores a y b. El volumen V será el área S multiplicado por la altura vertical a S del paralelepípedo. El lector puede comprobar que esto corresponde a la expresión del producto mixto

$$\overline{S} = \overline{a} \times \overline{b} \;\; ; \;\; V = \overline{c} \bullet \overline{S} = \overline{c} \bullet \left(\overline{a} \times \overline{b}\right)$$

Evidentemente, si giramos el paralelepípedo y cambiamos los vectores en el plano base el volumen debe mantenerse igual, de modo que encontramos estas relaciones

$$\boxed{\bar{c}\bullet\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\bar{a}\bullet\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\bar{b}\bullet\left(\bar{c}\times\bar{a}\right)}$$

note el lector que los vectores del producto vectorial que define la base mantienen un mismo orden de esta forma : sobre el plano base el giro del vector *a* al *b* , el giro del vector *b* al *c*, el giro del vector *c* al *a*; todos tienen el mismo sentido anti-horario.

Si ahora consideramos el siguiente producto escalar tenemos

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\bullet\left[\bar{c}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right]=\bar{c}\bullet\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right]=0$$

y por tanto el triple producto vectorial es un vector perpendicular a *axb*; es decir es un vector contenido en el plano de los vectores *a* y *b* y que puede expresarse como combinación lineal de ellos

$$\bar{c}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}$$

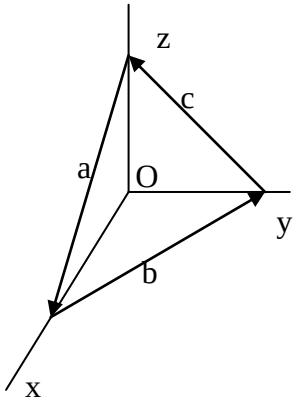
Si multiplicamos este resultado escalarmente por el vector *c* y aplicamos las propiedades del producto mixto tenemos

$$\bar{c}\bullet\left[\bar{c}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right]=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\bullet\left[\bar{c}\times\bar{c}\right]=0=\alpha\bar{c}\bullet\bar{a}+\beta\bar{c}\bullet\bar{b}\Rightarrow$$
$$\bar{c}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\lambda\left\{\left(\bar{c}\bullet\bar{b}\right)\bar{a}-\left(\bar{c}\bullet\bar{a}\right)\bar{b}\right\}$$

donde *λ* es un escalar no determinado aún. Sin embargo si el lector realiza los cálculos en componentes para los dos lados de la igualdad anterior puede ver rápidamente que *λ =1* y la fórmula del triple producto vectorial es

$$\boxed{\begin{pmatrix}0 & -c_z & c_y\\ c_z & 0 & -c_x\\ -c_y & c_x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{pmatrix}=\left[c_xb_x+c_yb_y+c_zb_z\right]\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix}-\left[c_xa_x+c_ya_y+c_za_z\right]\begin{pmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\bar{c}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\left(\bar{c}\bullet\bar{b}\right)\bar{a}-\left(\bar{c}\bullet\bar{a}\right)\bar{b}}$$



El dibujo representa un triángulo vectorial arbitrario de vectores *(a,b,c)* y un sistema de coordenadas dispuesto de forma que nos permite ver fácilmente las componentes cartesianas de cada vector. Un vector superficie asociado a este triángulo vectorial se puede definir por medio del producto vectorial como

$$\bar{S}=\frac{1}{2}\bar{a}\times\bar{b}$$

si indicamos por u_x,u_y,u_z los vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados cartesianos, podemos encontrar la componente del vector superficie en la dirección u_y

$$S_y = \bar{S} \bullet \bar{u}_y = \frac{1}{2}\left[\left(a_x \bar{u}_x + a_z \bar{u}_z\right) \times \left(b_x \bar{u}_x + b_y \bar{u}_y\right)\right] \bullet \bar{u}_y$$

aplicando la regla de ciclo del producto mixto tenemos

$$S_y = \frac{1}{2}\left[\left(a_x \bar{u}_x + a_z \bar{u}_z\right) \times \left(b_x \bar{u}_x + b_y \bar{u}_y\right)\right] \bullet \bar{u}_y = \frac{1}{2}\left[\left(b_x \bar{u}_x + b_y \bar{u}_y\right) \times \bar{u}_y\right] \bullet \left(a_x \bar{u}_x + a_z \bar{u}_z\right) = \frac{1}{2} b_x \bar{u}_z \bullet \left(a_x \bar{u}_x + a_z \bar{u}_z\right)$$

$$\Rightarrow S_y = \frac{1}{2} b_x a_z = \frac{1}{2}\left|b_x a_z\right|; b_x < 0, a_z < 0$$

es decir, la componente del vector superficie S en la dirección del eje *<y>* corresponde a al área de la proyección ortogonal de la superficie S del triángulo vectorial *(a,b,c*) sobre el plano coordenado normal a la dirección *<y>.* Evidentemente encontraremos lo mismo para el resto de las componentes y finalmente podemos generalizar que cualquier superficie plana puede representarse mediante un vector cuyas componentes corresponden a la proyección ortogonal de dicha superficie sobre los correspondientes planos coordenados *<y,z>*, *<z,x>* y *<x,y>*.

Ejes principales del tensor de inercia.Diagonalización.

Supongamos un sistema de coordenadas *principal* en el que el tensor de inercial de un sólido resulta estar diagonalizado. Si la velocidad angular del sólido está en uno de los ejes de este sistema de coordenadas entonces el momento angular y la velocidad angular resultan ser vectores paralelos. Dividiendo por el módulo de la velocidad angular podemos formalizar esto con las siguientes relaciones

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_{xx}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I_{yy}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I_{zz}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando una relación cualquiera de las anteriores podemos aplicarle una matriz de giro *M* y ver como se comporta el resultado en otro sistema de coordenadas

$$M\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ M\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} M^T \right\} M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_{xx} M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde utilizamos que para una matriz de giro *M* la traspuesta es igual a la inversa $M^T = M^{-1}$ y las propiedades de asociatividad del producto de matrices. El resultado es que se mantiene la misma relación en el nuevo sistema de coordenadas

$$\begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = I_{xx}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \; ; \; M\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}M^T = \begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz} \end{pmatrix} \; ; M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Note el lector que el factor escalar I_{xx} se sigue manteniendo en el cambio de sistema de coordenadas y corresponde con la componente correspondiente en el sistema de coordenadas principal. De este modo podemos plantear la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = I_i\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \; ; i = 1,2,3$$

donde el índice numera las tres componentes del tensor de inercia en el sistema de coordenadas principal. Podemos poner esta ecuación en forma matricial de este modo

$$\begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = I_i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I'_{xx}-I_i & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy}-I_i & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz}-I_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El resultado es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. La solución trivial corresponde al vector $(a_x,a_y,a_z)=(0,0,0)$. Pero deben existir soluciones no triviales correspondientes a los ejes del sistema de coordenadas principal. Para que esto sea posible, según la teoría de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el determinante de la matriz debe ser nulo

$$\det\begin{pmatrix} I'_{xx}-I_i & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy}-I_i & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz}-I_i \end{pmatrix} = 0$$

esta ecuación conduce a una ecuación cúbica en I_i que debe tener 3 soluciones reales correspondientes a las componentes del tensor de inercia en el sistema de coordenadas principal. Si los componentes I' son simétricos $(I'_{xy}=I'_{yx};\ldots)$ el correspondiente determinante Δ de la ecuación cúbica asegura que las tres soluciones de la ecuación son reales si $\Delta \geq 0$

$$aI_i^3 + bI_i^2 + cI_i + d = 0 \; ; \; \Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 27a^2d^2$$

<u>*Formas cuadráticas*</u>

Una forma cuadrática f_c en las variables (x,y,z) es una función que podemos expresar, sin pérdida de generalidad, de esta forma

$$f_c(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2a\,xy + 2b\,xz + 2c\,yz$$

Los valores *A,B,C,a,b,c* son constantes arbitrarias y las variables *(x,y,z)* de la forma cuadrática pueden ser cualquier cosa : tiempos, distancias, ángulos, masas, aceleraciones…de ahí el nombre tan abstracto de las formas cuadráticas:

-La segunda aproximación de la serie de Taylor de una función de varias variables es una forma cuadrática.
-La métrica de la teoría de superficies de Gauss es una forma cuadrática.

Sin embargo la forma cuadrática admite una interpretación geométrica directa y utilizando el álgebra de matrices podemos expresar cualquier forma cuadrática como el producto escalar de dos vectores

$$f_c(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} A & a & b \\ a & B & c \\ b & c & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Con esta interpretación geométrica podemos expresar la forma cuadrática en otro sistema de coordenadas *(x',y',z')* que formalmente esté relacionado con una matriz de giro *M* respecto del sistema de coordenadas *(x,y,z)*

$$f_c(x,y,z) = (x',y',z')M^T\begin{pmatrix} A & a & b \\ a & B & c \\ b & c & C \end{pmatrix}M\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} ; (x,y,z) = (x',y',z')M^T$$

$$f_c(x,y,z) = f_c(x',y',z') = (x',y',z')\begin{pmatrix} A' & a' & b' \\ a' & B' & c' \\ b' & c' & C' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} A' & a' & b' \\ a' & B' & c' \\ b' & c' & C' \end{pmatrix} = M^T\begin{pmatrix} A & a & b \\ a & B & c \\ b & c & C \end{pmatrix}M$$

El carácter invariante del producto escalar nos permite mantener el valor de la forma cuadrática en el cambio de coordenadas. De esta forma podemos simplificar una forma cuadrática buscando un sistema de coordenadas *(x',y',z')* en que el tensor correspondiente a la forma cuadrática sea diagonal y *a´=0, b´=0, c´=0*.

La energía cinética de rotación de un sólido rígido respecto de su centro de masas es una forma cuadrática ya que se puede poner de la forma

$$2E_{total}^{CM}(t) = \overline{w}(t) \bullet \overline{L}_{total}^{CM}(t) = \left(w_x, w_y, w_z\right)\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

donde el tensor de inercia es simétrico. La energía cinética de rotación depende en general del tiempo, por lo que la velocidad angular y los coeficientes del tensor de inercia también dependen del tiempo. Sin embargo en cualquier instante *t* determinado podemos hacer un cambio a un nuevo sistema de coordenadas en que el tensor de inercia sea diagonal. La forma cuadrática asegura que el valor de la energía cinética de rotación en el nuevo sistema de coordenadas sigue siendo, en el mismo instante *t*, el mismo valor de la energía que en el sistema de coordenadas centro de masas. Esto es un requisito físico necesario, ya que el sistema de coordenadas centro de masas y el nuevo sistema de coordenadas están en reposo relativo instantáneo.

Otro ejemplo de forma cuadrática es el producto escalar en el espacio de Minkowski de la relatividad. Si *a,b* son dos cuadrivectores en el espacio de Minkowski expresados en la base canónica, el producto escalar se define mediante la forma cuadrática siguiente

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 & a^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ b^4 \end{pmatrix} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 - a^4 b^4$$

donde la cuarta componente corresponde al eje temporal del espacio de Minkowski. Esta cuarta componente temporal difiere en unidades de las componentes espaciales, por lo que para igualar las unidades o bien se multiplica la cuarta componente por la velocidad de la luz en el vacío o bien se multiplican las otras tres

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 & a^4 \end{pmatrix} \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 & c\,a^4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c\,a^1 & c\,a^2 & c\,a^3 & a^4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

por ejemplo para el cuadrivector posición-tiempo la componente temporal se multiplica por *c* y para el cuadrivector energía-impulso son las tres componentes de impulso las que se multiplican por *c*. Dicho esto, podemos calcular las componentes de los vectores respecto de cualquier otro sistema de coordenadas inercial en movimiento relativo uniforme utilizando la transformación de Lorentz *M*. En caso de dos sistemas de coordenadas que mantienen sus ejes espaciales paralelos y se mueve relativamente sobre el eje espacial *x* común la transformación *M* es

$$M(v) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} ; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \beta = \frac{v}{c}$$

Vemos inmediatamente que se trata de una matriz simétrica y por tanto coincide con su traspuesta $M(v)= M^T(v)$. Por otro lado si hacemos $v \rightarrow -v$ obtenemos la matriz inversa : $M(-v)=M^{-1}(v)$. Con estos antecedentes podemos ver el carácter invariante del producto escalar

$$\bar{a}\bullet\bar{b}=\begin{pmatrix}a^1 & a^2 & a^3 & a^4\end{pmatrix}M^T\left\{\left[M^T\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}M^{-1}\right\}M\begin{pmatrix}b^1\\b^2\\b^3\\b^4\end{pmatrix}$$

en los extremos de la expresión reconocemos los cuadrivectores fila (a la izquierda) y columna (a la derecha) transformados en el nuevo sistema de coordenadas. En el centro tenemos el tensor asociado a la forma cuadrática en el nuevo sistema de coordenadas. Si lo calculamos resulta

$$\begin{pmatrix}\gamma&0&0&\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma&0&0&\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma&0&0&\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\gamma\beta&0&0&-\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

si identificamos los vectores en el nuevo sistema de coordenadas como *a',b'* tenemos

$$\bar{a}\bullet\bar{b}=\begin{pmatrix}a^1 & a^2 & a^3 & a^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^1\\b^2\\b^3\\b^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^1 & a^2 & a^3 & a^4\end{pmatrix}M^T\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}b^1\\b^2\\b^3\\b^4\end{pmatrix}=\bar{a}'\bullet\bar{b}'$$

y por tanto la definición dada para el producto escalar en el espacio de Minkowski verifica el carácter invariante entre sistemas de coordenadas inerciales. Si designamos por η el tensor asociado al producto escalar tenemos que su cuadrado η^2 es el tensor identidad, de modo que tenemos

$$\eta\begin{pmatrix}a'^1\\a'^2\\a'^3\\a'^4\end{pmatrix}=\left\{\eta\begin{pmatrix}\gamma&0&0&-\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}\eta\right\}\eta\begin{pmatrix}a^1\\a^2\\a^3\\a^4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix}a'_1\\a'_2\\a'_3\\a'_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\eta\begin{pmatrix}a^1\\a^2\\a^3\\a^4\end{pmatrix}\Rightarrow\eta\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^1\\a^2\\a^3\\a^4\end{pmatrix}\end{cases}$$

las componentes con subíndices se denominan componentes covariantes y son una representación alternativa del mismo vector de componentes contra-variantes con super-índices. Las componentes covariantes de un vector cambian entre sistemas de coordenadas inerciales según la transformación de Lorentz inversa : *M(-v)* y las componentes contravariantes del mismo vector cambian entre sistemas de coordenadas inerciales según la transformación de Lorentz directa : *M(v)*. Utilizando estas componentes podemos poner el producto escalar como

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 & a^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ b^4 \end{pmatrix} = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 + a^4 b_4$$

El desarrollo del cálculo vectorial clásico tridimensional necesita una referencia a una base vectorial ortonormal cartesiana euclídea. Un desarrollo similar del cálculo vectorial que incluya la relatividad especial requiere que la referencia sea una base ortonormal cuatridimensional en el espacio de Minkowsky. Una diferencia llamativa de estos dos espacios es que una base ortonormal cartesiana tridimensional coincide con su base dual contra-variante (véase el trabajo sobre mecánica de fluidos); mientras que en el espacio de Minkowski una base cuatridimensional ortonormal tiene asociada una base dual contra-variante diferente debido al comportamiento de la coordenada tiempo. El lector puede comprobar esto a partir de lo expuesto en el trabajo sobre mecánica de fluidos en la sección del apéndice sobre bases covariantes y contravariantes.

El tensor velocidad angular.

Podemos revisar de una forma mas general la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}}\,\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

en el texto la matriz M corresponde a un caso particular en que el eje de rotación instantáneo coincide con el eje z. La expresión anterior indica que la posición del eje instantáneo de rotación puede ser cualquiera. Continuamos con la siguiente transformación

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\left(\overline{\overline{M}}^{-1}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}}\,\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

de esta forma introducimos la matriz inversa asociada al giro correspondiente. Las componentes de la matriz M de giro son los cosenos de los ángulos formados entre los vectores base unitarios y ortogonales de los sistemas de coordenados relacionados: $D(b_i)$ y $A(b`_i)$; o de forma equivalente el producto escalar correspondiente. Evidentemente la matriz inversa M^{-1} es también una matriz de giro y las componentes de esta matriz también se calculan de la misma forma, por medio del producto escalar de los vectores base de A y D. Esto introduce una simetría que hace que M y M^{-1} sean matrices traspuestas:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\overline{M}} \equiv m_{ij} = \bar{b}_i \bullet \bar{b}'_j \\ \overline{\overline{M}}^{-1} \equiv m^{-1}{}_{ij} = \bar{b}'_i \bullet \bar{b}_j = m_{ji} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{\overline{M}}^{-1} = \overline{\overline{M}}^{T} \;;\; \overline{\overline{M}}\,\overline{\overline{M}}^{T} \equiv \overline{\overline{I}} \Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\overline{\overline{M}}^{T} + \overline{\overline{M}}\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}^{T}\right) = \overline{\overline{0}}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\overline{\overline{M}}^{T} = -\overline{\overline{M}}\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)^{T} = -\left(\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\overline{\overline{M}}^{T}\right)^{T}$$

donde hemos aplicado las propiedades de transposición de un producto de matrices y que las operaciones de transposición y derivada en el tiempo pueden cambiar de orden en cualquier caso. El resultado es que la matriz correspondiente es antisimétrica, y podemos tomar la forma

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\left(\overline{\overline{M}}^{-1}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}\equiv \overline{w}\times$$

vemos que la expresión inicial queda, utilizando el producto vectorial, así

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\overline{w}\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\overline{\overline{M}}\,\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}; \qquad \overline{w}=(w_x, w_y, w_z)$$

de modo que la velocidad angular de un sólido rígido corresponde matemáticamente con un tensor antisimétrico y que por medio de la operación producto vectorial podemos manejar, de forma mas intuitiva, como un vector.

Un cálculo sencillo para nuestro caso de giro respecto del eje z recupera el resultado ya obtenido

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\left(\overline{\overline{M}}^{-1}\right)=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\begin{pmatrix} -sen(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos imaginar un giro completo como la composición de tres giros elementales sobre los ejes coordenados. Por ejemplo, primero giramos el sistema un ángulo φ_z respecto del eje z. Como consecuencia los ejes [y, x] habrán cambiado de posición. Tomamos el nuevo eje y' girando $\varphi_{y'}$ respecto a dicho eje. Finalmente hacemos lo mismo girando $\varphi_{x''}$ respecto al nuevo eje x''. El giro completo corresponde con la siguiente matriz

$$M = M(\varphi_{x''})M(\varphi_{y'})M(\varphi_z)$$

$$M(\varphi_z)=\begin{pmatrix} \cos(\varphi_z) & -sen(\varphi_z) & 0 \\ sen(\varphi_z) & \cos(\varphi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ M(\varphi_{y'})=\begin{pmatrix} \cos(\varphi_{y'}) & 0 & sen(\varphi_{y'}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\varphi_{y'}) & 0 & \cos(\varphi_y') \end{pmatrix};\ M(\varphi_{x''})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_{x''}) & -sen(\varphi_{x''}) \\ 0 & sen(\varphi_{x''}) & \cos(\varphi_{x''}) \end{pmatrix}$$

podemos calcular el tensor velocidad angular como

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\left(\overline{\overline{M}}^{T}\right)=$$

$$\left[\left(\frac{d}{dt}M(\varphi_{x''})\right)M(\varphi_{y'})M(\varphi_z)+M(\varphi_{x''})\left(\frac{d}{dt}M(\varphi_{y'})\right)M(\varphi_z)+M(\varphi_{x''})M(\varphi_{y'})\left(\frac{d}{dt}M(\varphi_z)\right)\right]\left[M^T(\varphi_z)M^T(\varphi_{y'})M^T(\varphi_{x''})\right]=$$

$$\left[\left(\frac{d}{dt}M(\varphi_{x''})\right)M^T(\varphi_{x''})\right]+M(\varphi_{x''})\left[\left(\frac{d}{dt}M(\varphi_{y'})\right)M^T(\varphi_{y'})\right]M^T(\varphi_{x''})+M(\varphi_{x''})M(\varphi_{y'})\left[\left(\frac{d}{dt}M(\varphi_z)\right)M^T(\varphi_z)\right]M^T(\varphi_{y'})M^T(\varphi_{x''})$$

El primer sumando del resultado final corresponde al tensor velocidad angular asociado al giro respecto del eje x'', en el sistema de coordenadas final. El segundo sumando es la transformación al sistema de coordenadas final del tensor velocidad angular asociado al giro en el eje y'. El tercer sumando es la transformación del tensor velocidad angular asociado al giro respecto del eje z al sistema de coordenadas final. La linealidad de la expresión permite expresar el resultado así

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\left(\overline{\overline{M}}^{T}\right) \equiv \overline{w}_{total}\times \equiv \left(\overline{w}_{x''}\times \;+\; \overline{w}_{y'}\times \;+\; \overline{w}_{z}\times\right) \equiv \left(\overline{w}_{x''} + \overline{w}_{y'} + \overline{w}_{z}\right)\times$$

que está de acuerdo con la idea de linealidad de la velocidad angular.

Finalmente, el tensor velocidad angular puede aparecer en cualquier contexto en que un vector *C* se proyecte geométricamente sobre las coordenadas de otro sistema que está en giro relativo según la matriz *M(t)* formando el vector *C'*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \overline{w}\times\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} + \overline{\overline{M}}\,\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C_{x'} \\ C_{y'} \\ C_{z'} \end{pmatrix}; \qquad \overline{w}\times \equiv \left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\left(\overline{\overline{M}}^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}$$

el término asociado a la velocidad angular está relacionado con el cambio de orientación del sistema de coordenadas en el tiempo; una idea similar se incluye en el concepto matemático de *derivada covariante*. Si asumimos que *C* es un vector de módulo constante y que en el sistema primado el vector *C'* se mantiene instantáneamente (o puntualmente) constante en módulo y dirección, tenemos para una pequeña variación

$$\boxed{d\overline{C} = \overline{d\theta}\times\overline{C} \;\Rightarrow\; \overline{C}\bullet d\overline{C} = \frac{1}{2}d\overline{C}^{2} = 0 \Rightarrow \overline{C}^{2} = const}$$

donde *dθ* es una variación angular diferencial en la dirección del eje instantáneo (o puntual) de rotación. Esta expresión se puede aplicar formalmente a un vector *C* de módulo constante tanto para *variaciones temporales* como para *variaciones espaciales*; como es en general el caso de los vectores unitarios asociados a la base covariante en geometría diferencial.

Note el lector que el determinante de una matriz antisimétrica *3x3* es nulo y por tanto no existe la correspondiente matriz inversa. Esto no es cierto para una matriz antisimétrica *2x2*. En general una matriz antisimétrica *nxn* tiene determinante nulo si *n* es impar. El lector puede ver un análisis del problema de las matrices de giro en la referencia [4].

Formulación de la cinemática utilizando vectores.

Hemos desarrollado la cinemática entre dos sistemas de coordenadas cartesianos en movimiento relativo y que mantienen un origen común (sistemas A y D) utilizando la transformación matricial entre puntos propios de los dos sistemas de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overline{\overline{M}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix};$$

donde las coordenadas primadas se miden en el sistema móvil y las no primadas en el sistema fijo. La relación anterior se escribe así en términos vectoriales

$$\bar{r} = \bar{r}' \quad \equiv \quad x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z = x'\bar{e}_{x'} + y'\bar{e}_{y'} + z'\bar{e}_{z'}$$

donde los vectores *e* corresponden a los vectores base unitarios en el sistema fijo y en el sistema móvil. Físicamente la identidad de este vector, independiente del sistema de coordenadas, se puede entender por qué es una flecha recta que une dos *puntos físicos* determinados : el origen de coordenadas y el punto móvil. La igualdad anterior tiene, del lado izquierdo, un vector expresado en el sistema de coordenadas fijo, y del lado derecho el mismo vector expresado en el sistema de coordenadas móvil. Si derivamos en el tiempo la expresión anterior tenemos

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\bar{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\bar{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\bar{e}_{z'} \right) + \left(x'\frac{d\bar{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\bar{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\bar{e}_{z'}}{dt} \right)$$

del lado izquierdo tenemos la velocidad de la partícula en el sistema fijo y del lado derecho una composición de dos términos, el primero de los cuales es la velocidad de la partícula medida en el sistema móvil. El otro término depende del movimiento de los vectores base del sistema de coordenadas móvil. Por el teorema de Euler sabemos que este movimiento corresponde, instantáneamente, a un giro de velocidad angular *ω* para todo el sistema de coordenadas móvil, de modo que tenemos

$$\frac{d\bar{e}_{x'}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{e}_{x'};\ \frac{d\bar{e}_{y'}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{e}_{y'};\ \frac{d\bar{e}_{z'}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{e}_{z'}; \Rightarrow \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\bar{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\bar{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\bar{e}_{z'} \right) + \bar{\omega} \times \bar{r}'$$

$$\bar{r} = \bar{r}' \Rightarrow \frac{d\bar{r}}{dt} - \bar{\omega} \times \bar{r} = \left(\frac{dx'}{dt}\bar{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\bar{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\bar{e}_{z'} \right)$$

podemos leer el último resultado como la expresión del mismo vector en el sistema de coordenadas fijo (término izquierda) y el sistema de coordenadas móvil (término derecha). En consecuencia la segunda derivada con el tiempo de la expresión anterior será

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} - \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} - \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\bar{e}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\bar{e}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\bar{e}_{z'} \right) + \bar{\omega} \times \left(\frac{dx'}{dt}\bar{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\bar{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\bar{e}_{z'} \right)$$

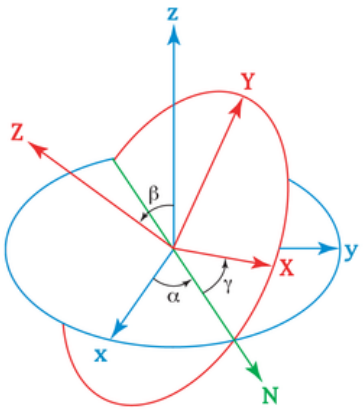
donde podemos eliminar el valor *dr/dt* calculado anteriormente de esta forma

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}-\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}-\bar{\omega}\times\left[\left(\frac{dx'}{dt}\bar{e}_{x'}+\frac{dy'}{dt}\bar{e}_{y'}+\frac{dz'}{dt}\bar{e}_{z'}\right)+\bar{\omega}\times\bar{r}'\right]=\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\bar{e}_{x'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\bar{e}_{y'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\bar{e}_{z'}\right)+\bar{\omega}\times\left(\frac{dx'}{dt}\bar{e}_{x'}+\frac{dy'}{dt}\bar{e}_{y'}+\frac{dz'}{dt}\bar{e}_{z'}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\left[\bar{\omega}\times\bar{r}\right]+2\bar{\omega}\times\left(\frac{dx'}{dt}\bar{e}_{x'}+\frac{dy'}{dt}\bar{e}_{y'}+\frac{dz'}{dt}\bar{e}_{z'}\right)+\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\bar{e}_{x'}+\frac{d^2y'}{dt^2}\bar{e}_{y'}+\frac{d^2z'}{dt^2}\bar{e}_{z'}\right)$$

El lector puede comprobar que este resultado corresponde con el de la sección 5 del título sobre cinemática.

Los ángulos de Euler



La imagen adjunta representa la disposición de dos sistemas de coordenadas ortogonales : un sistema fijo (x,y,z) en azul y un sistema rotante (X,Y.Z) en rojo. Salvo la ligadura de compartir el origen de coordenadas, la posición relativa de los ejes de los dos sistemas de coordenadas es arbitraria. Los ángulos de Euler, representados en la imagen como (α,β,γ), son valores que se pueden asociar a giros mediante los que se puede describir el cambio de orientación relativo entre los ejes de los dos sistemas de coordenadas. Dicho de otra forma, asociado los valores (α,β,γ) a los correspondientes ejes de rotación es posible hacer coincidir, hasta la identidad, los dos sistemas de coordenadas relacionados. El proceso seguido es el siguiente:

1-Eje de rotación el eje Z mayúscula. Se gira el sistema (X,Y,Z) en un valor -γ hasta que el eje X coincida con la línea N, denominada también línea de nodos. Como resultado habrán cambiado los ejes (X,Y) (no el Z) por lo que podemos nombrar el nuevo sistema de coordenadas como (X',Y',Z) después del giro.
Según la imagen, la línea N es la intersección de los planos asociados a los ejes (x,y) y (X,Y). En el caso de la peonza este giro corresponde con la rotación respecto del sistema centro de masas.

2-Eje de rotación X' mayúscula = N. El lector puede ver que los ejes Z mayúscula y z minúscula son perpendiculares a N, ya que N está en la intersección de los planos (x,y) y (X',Y'). Por tanto si giramos un valor -β tomando como eje de rotación N haremos coincidir los ejes Z mayúscula y z minúscula. El sistema de coordenadas resultante modifica los ejes Z ,Y', por lo que podemos nombrarle como (X',Y'',Z'=z). Note el lector que en este paso los ejes X', Y'' acaban estando en el plano(x,y). En el caso de la peonza este giro corresponde a la nutación.

3-Eje de rotación Z' = z . Este eje es perpendicular al plano (x,y) , de modo que girando un valor –α respecto de este eje hacemos coincidir los ejes X' mayúscula y x minúscula. Dado que el giro se produce en el plano (x,y), necesariamente resulta que el eje Y'' llega a coincidir con el eje y; y finalmente los ejes de los dos sistemas de coordenadas coinciden. En el caso de la peonza este giro corresponde a la precesión.

Evidentemente podemos llevar a cabo el proceso en orden inverso y desplazar el sistema de coordenadas (X,Y,Z) a cualquier configuración arbitraria respecto de (x,y,z) y que mantenga el origen de coordenadas.

La matriz de transformación que necesitamos transforma vectores del sistema rotante al sistema fijo : *M(rotante-XYZ)→fijo-xyz* . En términos de matrices la transformación en función de los ángulos de Euler es la siguiente :

$$M(-\gamma)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{pmatrix} \rightarrow M(-\beta)M(-\gamma)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y'' \\ z \end{pmatrix} \rightarrow M(-\alpha)M(-\beta)M(-\gamma)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$M = M(-\alpha)M(-\beta)M(-\gamma)$$

$$M(-\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -sen(\gamma) & 0 \\ sen(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; M(-\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -sen(\beta) \\ 0 & sen(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}; \; M(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

a partir de aquí el lector puede calcular la velocidad angular relativa en términos de los ángulos de Euler utilizando la fórmula

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{\overline{M}}\right)\left(\overline{\overline{M}}^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta'\cos(\alpha) + \gamma' sen(\beta) sen(\alpha) \\ \beta' sen(\alpha) - \gamma' sen(\beta)\cos(\alpha) \\ \alpha' + \gamma'\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

las variables primadas son las correspondientes derivadas temporales y el vector velocidad angular está en el sistema de coordenadas fijo. Aunque los ángulos de Euler indican una descomposición del movimiento en varios giros, el teorema de la rotación nos dice que esta descomposición es equivalente a un giro respecto de un único eje instantáneo de rotación.

Podemos asociar los giros descritos al principio con componentes lineales de la velocidad angular que, proyectadas sobre el sistema (x,y,z) y sumados vectorialmente proporcionan un resultado coherente con el anterior para las componentes netas de la velocidad angular:

$$\overline{w} = \gamma'\overline{Z} + \beta'\overline{N} + \alpha'\overline{z}$$

donde los vectores del segundo miembro son vectores unitarios y verifican, según el dibujo anterior de los ángulos de Euler

$$\overline{N} = \cos(\alpha)\overline{x} + sen(\alpha)\overline{y} \; ; \quad \overline{Z} = \cos(\beta)\overline{z} + sen(\beta)\overline{n} \; ; \; \overline{n} = sen(\alpha)\overline{x} - \cos(\alpha)\overline{y}$$

donde *n* es un vector unitario en la intersección de los planos *Z-z* , *x-y.* El ángulo de *n* con el vector *N* en el plano x-y es de 90 grados ya que N es perpendicular al plano *Z-z*.

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

El cálculo de los componentes del tensor de inercia puede ser mas sencillo en unos sistemas de coordenados que en otros. Puede ser mas sencillo este cálculo en un sistema de coordenadas cuyo origen no sea el centro de masas del sólido rígido. Sin embargo la teoría desarrollada requiere que las componentes del tensor de inercia se refieran al sistema de coordenadas centro de masas. Por tanto será útil encontrar una relación entre las componentes del tensor de inercia en dos sistemas de coordenadas diferentes.

El teorema de Steiner relaciona las componentes del tensor de inercia correspondientes al sistema de coordenadas centro de masas con las mismas componentes en otro sistema de coordenadas que esté desplazado según un vector r_0 ; de modo que los ejes de ambos sistemas de coordenadas sean paralelos. Tenemos por tanto, para cada componente del tensor de inercia en el sistema de coordenadas *distinto* al del centro de masas

$$I^{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta}\left[\bar{r}_i + \bar{r}_0\right]^2 - \left[x^\alpha{}_i + x^\alpha{}_0\right]\left[x^\beta{}_i + x^\beta{}_0\right])$$

donde r_i, x_i , son medidas referidas al centro de masas de la i-ésima partícula del sólido rígido y r_0, x_0 son los valores correspondientes del desplazamiento. Desarrollando la expresión tenemos

$$I^{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 + \delta_{\alpha\beta} r_0^2 - x_i^\alpha x_i^\beta - x_0^\alpha x_0^\beta) + \sum_i m_i (2\delta_{\alpha\beta}\bar{r}_i \bullet \bar{r}_0 - x_i^\alpha x_0^\beta - x_0^\alpha x_i^\beta)$$

debido a que el desplazamiento r_0 es un vector que no depende de la posición, es decir : o es constante o depende solo del tiempo, podemos factorizar en el segundo sumatorio los valores asociados al desplazamiento. Con esto obtenemos valores relacionados con la posición del centro de masas respecto del sistema de coordenadas centro de masas. Esto supone que el segundo sumatorio se anula y tenemos el siguiente resultado

$$I^{\alpha\beta} = \sum_i m_i (\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - x_i^\alpha x_i^\beta) + M\left(\delta_{\alpha\beta} r_0^2 - x_0^\alpha x_0^\beta\right) \Rightarrow$$

$$I^{\alpha\beta} = I_{CM}^{\alpha\beta} + M\left(\delta_{\alpha\beta} r_0^2 - x_0^\alpha x_0^\beta\right)$$

Expresión que relaciona las componentes del tensor de inercia en el centro de masas (CM) con las mismas componentes en otro sistema de coordenadas de ejes paralelos al sistema CM y desplazado en vector r_0.

El teorema de Steiner se refiere a un desplazamiento entre sistemas de coordenadas. En el caso de un giro entre sistemas de coordenadas que mantienen un punto origen común, aplicando lo visto para el caso de la velocidad angular la transformación la relación entre las componentes del tensor de inercia *I* en el sistema de coordenadas girado (sc-2) y el sistema coordenadas inicial (sc-1) verifican

$$I^{sc-2} = M\, I^{sc-1} M^T$$

donde *M* es la matriz que transforma los vectores del sistema de coordenadas 1 al sistema de coordenadas 2. Dado que el tensor de inercia es simétrico en todos los sistemas de coordenadas, vemos que el carácter simétrico de un tensor se mantiene a través de los cambios de coordenadas. Los tensores antisimétricos también mantienen su carácter antisimétrico en la transformación de coordenadas, como puede el lector demostrar fácilmente.

El objeto $\delta_{\alpha\beta}$ es realmente un tensor ya que verifica la ley de transformación de coordenadas para tensores

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix};\ \delta'_{\alpha\beta} = M(\delta_{\alpha\beta})M^T = M\begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}M^{-1} = MM^{-1} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix} = \delta_{\alpha\beta}$$

<u>*Traza del tensor de inercia.*</u>

La traza *Tr()* de un tensor es la suma de sus elementos diagonales. A partir de la definición de los componentes del tensor tenemos

$$I^{xx} = \sum_i m_i(r_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2),\ I^{yy} = ... \Rightarrow Tr(I) = I^{xx} + I^{yy} + I^{zz} = 2\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2\sum_i m_i r_i^2$$

el resultado es que la traza *Tr(I)* es un escalar independiente del sistema de coordenadas, por supuesto manteniendo su origen en el centro de masas. Por tanto podemos calcular *Tr(I)* en cualquier sistema de coordenadas, y utilizar el resultado para facilitar el cálculo de los componentes del tensor en el sistema de coordenadas que diagonaliza el tensor de inercia. Por ejemplo si es el caso en que $I^{xx} = I^{yy}$ tenemos $2I^{xx} + I^{zz} = Tr(I)$; con lo que calculando *Tr(I)* y un valor (I^{xx} *ó* I^{zz}) hemos calculado el tensor completo.

<u>*Energía mecánica y Lagrangiana de la peonza.*</u>

Recordemos la ley de conservación de la energía mecánica de un sólido rígido respecto del sistema inercial del laboratorio es

$$\boxed{\sum_i \int \overline{F}_i^{Externa} \bullet d\overline{r}_i = \Delta\left(\frac{1}{2}M(\overline{v}_{cm}^{LAB})^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\overline{v}_i^{CM})^2\right)}$$

El trabajo total de las fuerzas externas es igual a la variación de energía cinética del sólido rígido. La energía cinética tiene dos componentes : la energía cinética del centro de masas y la energía cinética respecto al centro de masas. Para el caso de la peonza podemos calcular este último término retomando el grupo de sistemas de coordenadas G en reposo relativo con el sistema centro de masas y en coincidencia instantánea con el sistema intrínseco de la peonza. Este grupo ya se utilizó en la deducción de las

ecuaciones de Euler. La energía cinética de rotación respecto al centro de masas será

$$E_{rotacion}^{CM} = \frac{1}{2}\overline{w}^{CM}(t) \bullet \overline{L}_{total}^{CM}(t) = \frac{1}{2}\left[T(t)\overline{w}^{G}(t)\right] \bullet \left[T(t)\overline{L}_{total}^{G}(t)\right] = \frac{1}{2}\overline{w}^{G}(t) \bullet \overline{L}_{total}^{G}(t)$$

donde se han utilizado las propiedades del producto escalar respecto a transformaciones ortogonales *T(t)* (giros). Dado que en el grupo de sistemas G el tensor de inercia es diagonal y considerando la simetría tenemos

$$E_{rotacion}^{CM} = \frac{1}{2}\left(I_{xx}^{G}\left[w^2{}_{Gx} + w^2{}_{Gy}\right] + I_{zz}^{G} w^2{}_{Gz}\right);\ I_{xx}^{G} = I_{yy}^{G}$$

Como hemos visto en la sección anterior podemos expresar la velocidad angular mediante los ángulos de Euler (α,β,γ) entre el sistema de coordenadas S y el sistema de coordenadas centro de masas. Sin embargo necesitamos ahora *proyectar* la velocidad angular medida respecto del sistema de coordenads fijo *sobre* en el sistema de coordenadas en giro. Esto supone que debemos utilizar la matriz inversa a la matriz *M(rotante)→fijo*; es decir M^T*(fijo) →rotante*; ya que al ser M una matriz de giro su inversa es igual a su traspuesta. Por tanto debemos utilizar la matriz

$$M^T = \left[M(-\alpha)M(-\beta)M(-\gamma)\right]^T = M^T(-\gamma)M^T(-\beta)M^T(-\alpha) = M(\gamma)M(\beta)M(\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} w_{Gx} \\ w_{Gy} \\ w_{Gz} \end{pmatrix} = M(\gamma)M(\beta)M(\alpha)\begin{pmatrix} \beta'\cos(\alpha) + \gamma' sen(\beta) sen(\alpha) \\ \beta' sen(\alpha) - \gamma' sen(\beta)\cos(\alpha) \\ \alpha' + \gamma'\cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta'\cos(\gamma) + \alpha' sen(\beta) sen(\gamma) \\ -\beta' sen(\gamma) + \alpha' sen(\beta)\cos(\gamma) \\ \gamma' + \alpha'\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Alternativamente podemos utilizar el análisis vectorial visto antes para la velocidad angular y expresar los vectores correspondientes en función de los vectores base del sistema en giro (*X,Y,Z*)

$$\overline{w} = \gamma'\overline{Z} + \beta'\overline{N} + \alpha'\overline{z}$$

$$\overline{N} = \cos(\gamma)\overline{X} - sen(\gamma)\overline{Y}\ ;\quad \overline{z} = \cos(\beta)\overline{Z} + sen(\beta)\overline{n'}\ ;\ \overline{n'} = sen(\gamma)\overline{X} + \cos(\gamma)\overline{Y}$$

donde *n'* es un vector unitario en la intersección de los planos *Z-z* , *X-Y.*
Finalmente la energía de rotación queda

$$E_{rotacion}^{CM} = \frac{1}{2}\left(I^{xx}\left[\left(\beta'\cos(\gamma) + \alpha' sen(\beta) sen(\gamma)\right)^2 + \left(\beta' sen(\gamma) - \alpha' sen(\beta)\cos(\gamma)\right)^2\right] + I^{zz}\left(\gamma' + \alpha'\cos(\beta)\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow E_{rotacion}^{CM} = \frac{1}{2}\left(I^{xx}\left[(\beta')^2 + \left(\alpha' sen(\beta)\right)^2\right] + I^{zz}\left[\alpha' + \gamma'\cos(\beta)\right]^2\right)$$

En la parte de fuerzas externas tenemos que el trabajo realizado por las fuerzas de contacto del suelo con el extremo de la peonza son nulas al carecer de desplazamiento. Por tanto solamente queda el trabajo asociado a la gravedad, que como sabemos puede ponerse como la variación de energía potencial del centro de masas y la energía cinética del centro de masas E_k^{CM}.

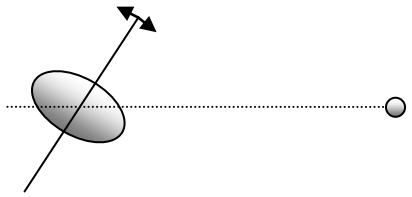
De esta forma podemos aproximar el principio de conservación de la energía *E* por

$$E = \frac{1}{2}Mr^2\left[(\beta')^2 + (\alpha' sen(\beta))^2\right] + \frac{1}{2}\left(I^{xx}\left[(\beta')^2 + (\alpha' sen(\beta))^2\right] + I^{zz}\left[\alpha' + \gamma'\cos(\beta)\right]^2\right) + Mgr\cos(\beta)$$

donde del primer sumando corresponde a la energía cinética del centro de masas[6]. La altura del centro de masas respecto al suelo se ha calculado a partir de la distancia del punto de contacto de la peonza al centro de masas (*r*) y el ángulo entre el eje *z* del sistema correspondiente de G y el eje z del sistema centro de masas; este último lo suponemos vertical, es decir, paralelo al campo gravitatorio. La función *Lagrangiana L (*no confundir con momento angular*),* como la diferencia entre energía cinética y energía potencial es

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma') = \frac{1}{2}\left(\left[Mr^2 + I^{xx}\right]\left[(\beta')^2 + (\alpha' sen(\beta))^2\right] + I^{zz}\left[\alpha' + \gamma'\cos(\beta)\right]^2\right) - Mgr\cos(\beta)$$

Note el lector que si prescindimos de la energía cinética del centro de masas obtenemos una función Lagrangiana muy similar y cuyo análisis debe incluir también los efectos de la precesión y la nutación.



Un caso similar ocurre en el caso del movimiento de nutación de la tierra. El dibujo representa la tierra en forma de elipsoide, muy exagerado, y su eje de rotación diurna en línea continua. En línea de puntos está el plano de la órbita alrededor del sol, representado como una pequeña esfera. Las flechas indican el movimiento de nutación del eje norte-sur terrestre. Se puede ver que las partes de la tierra mas cercanas al sol serán mas fuertemente atraídas que las mas lejanas, y la fuerza neta del sol sobre la tierra varía con el ángulo de nutación. De esta forma la tierra sufrirá ligeros acercamientos y alejamientos respecto al sol asociados al movimiento de nutación. De la misma forma que en el caso de la peonza, en la nutación hay un intercambio entre la energía potencial y la energía cinética de rotación. Además en el caso de la tierra la energía cinética de traslación del centro de masas E_k^{CM} de la tierra no depende de los ángulos de Euler, sino de variables independientes en la Lagrangiana y por tanto E_k^{CM} no influye en las ecuaciones asociadas a los ángulos de Euler derivadas de la función Lagrangiana; que son las ecuaciones que describen el movimiento de nutación. En el apéndice matemático de [8] sobre desarrollo multipolar se da una indicación sobre el cálculo del potencial gravitatorio de una distribución de masa en forma de elipse de revolución para un observador a larga distancia.

El resultado de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange[5] a la expresión anterior proporciona una descripción precisa del movimiento de la peonza como puede verse en textos clásicos como la Mecánica de Goldstein.

---

[6] según lo visto en el apéndice sobre los ángulos de Euler y en la discusión sobre la dinámica de la peonza.

Relatividad Especial : Orígenes de la idea de espacio-tiempo.

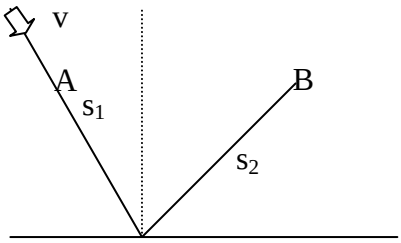
Medidas de longitud.

Cuando queremos medir la longitud de un objeto, generalmente le aplicamos una regla y primero hacemos que un extremo del objeto coincide con el cero y registramos el valor de la regla en el otro extremo. Este tipo de operación se extrapola a tres dimensiones en los sistemas de coordenadas cartesianas, donde los tres ejes perpendiculares son reglas de medición: la posición de un punto en el espacio corresponde al conjunto de tres mediciones en las tres reglas asociadas con los ejes de coordenadas. En física, los sistemas generalmente se estudian en movimiento y el enfoque clásico suponen que tanto si un objeto está en reposo o en movimiento, no hay diferencia en sus medidas.

Pero el desarrollo de los conceptos físicos demostró que debemos ser más sutiles en nuestras ideas. Para medir un objeto en movimiento necesitamos, además de una regla en reposo (sistema de coordenadas), dos relojes ubicados en reposo en los extremos del segmento medido. Esto es así porque se debe garantizar que las indicaciones de la regla se registren *simultáneamente*: cuando los dos relojes indican el mismo tiempo; de lo contrario, la medida incluiría un espacio adicional introducido por el movimiento del objeto. El lector puede pensar que un reloj es suficiente para objetos relativamente pequeños, pero esto no se cumple en el caso general para objetos de gran extensión. Por lo tanto, aparece el problema previo de garantizar que los relojes separados espacialmente que usamos estén sincronizados y marquen el mismo tiempo simultáneamente. Un proceso de sincronización puede ser así: desde uno de los relojes, lanzamos una pelota de masa insignificante que se mueve por inercia a velocidad constante ***s*** y rebota en el segundo reloj con velocidade ***-s***. Como conocemos la distancia entre los relojes y el tiempo de ida y vuelta hasta que alcanza de nuevo el primer reloj, podemos medir la velocidad ***s*** y, por lo tanto, ral epetir la misma experiencia, ajustar el segundo reloj para que marque la misma hora que el primero. Si los dos relojes se construyen de igual manera internamente y se encuentran en las mismas condiciones físicas externas, continuarán funcionando al mismo ritmo y se mantienen sincronizados en cualquier momento.

Óptica elemental

En la figura adjunta vemos un rayo de luz que pasa por el punto *A*, se refleja en un espejo en reposo (respecto al observador y su medio físico) y alcanza el punto *B*. Todos conocemos la ley de reflexión de un rayo de luz que cae sobre un espejo en reposo: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión y están en el mismo plano. Si consideramos la luz como un flujo de partículas, independientemente de su velocidad, vemos que la ley de reflexión se verifica si la velocidad es igual en el módulo antes y después del rebote; de



la misma manera que una pelota que rebota contra una pared masiva. Por otro lado, si la luz es un fenómeno ondulatorio y su velocidad depende del movimiento del foco hay problemas relacionados con los principios de *Fermat* y *Huygens*. Si la velocidad de la luz depende del movimiento del foco emisor, debemos considerar que, de acuerdo con el principio de Huygens, el espejo es un emisor secundario que está en reposo para el observador. Por lo tanto, las velocidades de los rayos incidente y reflejado serían diferentes en general. Si este es el caso ya que el foco emisor incidente se mueve con la velocidad ***v*** en la misma dirección que el rayo s_1, entonces el principio de Fermat, que exige un tiempo mínimo entre dos puntos cualquiera en la trayectoria de la luz, conduce a ángulos de incidencia y reflexión diferentes. De hecho, la diferencia en las velocidades $s_1 \neq s_2$ implica *refracción* en lugar de reflexión y diferentes índices de refracción para el mismo medio físico en reposo. Observe al lector que los telescopios reflectores están diseñados asumiendo que la ley del ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión en el espejo del telescopio se verifica exactamente. Además, en el caso astronómico, los emisores de luz son estrellas o galaxias que también se están moviendo y no hay indicios de ningún problema con respecto a la ley de la reflexión. La óptica elemental y el modelo ondulatorio de la luz nos lleva por tanto a la idea de que *la velocidad de la luz no depende del movimiento del foco*, sino solo de las características del medio en el que se encuentra la luz; incluyendo el posible movimiento de este medio con respecto al observador.

Esta conclusión está en sintonía con la interpretación electromagnética de la luz, que asigna a la luz una velocidad de propagación que depende completamente del medio; Medio que siempre se asume en reposo en la teoría electromagnética clásica. Si enrarecemos al límite el medio en el que la luz se propaga, como el aire atmosférico en nuestra experiencia habitual, alcanzaremos el vacío. El barómetro de *Torricelli* proporcionó el primer vacío experimental que confirmó experimentalmente que la luz se movía en el vacío; y el electromagnetismo predice también una velocidad de propagación de la luz en el vacío. Pero, ¿puede un observador determinar de algún modo que el vacío está en reposo o en movimiento? Por definición, el vacío es la ausencia de cualquier referencia física y, por lo tanto, es imposible medir un supuesto movimiento del vacío; y esto independientemente del estado de movimiento del observador: el vacío está igualmente vacío para cualquier observador. Si la velocidad de la luz en el vacío cambia entre observadores inerciales, esto se interpretaría como una medida del movimiento del vacío; y si esto es absurdo, la conclusión necesaria es que *la velocidad de la luz en el vacío es la misma para cualquier observador inercial.*

Espacio-Tiempo.

Imagine un segmento rígido con un foco en su centro que emite rayos en todas las direcciones. Si el segmento está en reposo y activamos el foco, la luz alcanzará los extremos del segmento al mismo tiempo: simultáneamente. Si el segmento se mueve en paralelo a su longitud y el foco se activa, entonces un extremo del segmento se mueve al encuentro de rayo de luz y el otro se aleja de su rayo de luz correspondiente. Como la velocidad de la luz es la misma en ambos casos, resulta que la luz no alcanza los extremos del segmento móvil al

mismo tiempo. El requisito de simultaneidad que hemos exigido en el caso de las mediciones espaciales resulta ser un concepto relativo al sistema de coordenadas inercial. Además, cualquier medición del tiempo de eventos separados espacial y temporalmente requiere la simultaneidad de relojes en reposo sincronizados y separados espacialmente. La pérdida de simultaneidad para cualquier otro observador en movimiento relativo asociado a una separación espacial es una parte componente del tiempo medido por ese observador. Hemos visto que las mediciones espaciales requieren necesariamente un sistema de relojes de reposo sincronizados incluso en la mecánica clásica. El principio de la constancia de la luz en el vacío es el otro lado de la moneda: las mediciones de tiempo también requieren una especificación espacial precisa.

Este es el camino utilizado por Einstein en su deducción de las transformaciones de Lorentz. De estas transformaciones se deduce que la regla clásica de la adición de velocidad utilizada en el caso de la pelota es válida solo para velocidades bajas con respecto a la velocidad de la luz. En cambio, la ley de composición de velocidades se modifica para velocidades cercanas a la de la luz. Para velocidades paralelas ***s, v*** medidas en el mismo sistema de coordenadas, la regla es

$$s' = \frac{s - v}{1 - \frac{sv}{c^2}}$$

donde ***c*** es la velocidad de la luz en el vacío. Si ***s=c*** es la velocidad de un rayo de luz emitido por un foco en reposo, un observador móvil con velocidad ***v*** lo percibirá con velocidad ***s'=c***; y, por lo tanto, la velocidad de la luz en el vacío es independiente del movimiento del foco emisor para cualquier observador. Esto también es aplicable a la luz considerada como flujo de partículas. El experimento de Michelson-Morley también plantea el problema de la ley de composición de velocidades para el caso de la luz. Además, las transformaciones de Lorentz fijan la idea de la necesidad del espacio-tiempo combinado para medir cualquier cosa; de modo que los eventos físicos deben ser registrados en sus correspondientes posiciones y tiempos. El tiempo y el espacio ya no pueden entenderse como entidades no relacionadas, sino como componentes de un espacio físico de 4 dimensiones: el espacio-tiempo o el espacio de Minkowski.

La falta de comprensión del concepto de espacio-tiempo causa la famosa paradoja de los gemelos. Hay un resultado de la teoría de la relatividad que generalmente se expresa así: *un reloj en movimiento se retrasa progresivamente con respecto a uno en reposo*. Según esto, para el gemelo en tierra, el reloj de pulsera de su hermano viajero parece retrasarse con respecto al suyo; pero para el gemelo que viaja, el reloj de pulsera de su hermano en tierra se comporta igualmente y debe retrasar en relación al suyo. Obviamente, cuando los gemelos se vuelvan a encontrar en la tierra, determinarán lo que les ha pasado a los relojes. Pero la regla teórica que hemos utilizado, en lugar de resolver el problema, lo complica más.

La regla anterior sobre relojes en reposo y movimiento no tiene la precisión requerida en el contexto del espacio-tiempo, ya que es una afirmación sobre el tiempo sin ninguna referencia al espacio. Es más correcto imaginar una línea, recta o curva, jalonada regularmente por relojes en reposo sincronizados, y otro reloj en movimiento que sigue esa línea: en cada posición espacial en la que coinciden el reloj móvil y otro en reposo, el reloj móvil marca un tiempo menor que el reloj fijo correspondiente según una determinada ley. Expresada la regla de esta manera incluimos una referencia al espacio. El sentido físico más básico nos dice que el reloj del hermano en la tierra no se ha visto afectado por ningún cambio físico, incluida la aceleracion; y, por lo tanto, no hay razón para decir que se haya retrasado o avanzado: siempre ha seguido su ritmo. Sin embargo, es cierto que el gemelo viajero observa que el reloj de pulsera de su hermano se mueve más lento que el suyo; pero en el sentido anterior de una línea jalonada por relojes sincronizados en reposo con respecto al gemelo viajero. Cuando el gemelo viajero llega a su destino en la estrella alfa-centauri (una extensión del sistema terrestre de coordenadas), observa simultáneamente el reloj de su hermano en tierra. Pero para el hermano en tierra, esta simultaneidad no es tal y la realidad es que el hermano que viaja ha observado el reloj en tierra *antes* de alcanzar alfa-centauri; y es por eso que el gemelo viajero atribuyen una menor cantidad de tiempo al gemelo terrestre. Pero una vez que se añade el tiempo debido a la pérdida de la simultaneidad, el resultado es el predicho por la teoría especial de la relatividad: el gemelo viajero envejece menos.

Relatividad Especial: La transformación de Lorentz genérica.

La transformación de Lorentz entre dos sistemas de coordenadas cartesianos *(x,y,z,t)-(x',y',z',t')* en movimiento relativo sobre los ejes coincidentes *x-x'* mientras que los ejes *y-y'* , *z-z'* se mantienen paralelos. Siendo *v* la velocidad uniforme del sistema de ejes (*x',y',z'*) respecto al sistema de ejes (*x,y,z*), que consideramos en reposo, la transformación de Lorentz es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = M(v)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}; \quad M(v) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} \beta = \dfrac{v}{c} \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

Para generalizar esta transformación en el caso de sistemas cartesianos con orientación relativa de los ejes y dirección de la velocidad relativa arbitrarias podemos introducir dos matrices espaciales de giro local *G,G'* en el sistema en reposo y en el sistema móvil

$$G'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = G'M(v)G^T G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = G'M(v)G^T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

donde introducimos la matriz traspuesta que es igual a la inversa para giros espaciales. Mantenemos la misma notación para las coordenadas por ahorro,

entendiendo que se trata de coordenadas en los nuevos sistemas de coordenados girados localmente. Los componentes de la matriz de giro se obtienen mediante los productos escalares entre la base vectorial original y la base vectorial girada. Si la base ortonormal inicial local es (i_0,j_0,k_0) y la base girada es (i,j,k) , (i',j',k') tenemos

$$G=\begin{pmatrix} \bar{i}\bullet\bar{i}_0 & \bar{i}\bullet\bar{j}_0 & \bar{i}\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ \bar{j}\bullet\bar{i}_0 & \bar{j}\bullet\bar{j}_0 & \bar{j}\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ \bar{k}\bullet\bar{i}_0 & \bar{k}\bullet\bar{j}_0 & \bar{k}\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ G=\begin{pmatrix} \bar{i}'\bullet\bar{i}_0 & \bar{i}'\bullet\bar{j}_0 & \bar{i}'\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ \bar{j}'\bullet\bar{i}_0 & \bar{j}'\bullet\bar{j}_0 & \bar{j}'\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ \bar{k}'\bullet\bar{i}_0 & \bar{k}'\bullet\bar{j}_0 & \bar{k}'\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz de cambio de coordenadas es

$$G'M(v)G^T=\begin{pmatrix} \bar{i}'\bullet\bar{i}_0 & \bar{i}'\bullet\bar{j}_0 & \bar{i}'\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ \bar{j}'\bullet\bar{i}_0 & \bar{j}'\bullet\bar{j}_0 & \bar{j}'\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ \bar{k}'\bullet\bar{i}_0 & \bar{k}'\bullet\bar{j}_0 & \bar{k}'\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{i}\bullet\bar{i}_0 & \bar{j}\bullet\bar{i}_0 & \bar{k}\bullet\bar{i}_0 & 0 \\ \bar{i}\bullet\bar{j}_0 & \bar{j}\bullet\bar{j}_0 & \bar{k}\bullet\bar{j}_0 & 0 \\ \bar{i}\bullet\bar{k}_0 & \bar{j}\bullet\bar{k}_0 & \bar{k}\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con esto, si hacemos el segundo producto matricial resulta

$$G'M(v)G^T=\begin{pmatrix} \bar{i}'\bullet\bar{i}_0 & \bar{i}'\bullet\bar{j}_0 & \bar{i}'\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ \bar{j}'\bullet\bar{i}_0 & \bar{j}'\bullet\bar{j}_0 & \bar{j}'\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ \bar{k}'\bullet\bar{i}_0 & \bar{k}'\bullet\bar{j}_0 & \bar{k}'\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma\bar{i}\bullet\bar{i}_0 & \gamma\bar{j}\bullet\bar{i}_0 & \gamma\bar{k}\bullet\bar{i}_0 & -\gamma\beta \\ \bar{i}\bullet\bar{j}_0 & \bar{j}\bullet\bar{j}_0 & \bar{k}\bullet\bar{j}_0 & 0 \\ \bar{i}\bullet\bar{k}_0 & \bar{j}\bullet\bar{k}_0 & \bar{k}\bullet\bar{k}_0 & 0 \\ -\gamma\beta_i & -\gamma\beta_j & -\gamma\beta_k & \gamma \end{pmatrix}$$

haciendo el producto completo

$$G'M(v)G^T=\begin{pmatrix} \bar{i}\bullet\bar{i}' & \bar{j}\bullet\bar{i}' & \bar{k}\bullet\bar{i}' & -\gamma\beta_{i'} \\ \bar{i}\bullet\bar{j}' & \bar{j}\bullet\bar{j}' & \bar{k}\bullet\bar{j}' & -\gamma\beta_{j'} \\ \bar{i}\bullet\bar{k}' & \bar{j}\bullet\bar{k}' & \bar{k}\bullet\bar{k}' & -\gamma\beta_{k'} \\ -\gamma\beta_i & -\gamma\beta_j & -\gamma\beta_k & \gamma \end{pmatrix}+(\gamma-1)\begin{pmatrix} (\bar{i}\bullet\bar{i}_0)(\bar{i}'\bullet\bar{i}_0) & (\bar{j}\bullet\bar{i}_0)(\bar{i}'\bullet\bar{i}_0) & (\bar{k}\bullet\bar{i}_0)(\bar{i}'\bullet\bar{i}_0) & 0 \\ (\bar{i}\bullet\bar{i}_0)(\bar{j}'\bullet\bar{i}_0) & (\bar{j}\bullet\bar{i}_0)(\bar{j}'\bullet\bar{i}_0) & (\bar{k}\bullet\bar{i}_0)(\bar{j}'\bullet\bar{i}_0) & 0 \\ (\bar{i}\bullet\bar{i}_0)(\bar{k}'\bullet\bar{i}_0) & (\bar{j}\bullet\bar{i}_0)(\bar{k}'\bullet\bar{i}_0) & (\bar{k}\bullet\bar{i}_0)(\bar{k}'\bullet\bar{i}_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si *a* es un vector unitario cualquiera, el vector *β* verifica

$$\beta=\frac{\bar{v}}{c}=\frac{v}{c}\bar{i}_0\Rightarrow\bar{\beta}\bullet\bar{a}=\beta_a=\beta\bar{i}_0\bullet\bar{a}\Rightarrow\bar{i}_0\bullet\bar{a}=\frac{\beta_a}{\beta}$$

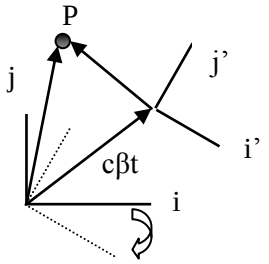
y por tanto podemos poner la matriz anterior como

$$M=\begin{pmatrix} \bar{i}\bullet\bar{i}' & \bar{j}\bullet\bar{i}' & \bar{k}\bullet\bar{i}' & -\gamma\beta_{i'} \\ \bar{i}\bullet\bar{j}' & \bar{j}\bullet\bar{j}' & \bar{k}\bullet\bar{j}' & -\gamma\beta_{j'} \\ \bar{i}\bullet\bar{k}' & \bar{j}\bullet\bar{k}' & \bar{k}\bullet\bar{k}' & -\gamma\beta_{k'} \\ -\gamma\beta_i & -\gamma\beta_j & -\gamma\beta_k & \gamma \end{pmatrix}+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\begin{pmatrix} \beta_i\beta_{i'} & \beta_j\beta_{i'} & \beta_k\beta_{i'} & 0 \\ \beta_i\beta_{j'} & \beta_j\beta_{j'} & \beta_k\beta_{j'} & 0 \\ \beta_i\beta_{k'} & \beta_j\beta_{k'} & \beta_k\beta_{k'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector *β* tiene la propiedad *β' = –β* ; debido a que al cambiar el observador de sistema de referencia el vector velocidad relativa entre sistemas de coordenadas se multiplica por *-1*. Esto permite escribir la expresión anterior en una forma mas simétrica de esta forma

$$M=\begin{pmatrix} \bar{i}\bullet\bar{i}' & \bar{j}\bullet\bar{i}' & \bar{k}\bullet\bar{i}' & -\gamma\bar{\beta}\bullet\bar{i}' \\ \bar{i}\bullet\bar{j}' & \bar{j}\bullet\bar{j}' & \bar{k}\bullet\bar{j}' & -\gamma\bar{\beta}\bullet\bar{j}' \\ \bar{i}\bullet\bar{k}' & \bar{j}\bullet\bar{k}' & \bar{k}\bullet\bar{k}' & -\gamma\bar{\beta}\bullet\bar{k}' \\ \bar{i}\bullet\gamma\bar{\beta}' & \bar{j}\bullet\gamma\bar{\beta}' & \bar{k}\bullet\gamma\bar{\beta}' & \gamma \end{pmatrix}+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\begin{pmatrix} \beta_i\beta_{i'} & \beta_j\beta_{i'} & \beta_k\beta_{i'} & 0 \\ \beta_i\beta_{j'} & \beta_j\beta_{j'} & \beta_k\beta_{j'} & 0 \\ \beta_i\beta_{k'} & \beta_j\beta_{k'} & \beta_k\beta_{k'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde *M* corresponde a la transformación de Lorentz genérica entre dos sistemas de coordenadas orientados arbitrariamente respecto a la base (i_0,j_0,k_0) correspondiente a la transformación de Lorentz clásica, donde la velocidad relativa está en la dirección i_0. En la aproximación Galileana de bajas velocidades tomando $\gamma\approx 1$ podemos uitilizar la matriz *M* de esta forma



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} \bar{i}\bullet\bar{i}' & \bar{j}\bullet\bar{i}' & \bar{k}\bullet\bar{i}' & -\bar{\beta}\bullet\bar{i}' \\ \bar{i}\bullet\bar{j}' & \bar{j}\bullet\bar{j}' & \bar{k}\bullet\bar{j}' & -\bar{\beta}\bullet\bar{j}' \\ \bar{i}\bullet\bar{k}' & \bar{j}\bullet\bar{k}' & \bar{k}\bullet\bar{k}' & -\bar{\beta}\bullet\bar{k}' \\ \bar{i}\bullet\bar{\beta}' & \bar{j}\bullet\bar{\beta}' & \bar{k}\bullet\bar{\beta}' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

El dibujo representa las operaciones geométricas correspondientes. Dado un punto *P* en el sistema en reposo *(i,j,k)* lo primero es una rotación hasta que los ejes sean paralelos a *(i',j',k')* y después una traslación paralela *cβt* del origen de *(i,j,k)* hasta el origen de *(i',j',k')* Aunque esta transformación incluye correcciones relativistas sobre el tiempo, si las distancias asociadas a las coordenadas espaciales no son del orden de kilómetros tal corrección es despreciable. La matriz *M* anterior se puede factorizar en el producto matricial de una rotación *R* y una traslación *T*. Dado que el valor de las coordenadas de traslación depende de si hay una rotación previa o no, tenemos dos posibles matrices *T* distintas que multiplican a la matriz *R* a derecha (subíndice *d*) o izquierda (subíndice *i*)

$$T_i=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{\beta}'\bullet\bar{i}' \\ 0 & 1 & 0 & \bar{\beta}'\bullet\bar{j}' \\ 0 & 0 & 1 & \bar{\beta}'\bullet\bar{k}' \\ \bar{i}'\bullet\bar{\beta}' & \bar{j}'\bullet\bar{\beta}' & \bar{k}'\bullet\bar{\beta}' & 1 \end{pmatrix};\ R=\begin{pmatrix} \bar{i}\bullet\bar{i}' & \bar{j}\bullet\bar{i}' & \bar{k}\bullet\bar{i}' & 0 \\ \bar{i}\bullet\bar{j}' & \bar{j}\bullet\bar{j}' & \bar{k}\bullet\bar{j}' & 0 \\ \bar{i}\bullet\bar{k}' & \bar{j}\bullet\bar{k}' & \bar{k}\bullet\bar{k}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ T_d=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\bar{\beta}\bullet\bar{i} \\ 0 & 1 & 0 & -\bar{\beta}\bullet\bar{j} \\ 0 & 0 & 1 & -\bar{\beta}\bullet\bar{k} \\ -\bar{i}\bullet\bar{\beta} & -\bar{j}\bullet\bar{\beta} & -\bar{k}\bullet\bar{\beta} & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_iR=M=RT_d\ ;\ \bar{\beta}'=-\bar{\beta}$$

Esta factorización simplica el cálculo de la inversa de *M* a partir de la inversa de *R,T* : $M^{-1}=R^{-1}T^{-1}_i=T^{-1}_dR^{-1}$. Matrices similares a estas se utiliza en los programas de control del movimiento de robots.

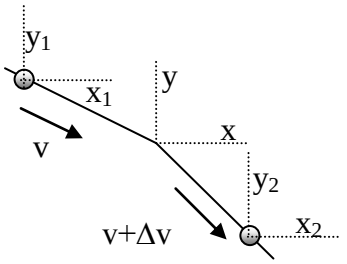
En caso de una transformación de coordenadas relativista completa entre dos sistemas cartesianos paralelos, pero cuya velocidad relativa no está en la dirección de ninguno de los ejes tenemos

$$B(v)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\gamma\beta_i \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma\beta_j \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma\beta_k \\ -\gamma\beta_i & -\gamma\beta_j & -\gamma\beta_k & \gamma \end{pmatrix}+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\begin{pmatrix} \beta_i^2 & \beta_j\beta_i & \beta_k\beta_i & 0 \\ \beta_i\beta_j & \beta_j^2 & \beta_k\beta_j & 0 \\ \beta_i\beta_k & \beta_j\beta_k & \beta_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en la literatura se suele llamar *boost* a esta transformación entre sistemas de coordenadas paralelos. Note el lector la simetría de la matriz boost *B(v)*. La transformada clásica de Lorentz es un caso especial de boost en que la dirección de la velocidad relativa es la misma que la de los ejes *i-i'* . El lector puede comprobar que el módulo de los vectores columna de *B*, utilizando el producto escalar del espacio de Minkowski definido en la sección sobre formas cuadráticas en este apéndice, vale *1*; y el producto escalar de dos columnas vale *0*. Por tanto *B* es una transformación lineal entre bases ortonormales en el espacio de Minkowski. Esto también es cierto para las columnas de *T*.

Relatividad Especial : La precesión de Thomas.

Existe un principio cinématico según en cual siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas inercial en el que, en algún instante del tiempo, se anula la velocidad de una partícula con movimiento arbitrario. Por supuesto, lo mismo es aplicable a un sistema de coordenadas *no inercial* solidario con la partícula: *en un instante dado existe un sistema inercial en reposo respecto al sistema no inercial*. El dibujo representa una aproximación por tramos al movimiento de una partícula. En el tramo superior la partícula se mueve con velocidad *v* y el sistema de coordenadas en el que la partícula está en reposo es el (x1,y1). En el tramo inferior la partícula se mueve con velocidad *v*+Δ*v* y el sistema de coordenadas en el que la partícula está en reposo es el (x2,y2). El cambio de movimiento de la partícula se produce en el origen de coordenadas del sistema inercial (x,y) que consideramos en reposo y respecto del cual se miden las velocidades mencionadas. Podemos tomar como origen de tiempos el instante en que la partícula pasa por el origen de coordenadas de (x,y).



Recordemos que hemos introducido en el texto el *sistema de coordenadas centro de masas* como un sistema *no inercial* que mantiene sus ejes coordenados paralelos con los del sistema de coordenadas inercial de referencia; y en esto no hemos *supuesto* ningún impedimento desde la física clásica; pero veremos que la relatividad va a matizar esto. Por tanto vamos a estudiar la disposición en que los ejes de los sistemas (x1,y1) y (x2,y2) son paralelos al sistema inercial de referencia (x,y). Las transformaciones de coordenadas correspondientes son

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ ct_1 \end{pmatrix} = B(\bar{v}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ ct \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ ct_2 \end{pmatrix} = B(\bar{v} + \Delta\bar{v}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ ct \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ ct_2 \end{pmatrix} = B(\bar{v} + \Delta\bar{v}) B(-\bar{v}) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ ct_1 \end{pmatrix}$$

donde las matrices son los correspondientes *boost* entre sistemas de ejes espaciales paralelos. La última relación corresponde a un cambio entre los sistemas 1 y 2 que puede ser evaluado en el límite en que $\Delta v \to 0$. Por sencillez podemos elegir el caso en que $B(v)=B(\beta)$ corresponde a una transformación de Lorentz clásica y evaluar $B(\beta+\Delta\beta)$ por medio del cálculo de una serie de Taylor:

$$B(\overline{\beta}+\Delta\overline{\beta}) \approx B(\overline{\beta}) + \frac{\partial B(\overline{\beta})}{\partial \beta_i}\Delta\beta_i + \frac{\partial B(\overline{\beta})}{\partial \beta_j}\Delta\beta_j + \frac{\partial B(\overline{\beta})}{\partial \beta_k}\Delta\beta_k\,; \quad \left.\begin{array}{l} \gamma = \left(1-\beta_i^2-\beta_j^2-\beta_k^2\right)^{-1/2} \\ \dfrac{\partial\gamma}{\partial\beta_n} = \dfrac{\beta_n}{\gamma^3};\ n=i,j,k \end{array}\right\}$$

Tomando para *B(β)* el resultado de la sección anterior para un boost

$$B(\overline{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\gamma\beta_i \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma\beta_j \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma\beta_k \\ -\gamma\beta_i & -\gamma\beta_j & -\gamma\beta_k & \gamma \end{pmatrix} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\begin{pmatrix} \beta_i^2 & \beta_j\beta_i & \beta_k\beta_i & 0 \\ \beta_i\beta_j & \beta_j^2 & \beta_k\beta_j & 0 \\ \beta_i\beta_k & \beta_j\beta_k & \beta_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la derivada parcial respecto de un índice genérico β_n (n=i,j,k) es

$$\frac{\partial B(\overline{\beta})}{\partial \beta_n} = -\frac{1}{\gamma^3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_n\beta_i \\ 0 & 0 & 0 & \beta_n\beta_j \\ 0 & 0 & 0 & \beta_n\beta_k \\ \beta_n\beta_i & \beta_n\beta_j & \beta_n\beta_k & \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\gamma\delta_{in} \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma\delta_{jn} \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma\delta_{kn} \\ -\gamma\delta_{in} & -\gamma\delta_{jn} & -\gamma\delta_{kn} & 0 \end{pmatrix} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\begin{pmatrix} 2\beta_i\,\delta_{in} & \beta_j\delta_{in}+\beta_i\delta_{jn} & \beta_k\delta_{in}+\beta_i\delta_{kn} & 0 \\ \beta_j\delta_{in}+\beta_i\delta_{jn} & 2\beta_j\,\delta_{jn} & \beta_k\delta_{jn}+\beta_k\delta_{jn} & 0 \\ \beta_k\delta_{in}+\beta_i\delta_{kn} & \beta_k\delta_{jn}+\beta_k\delta_{jn} & 2\beta_k\delta_{kn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde *δ* es la *delta de kronecker* y hemos omitido las derivadas del factor $(\gamma-1)/\beta^2$; omisión que se justificará posteriormente en la aproximación de bajas velocidades. Podemos calcular las correspondientes derivadas en el punto $\beta_i=\beta=v/c$, $\beta_j=0$, $\beta_k=0$, correspondiente a la transformación de Lorentz clásica. También tomaremos una aproximación de bajas velocidades, de modo que $\gamma\approx 1+\beta^2/2$ y $\beta<<1$. Con estas condiciones tenemos

$$\frac{\partial B(\overline{\beta})}{\partial \beta_n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\delta_{in} \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{jn} \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{kn} \\ -\delta_{in} & -\delta_{jn} & -\delta_{kn} & \beta_i\delta_{in} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\beta_i\delta_{in} & \beta_i\delta_{jn} & \beta_i\delta_{kn} & 0 \\ \beta_i\delta_{jn} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_i\delta_{kn} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots..$$

cambiando una componente de matriz, el cálculo de *B(β+Δβ)B(-β),* considerando la aproximación de baja velocidad resulta en

$$\left[\begin{pmatrix} \beta_i\delta_{in} & 0 & 0 & -\delta_{in} \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{jn} \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{kn} \\ -\delta_{in} & -\delta_{jn} & -\delta_{kn} & \beta_i\delta_{in} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \beta_i\delta_{jn} & \beta_i\delta_{kn} & 0 \\ \beta_i\delta_{jn} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_i\delta_{kn} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\delta_{in} \\ -\beta_i\delta_{jn} & 0 & 0 & -\delta_{jn} \\ -\beta_i\delta_{kn} & 0 & 0 & -\delta_{kn} \\ -\delta_{in} & -\delta_{jn} & -\delta_{kn} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \beta_i\delta_{jn} & \beta_i\delta_{kn} & 0 \\ \beta_i\delta_{jn} & 0 & 0 & \beta_i^2\delta_{jn} \\ \beta_i\delta_{kn} & 0 & 0 & \beta_i^2\delta_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots.$$

despreciando las componentes en β^2 frente a *1* , incluyendo el producto del resultado anterior por $\Delta\beta_n$ *(n=i,j,k)* y sumando en *n*, de acuerdo a la regla de suma de Einstein sobre índices repetidos tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\delta_{in} \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{jn} \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{kn} \\ -\delta_{in} & -\delta_{jn} & -\delta_{kn} & 0 \end{pmatrix}\Delta\beta_n + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \beta_i\delta_{jn} & \beta_i\delta_{kn} & 0 \\ -\beta_i\delta_{jn} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_i\delta_{kn} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Delta\beta_n + \ldots. = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\Delta\beta_i \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta\beta_j \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta\beta_k \\ -\Delta\beta_i & -\Delta\beta_j & -\Delta\beta_k & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \beta_i\Delta\beta_j & \beta_i\Delta\beta_k & 0 \\ -\beta_i\Delta\beta_j & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_i\Delta\beta_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

de modo que el resultado total será

$$B(\overline{\beta}+\Delta\overline{\beta})B(-\overline{\beta}) \approx B(\overline{\beta})B(-\overline{\beta}) + \frac{\partial B(\overline{\beta})}{\partial \beta_n} B(-\overline{\beta})\Delta\beta_n + ... \Rightarrow$$

$$B(\overline{\beta}+\Delta\overline{\beta})B(-\overline{\beta}) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta\beta_i \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta\beta_j \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta\beta_k \\ -\Delta\beta_i & -\Delta\beta_j & -\Delta\beta_k & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \beta_i\Delta\beta_j & \beta_i\Delta\beta_k & 0 \\ -\beta_i\Delta\beta_j & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_i\Delta\beta_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + ...$$

donde la diagonal de unos se debe al producto de *B(β)* por su inversa *B(-β)*.

El resultado obtenido es la suma de una componente simétrica y una antisimétrica. La componente simétrica corresponde, dentro de la aproximación manejada, a un boost *B(Δβ)* un desplazamiento paralelo relativo entre los sistemas 1 y 2 debido a la aceleración. Esto es lo que se esperaría según la física clásica, aunque se incluye también un desplazamiento relativo temporal debido a una cambio en la sincronía debido a la aceleración entre los relojes del sistema 1 y el sistema 2; que es despreciable a bajas velocidades. Un desplazamiento temporal de este tipo es el que se produce en la *paradoja de los gemelos*. Esto se discute con mas detalle en el trabajo *Espacio,tiempo,materia y vacío*.

Pero la componente antisimétrica del resultado demuestra la desigualdad *B(β+Δβ)B(-β)≠ B(Δβ),* o de otra forma *B(β+Δβ) ≠ B(β)B(Δβ) (B simétrica).* La componente antisimétrica corresponde a un giro relativo entre los sistemas 1 y 2. Igualando la componente antisimétrica con la matríz correspondiente a la velocidad angular tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -w_k & w_j \\ w_k & 0 & -w_i \\ -w_j & w_i & 0 \end{pmatrix}\Delta t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \beta_i\Delta\beta_j & \beta_i\Delta\beta_k \\ -\beta_i\Delta\beta_j & 0 & 0 \\ -\beta_i\Delta\beta_k & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} w_i\Delta t = 0 \\ w_j\Delta t = \beta_i\Delta\beta_k/2 \\ w_k\Delta t = -\beta_i\Delta\beta_j/2 \end{matrix}\right\}$$

y en términos vectoriales, donde *a* es la aceleración correspondiente

$$\left(w_i, w_j, w_k\right) = \frac{1}{2c^2}\left(a_i, a_j, a_k\right)\times\left(v_i, 0, 0\right) = \frac{1}{2c^2}\overline{a}\times\overline{v}$$

El resultado obtenido depende de la velocidad relativa *v* y por tanto corresponde a una medida en el sistema inercial en reposo (x,y). En el cálculo desarrollado hemos utilizado dos boost paralelos (x1,y1)→ (x,y) ; (x2,y2)→ (x,y) y hemos supuesto sin justificación que el sistema (x,y) es el mismo en ambos boost. El resultado que hemos obtenido nos dice que esta suposición no es correcta y para que el segundo boost sea correcto es necesario girar el sistema (x,y) en una cantidad que depende de la aceleración y de la velocidad relativa. Este giro es también un giro del sistema de coordenadas no inercial asociado a una partícula afectada por aceleración y corresponde a la precesión de Thomas.

Relatividad General: Sistemas de referencia giratorios y efecto Sagnac.

El carácter invariante entre sistemas de coordenadas inerciales del elemento de línea *ds* en el espacio de Minkowsky se deduce de las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial. La relatividad general supone que las leyes físicas son las mismas en cualquier sistema de coordenadas, sea inercial o no y acepta el principio de que el elemento de línea *ds* es también invariante en cualquier sistema de coordenadas. Estas ideas se pueden aplicar directamente para calcular la forma del elemento de línea *ds* en el caso de un sistema de coordenadas que gire con velocidad angular constante ω respecto de otro sistema de coordenadas con el mismo origen ,que supondremos inercial y que nos servirá de referencia. Si utilizamos coordenadas cilíndricas para representar el elemento de línea *ds* en el sistema inercial tenemos

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ x = r\cos(\theta);\ y = r\sin(\theta) \end{array}\right\} \Rightarrow ds^2 = c^2dt^2 - dz^2 - dr^2 - r^2d\theta^2$$

Elegimos que el eje de giro coincide con el eje *z* de ambos sistemas de coordenadas. Utilizaremos el subíndice *g* como referencia a las coordenadas en el sistema giratorio. Si consideramos un punto fijo del espacio en el sistema inercial, las coordenadas z_g,r_g tampoco varían para ese punto debido a que el movimiento relativo del punto es perpendicular al eje coordenado z_g y al radio vector r_g, dicho movimiento no afecta a estas coordenadas que son iguales a los valores *z,r* correspondientes al sistema inercial.

Consideremos ahora dos anillos delgados centrados en el origen de coordenadas común de los dos sistemas, en un mismo plano perpendicular al eje ($z=z_g$), con el mismo radio($r=r_g$)y tan próximos entre si como queramos. Uno de los anillos está fijo en el sistema inercial y el otro está en reposo en el sistema giratorio. Un observador en el sistema inercial marca *N* sectores angulares de tamaño $\Delta\theta$ sobre el anillo en reposo, de modo que cubren completamente el perímetro. A continuación realiza el marcado correspondiente del anillo giratorio con un aparato al que corresponde una longitud $r\Delta\theta$ y capaz de generar dos señales luminosas *simultáneas* en sus extremos. Estas señales al incidir en el anillo dejan una marca que utilizaremos como coordenada angular en el sistema giratorio. El final de una marca coincide con el inicio de la siguiente, de modo que el número de marcas en el anillo móvil será el mismo que en el anillo fijo : *N* y visto por ambos observadores, la coordenada angular, medida a partir de la dirección de los ejes x,x_g, coincide salvo un desfase adicional correspondiente al giro relativo ω. Con estas consideraciones planteamos la siguiente *transformación de coordenadas de Langevin*

$$t = t_g;\ z = z_g;\ r = r_g;\ \theta = \theta_g + \omega t_g$$

La primera relación indica que los relojes del sistema giratorio están *trucados* y *copian* el valor del tiempo del reloj mas próximo del sistema inercial. La transformación de coordenadas anterior es legítima según la *relatividad general* por que los valores de las nuevas coordenadas están *bién definidos*, y el observador giratorio puede distinguir cualquier evento físico con estas coordenadas. Si sustituimos la transformación de Langevin en el elemento de

línea *ds*, obtendremos la expresión de dicho elemento de línea en función de las nuevas coordenadas de modo que dicho elemento de línea permanece invariante en el cambio de coordenadas

$$ds^2 = c^2 dt_g^2 - dz_g^2 - dr_g^2 - r_g^2\left(d\theta_g + \omega dt_g\right)^2 = c^2 dt_g^2\left(1 - \frac{r_g^2\omega^2}{c^2}\right) - 2\omega r_g^2 d\theta_g dt_g - dz_g^2 - dr_g^2 - r_g^2 d\theta_g^2$$

$$ds^2 = c^2 dt_g^2\left(1 - \frac{r_g^2\omega^2}{c^2}\right) - 2\omega r_g^2 d\theta_g dt_g - dl_g^2 \;;\; dl_g^2 = dz_g^2 + dr_g^2 + r_g^2 d\theta_g^2$$

Analicemos el resultado. Para el caso de un *reloj no trucado* en reposo respecto al sistema en giro será $dl_g=0$ y el elemento de línea corresponde al *tiempo propio* $d\tau$ del reloj giratorio no trucado

$$ds^2 = c^2 dt_g^2\left(1 - \frac{r_g^2\omega^2}{c^2}\right) = c^2 d\tau^2 \Rightarrow d\tau = dt_g\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \;;\; v = r\omega$$

resultado que es correcto según la relatividad especial y corresponde a la *dilatación relativa del tiempo* entre el tiempo marcado por un reloj en reposo(dt_g) y uno en movimiento($d\tau$). Sin embargo si analizamos el caso de una regla (espacio simultáneo: $dt_g=0$) en reposo relativo al sistema en giro tenemos $ds^2=dl^2_g$, de modo que en estas coordenadas la *contracción de Lorentz* no aparece *explícitamente*. Por otro lado ya que ningún punto del sistema de coordenadas giratorio puede alcanzar la velocidad de la luz en el vacío, *c*, respecto a un sistema de coordenadas inercial, la métrica obtenida solo es válida para un radio *R* del sistema en giro que verifique $\omega R<c$. Si suponemos un contexto físico *semiclásico* con $\omega R<<c$, entonces podemos aproximar la métrica en estas coordenadas de esta forma

$$ds^2 \approx c^2 dt_g^2 - 2\omega r_g^2 d\theta_g dt_g - dl_g^2 \;;\; dl_g^2 = dz_g^2 + dr_g^2 + r_g^2 d\theta_g^2$$

donde vemos que la velocidad de giro ω sigue teniendo un papel relevante. Analicemos el movimiento de un rayo de luz en esta métrica. En el sistema giratorio y en el inercial el movimiento de un rayo de luz tiene asociado un elemento de línea nulo de modo que tenemos:

$$0 \approx \left(cdt_g\right)^2 - \frac{2\omega}{c} r_g^2 d\theta_g\left(cdt_g\right) - dl_g^2 \Rightarrow 2cdt_g \approx \frac{2\omega}{c} r_g^2 d\theta_g \pm \sqrt{\left(\frac{2\omega}{c} r_g^2 d\theta_g\right)^2 + 4dl_g^2} \;;\; \frac{2\omega}{c} r_g^2 d\theta_g << dl_g \Rightarrow$$

aproximando la raíz cuadrada en serie de Taylor como función de ω de modo que despreciamos términos en ω^2 y superiores tenemos

$$dt_g \approx \frac{dl_g}{c} + \frac{\omega}{c^2} r_g^2 d\theta_g \Rightarrow \Delta t_g \approx \frac{1}{c}\int_A^B dl_g + \frac{\omega}{c^2}\int_A^B r_g^2 d\theta_g$$

y por tanto el tiempo que toma un rayo de luz en pasar del punto A al punto B en las coordenadas del sistema giratorio no solo depende de la distancia

recorrida dl_g sino también del giro del sistema de coordenadas. La integral correspondiente a este segundo sumando corresponde al *área sobre el plano x-y cubierta por el radio r_g durante el trayecto de la luz.* Este término es el responsable del *efecto Sagnac*. En general el trayecto de la luz en el vacío entre dos puntos *A* y *B* en el sistema de coordenadas giratorio no será una línea recta. Además el trayecto puede estar afectado por espejos o guías de ondas que cambien de dirección a la luz.

Podemos hacer un razonamiento análogo para encontrar el elemento de línea en el caso de un sistema de coordenadas ligado rígidamente a la tierra y por tanto giratorio. En este caso debemos tomar como sistema de coordenadas de referencia uno correspondiente a una tierra sin giro y que podemos tomar como el sistema de coordenadas de Schwarzschild[6,5] correspondiente a una masa que no gira y con simetría esférica. Si partimos de la métrica de Schwarzschild y le aplicamos la correspondiente transformación de Langevin tenemos

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = c^2(dt)^2(1-\dfrac{2GM}{rc^2}) - (rd\phi)^2 - (r\,sen(\phi)\,d\theta)^2 - \dfrac{(dr)^2}{1-\dfrac{2GM}{rc^2}} \\ t = t_g;\ \phi = \phi_g;\ r = r_g;\ \theta = \theta_g + \omega t_g \end{array}\right\}$$

que conduce a la siguiente métrica

$$ds^2 = c^2 dt_g^2 (1-\frac{2GM}{r_g c^2} - \frac{r_g^2}{c^2} sen^2(\phi_g)\omega^2) - 2\omega r_g^2 sen^2(\phi_g) d\theta_g dt_g - dl_g^2 \ ;$$

$$dl_g^2 = r_g^2 d\phi_g^2 + r_g^2\, sen^2(\phi_g) d\theta_g^2 + \frac{dr_g^2}{1-\dfrac{2GM}{r_g c^2}}$$

con lo que obtenemos el elemento de línea en el sistema de coordenadas propio de la tierra y contiene las correcciones relativistas utilizadas en el sistema de posicionamiento global GPS. Una mejora de la métrica anterior se obtiene introduciendo el potencial gravitatorio *V* correspondiente a un elipsoide que aproxime la forma real de la tierra[3], de modo que se hace el cambio *GM/r→V* en la métrica anterior. En el contexto del sistema GPS existen varios conceptos relacionados con la relatividad. El *Tiempo Universal Coordenado* (UTC) es un tiempo global válido para el sistema de referencia de coordenadas *Inercial Centrado en la Tierra* (ECI) respecto del cual la propia Tierra hace su rotación diurna. UTC no es una coordenada temporal global para el *sistema de coordenadas fijo a la Tierra y centrado en ella* (ECEF) en el que vivimos, porque el ECEF es un marco giratorio. Por tanto, cuando dos eventos tienen el mismo tiempo UTC, son simultáneos para todos los observadores en reposo en el ECI, pero no son *necesariamente* simultáneos para un observador en el ECEF, y de hecho esos dos eventos pueden estar separados por intervalos del orden de 30 nanosegundos (≈100 metros-luz) en el ECEF. El algoritmo de ubicación del GPS compensa estos efectos, ya que ese algoritmo con su coordenada de tiempo global se basa en el ECI.

En la fórmula anterior también aparece un término correspondiente al efecto Sagnac asociado al producto cruzado *dθdt*. Para el caso de una partícula en movimiento respecto al sistema giratorio podemos transformar este término así

$$2\omega r_g^2 sen^2(\phi_g) d\theta_g dt_g = 2\omega r_g sen\ (\phi_g) v_{\theta_g} dt_g^2\ ;\ v_{\theta_g} = r_g sen(\phi_g)\frac{d\theta_g}{dt_g}$$

donde v_θ es la velocidad de la partícula en la dirección de la línea coordenada θ_g en coordenadas esféricas. De esta forma el factor correspondiente a dt^2 en el elemento de línea ds^2 se puede poner así

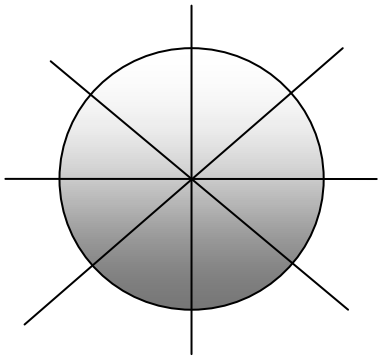
$$1+\frac{2}{c^2}\left(-\frac{GM}{r_g}-\frac{1}{2}r_g^2\, sen^2(\phi_g)\omega^2-\omega r_g sen(\phi_g)v_{\theta_g}\right)$$

y vemos que el término aditivo con el potencial gravitatorio newtoniano es el potencial no inercial efectivo V_E en un sistema giratorio correspondiente a las *ecuaciones de Euler-Lagrange en este sistema no inercial giratorio* y que en [5] encontramos en la forma vectorial de este modo

$$V_E = -\frac{1}{2}\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right)^2 - \bar{v}_N \bullet \left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right)$$

donde v_N es la velocidad de la partícula relativa al sistema giratorio. Este resultado está de acuerdo con el *principio de equivalencia de la relatividad general*, que considera un sistema de coordenadas acelerado equivalente a un sistema de coordenadas inercial en el que actúa un *campo gravitatorio* asociado al potencia V_E. De esta forma el término correspondiente al *efecto Sagnac* está relacionado con la *aceleración de Coriolis* en el contexto de los sistemas no inerciales de la mecánica clásica.

Relatividad General:Curvatura del espacio-tiempo.



Imaginemos un disco circular plano en reposo sobre el que trazamos una serie de sectores iguales, tantos como queramos según el dibujo adjunto. El disco está inicialmente sobre el suelo y marcamos los sectores también en el suelo continuando las líneas correspondientes.

A continuación ponemos a girar el disco respecto del eje vertical que pasa por su centro y nos preguntamos por el comportamiento de las marcas que hemos hecho según la relatividad especial. Las líneas diametrales de la plataforma son perpendiculares al movimiento relativo y por tanto el observador en tierra no percibirá contracción en ellas. Por tanto se mantendrán con la misma longitud que cuando la plataforma estaba en reposo[7]. En principio podemos pensar que el movimiento del disco hace que el observador en el suelo, que consideramos inercial, perciba una reducción del

[7] Salvo posiblemente un pequeño alargamiento debido a la fuerza centrífugas.

perímetro de la plataforma según la contracción de Lorentz. Sin embargo, si el radio de la plataforma no se modifica, es evidente que el conjunto de puntos geométricos del perímetro del disco en reposo y en movimiento son los mismos y el observador en el suelo no puede percibir una reducción en la anchura de los sectores del disco cuando este gira, ya que en todo momento el mismo número de sectores debe cubrir el mismo número de puntos y sería inexplicable una asimetría del tamaño de los distintos sectores. Esto significa que la contracción de Lorentz, en este caso, queda cancelada para el observador inercial. Esto no es algo extraño y también ocurre en el problema de los cohetes espaciales ("paradoja" de Bell)[6]; y tal como concluimos en [6] debemos aceptar que, *para el observador en el perímetro del disco*, el giro ha supuesto un aumento del perímetro en un factor que cancela la contracción de Lorentz. Si el radio se ha mantenido constante para el observador en el disco, entonces la relación entre perímetro y diámetro es mayor que π, lo que es una señal de que la geometría correspondiente no es Euclídea y existe una curvatura del espacio-tiempo para el observador en el disco. Pero si el observador en el disco debe concluir que hay una dilatación del perímetro, debe ser posible que las reglas de medida que utilice este observador no estén afectadas ellas mismas por esta dilatación o puedan ser rectificadas efectivamente respecto a este fenómeno, al estar girando ellas también con el disco. A continuación se describe una forma posible de conseguir esto. Supongamos que el perímetro del disco gira a la velocidad v respecto el suelo. Desde el suelo se lanza una regla de medida a velocidad v de forma que en un instante dado esta regla es tangente al disco en cierto punto. En ese instante la velocidad entre la regla y el punto correspondiente del perímetro se anula y el observador próximo en el disco puede hacer una copia local, que utilizará como regla de medida local aplicable al anillo perimetral de radio r correspondiente. Utilizando reglas definidas de esta forma el observador en el disco puede concluir que el giro del disco ha producido una dilatación del espacio-tiempo: se ha creado espacio-tiempo. Este resultado supone que la geometría aplicable en el disco no es Euclídea y que en general la aceleración de un sistema de coordenadas afecta a su geometría mediante la *curvatura del espacio-tiempo*. Aunque estas conclusiones son válidas para cualquier velocidad del disco adquieren mas importancia para velocidades comparables con la luz. Según la relatividad general, la *expansión del universo* se debe a la creación de espacio-tiempo.

Retomando el procedimiento descrito en la sección anterior sobre el marcado del anillo en giro para registrar las coordenadas θ_g, podemos ver que el proceso de marcado es *símultaneo* respecto al observador inercial, pero debido a la velocidad relativa no es *símultáneo* respecto a un observador en el anillo que disponga de relojes sincronizados[8] no trucados distribuidos por todo el anillo y esté próximo a las marcas. Esta falta de simultaneidad hace, según las transformaciones de Lorentz, que los sectores marcados en el anillo móvil sean, para el observador del anillo, de mayor longitud en términos de las reglas

[8] En la sección anterior se vio que los relojes situados en un anillo de radio r funcionan todos al mismo ritmo, tienen todos el mismo tiempo propio $d\tau$ y por tanto pueden ser sincronizados. Los relojes de un anillo que inicialmente están en reposo y sincronizados y pasan a estar en giro, podemos suponer que han pasado todos por los mismos cambios físicos. Por tanto deben acaban también sincronizados a juzgar por el observador no inercial.

de medida locales utilizadas por el observador en giro y definidas antes. Esto está de acuerdo con la conclusión de que el observador en giro percibe una expansión en el espacio-tiempo.

Los fenómenos relativistas que estamos discutiendo suponen, desde el punto de vista del observador no inercial, que cuando se pone a girar la plataforma desde un estado de reposo hay un aumento de la distancia relativa de todos los átomos, de distinta magnitud en la periferia que en el interior del disco, debido al aumento del espacio-tiempo disponible. Pero una separación entre átomos vecinos requiere aplicar cierta fuerza sobre ellos y la separación obtenida dependerá de la intensidad de las fuerzas de enlace atómicas correspondientes al material específico. De esta forma, el proceso en que se pone a girar la plataforma hasta llegar a un estado estacionario supone que debe haber alguna acumulación de *energía interna* en el disco, lo cual hace probable que también exista una modificación del radio de la misma respecto a cuando estaba en reposo. Esto último no es nada extraño ya que sabemos que las fuerzas centrífugas clásicas pueden generar tensiones en los sólidos; pero en el caso relativista no solo hay aumento de tensión, sino que *debe haber acumulación de energía interna*; y por tanto llevar un objeto en el disco giratorio desde un radio r_1 a otro r_2 supone un cambio de la energía interna del objeto desplazado , además de un cambio de energía potencial.

Un análisis detallado del problema se puede ver en el trabajo “On the space-time in a spinning disk”, en esta misma web.

Calculo vectorial en componentes

Supongamos tres vectores {*a,b,c*} cuyas componentes se numeran con los índices *i,j,k* en una base de vectores ortonormales {e_1,e_2,e_3} orientada positivamente. Utilizando el convenio de suma sobre índices repetidos, el producto escalar de dos vectores nos lleva a la definición del tensor δ_{ij}

$$\left(a_i \bar{e}_i\right)\bullet\left(b_j \bar{e}_j\right) = a_i b_j \left(\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j\right) \; ; \; \bar{e}_i \bullet \bar{e}_j \equiv \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$$

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = a_i b_j \delta_{ij}$$

Si consideramos ahora el producto mixto de los tres vectores, llegamos a la definición del símbolo ε_{ijk} estipulando que una base ortonormal {e_1,e_2,e_3} orientada positiva se caracteriza por $\varepsilon_{123}=1$

$$\left[\left(a_i \bar{e}_i\right)\times\left(b_j \bar{e}_j\right)\right]\bullet\left(c_k \bar{e}_k\right) = \left(a_i b_j \bar{e}_i \times \bar{e}_j\right)\bullet\left(c_k \bar{e}_k\right) = a_i b_j c_k \left(\bar{e}_i \times \bar{e}_j\right)\bullet \bar{e}_k = a_i b_j c_k \, \varepsilon_{ijk}$$

$$\left(\bar{e}_i \times \bar{e}_j\right)\bullet \bar{e}_k \equiv \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \quad si \; (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 \; si \; (i,j,k) \in \{(3,2,1),(1,3,2),(2,1,3)\} \\ 0 \quad si \; hay indices \; repetidos \end{cases} \quad ; \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} -\varepsilon_{jik} \; \text{permutacion simple} \\ \varepsilon_{kij} \; \text{permutacion cíclica} \end{cases}$$

a partir de esta definición y dado que los vectores base son unitarios tenemos

$$\left(\bar{e}_i \times \bar{e}_j\right)\bullet \bar{e}_k \equiv \varepsilon_{ijk}\bar{e}_k \bullet \bar{e}_k \Rightarrow \left(\left(\bar{e}_i \times \bar{e}_j\right) - \varepsilon_{ijk}\bar{e}_k\right)\bullet \bar{e}_k = 0$$

de modo que si $k \neq i,j$ se verifica necesariamente

$$\left(\bar{e}_i \times \bar{e}_j\right) = \varepsilon_{ijk}\bar{e}_k \;\; ; \; k \neq i, j$$

Si consideramos ahora el doble producto vectorial de $\{a,b,c\}$

$$\left(c_k \bar{e}_k\right)\times\left[\left(a_i \bar{e}_i\right)\times\left(b_j \bar{e}_j\right)\right] = \left(a_i \bar{e}_i\right)\left[\left(c_k \bar{e}_k\right)\bullet\left(b_j \bar{e}_j\right)\right] - \left(b_j \bar{e}_j\right)\left[\left(c_k \bar{e}_k\right)\bullet\left(a_i \bar{e}_i\right)\right]$$

y aplicando la fórmula previa al lado izquierdo tenemos

$$\left(c_k \bar{e}_k\right)\times\left[\left(a_i \bar{e}_i\right)\times\left(b_j \bar{e}_j\right)\right] = \left(c_k \bar{e}_k\right)\times\left(a_i b_j \varepsilon_{ijl}\bar{e}_l\right) = a_i b_j c_k \varepsilon_{ijl}\bar{e}_k \times \bar{e}_l = a_i b_j c_k \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{klm}\bar{e}_m$$

para el lado derecho tenemos

$$\left(a_i \bar{e}_i\right)\left[\left(c_k \bar{e}_k\right)\bullet\left(b_j \bar{e}_j\right)\right] - \left(b_j \bar{e}_j\right)\left[\left(c_k \bar{e}_k\right)\bullet\left(a_i \bar{e}_i\right)\right] = \left(a_i b_j c_k \delta_{jk}\bar{e}_i\right) - \left(a_i b_j c_k \delta_{ik}\bar{e}_j\right)$$

apodemos hacer que los vectores base varíen en un único índice *m* introduciendo los δ correspondientes

$$\bar{e}_m = \delta_{im}\bar{e}_i = \delta_{jm}\bar{e}_j \Rightarrow a_i b_j c_k \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{klm}\bar{e}_m = a_i b_j c_k\left(\delta_{jk}\delta_{im} - \delta_{ik}\delta_{jm}\right)\bar{e}_m \Rightarrow \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{klm} = \delta_{jk}\delta_{im} - \delta_{ik}\delta_{jm}$$

haciendo el cambio $k \rightarrow n$ y utilizando la propiedad de permutación cíclica de ε tenemos

$$\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{mnl} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

que en el lado izquierdo supone una suma debido al índice repetido *l.*

El objeto δ_{ij} es realmente un tensor ya que verifica la ley de transformación de coordenadas para tensores. Esta ley de transformación se presentó en la discusión sobre el tensor de inercia en [1] para el caso de sistemas de coordenadas con origen común y girados según la matriz de giro *M*

$$\bar{a}\bullet\bar{b} = \left(a_1, a_2, a_3\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix};\;\; \left(\delta_{ij}\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\; \left(\delta'_{ij}\right) = M\left(\delta_{ij}\right)M^{-1} = M\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}M^{-1} = MM^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \left(\delta_{ij}\right)$$

El símbolo ε_{ijk} no es un tensor y corresponde al $\varepsilon(p)$ utilizado en la sección siguiente sobre determinantes y podemos visualizarlo en tres dimensiones mediante un vector de las matrices asociadas a *k=1,2,3* y obtener la siguiente imagen

$$\bar{a}\times\bar{b} = \left(a_1, a_2, a_3\right)\left\{\left(\varepsilon_{ij3}\right),\left(\varepsilon_{ij2}\right),\left(\varepsilon_{ij1}\right)\right\}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix};\; \left\{\left(\varepsilon_{ij3}\right),\left(\varepsilon_{ij2}\right),\left(\varepsilon_{ij1}\right)\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

Algebra básica de determinantes.

Funciones n-lineales alternas

$$\boxed{n-lineal:\ f(x_1,x_2...\alpha_i x_i+\beta_i y_i...x_n)=\alpha_i f(x_1,x_2...x_i...x_n)+\beta_i f(x_1,x_2...y_i...x_n)\quad \forall i}$$
$$\boxed{Alterna:\ Si\ x_i=x_j\ \Rightarrow f(x_1,x_2...x_i...x_j...x_n)=0\quad \forall i,j}$$

$$\Rightarrow\ f(x_1,x_2...x_i+y_i...x_i+y_i...x_n)=0=f(x_1,x_2...x_i...x_i...x_n)(0)+f(x_1,x_2...y_i...y_i...x_n)(0)+$$
$$f(x_1,x_2...x_i...y_i...x_n)+f(x_1,x_2...y_i...x_i....x_n)\Rightarrow$$

$$\boxed{f(x_1,x_2...x_i...x_j...x_n)=-f(x_1,x_2...x_j...x_i....x_n)}$$

una transposición de los argumentos cambia el signo del valor de la función n-lineal alternada.

Si se expresan los x_i función de una base b_i del espacio vectorial tenemos (convenio de suma de Einstein: la repetición de un índice en un término supone la suma del término completo extendida a todos los valores de dicho índice)

$$x_i=a_{ij(i)}b_{j(i)}\quad j(i)\ en\ [1,n]$$
$$\Rightarrow\ f(a_{1j(1)}b_{j(1)},...a_{ij(i)}b_{j(i)}...a_{nj(n)}b_{j(n)})=a_{1j(1)}..a_{ij(i)}..a_{nj(n)}f(b_{j(1)},...b_{j(i)}...b_{j(n)})$$

el argumento $(b_{j(1)}..b_{j(2)}\ldots b_{j(n)})$ se anula si hay dos vectores iguales y por tanto la suma solo se reduce al conjunto de todas las *permutaciones* posibles de la n-tupla ordenada $(b_1,b_2\ldots.b_n)$

$$f(x_1,x_2...x_i...x_j...x_n)=\sum_{\{p\}}a_{1p(1)}..a_{ip(i)}..a_{np(n)}f(b_{p(1)},...b_{p(i)}...b_{p(n)})\ ;\ p\ \ permutacion\ en\ [1,n]$$

toda permutación se puede descomponer en una serie de *trasposiciones* de dos elementos, cada una de las cuales cambia el signo de la función n-lineal alterna y por tanto

$$f(b_{p(1)},...b_{p(i)}...b_{p(n)})=\varepsilon(p)f(b_1,...b_i...b_n)\ ;\ \varepsilon(p)=(-1)^t$$

donde *t* es el número de trasposiciones desde ($b_{p(i)}$) hasta (b_i). Por tanto

$$f(x_1,x_2...x_i...x_j...x_n)=\left[\sum_{\{p\}}a_{1p(1)}..a_{ip(i)}..a_{np(n)}\,\varepsilon(p)\right]f(b_1,...b_i...b_n);\ p\ \ permutacion\ en\ [1,n]$$

el término entre corchetes corresponde al determinante.

Desarrollo del determinante por menores.

Una permutación cualquiera puede tomar los valores *p(1)* en *[1,n]* de modo que podemos descomponer el determinante en una serie de sumas factorizadas por los coeficientes a_{1i}

$$\sum_{\{p\}} a_{1p(1)}..a_{ip(i)}..a_{np(n)}\,\varepsilon(p) = a_{11}\sum_{\{p_1\}} a_{2p_1(2)}..a_{ip_1(i)}..a_{np_1(n)}\,\varepsilon(p_1) +$$
$$a_{12}\sum_{\{p_2\}} a_{2p_2(2)}..a_{ip_2(i)}..a_{np_2(n)}\,\varepsilon(p_2) + ...$$
$$a_{1n}\sum_{\{p_n\}} a_{2p_n(2)}..a_{ip_n(i)}..a_{np_n(n)}\,\varepsilon(p_n)$$

para el caso de dimensión 3 el resultado sería

$$a_{11}[a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}] + a_{12}(-1)[a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}] + a_{13}[a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}]$$

que es el determinante de una matriz cuadrada 3x3 definida por los coeficientes a_{ij} y desarrollado por los componentes de su primera fila. Los términos entre corchetes son los determinantes de los menores correspondientes a los elementos de la primera fila de la matriz a_{ij}.

Cada sumando del determinante contiene n factores y cada factor pertenece a una fila y columna que no se repiten debido al carácter biyectivo de una permutación. Por ejemplo, si en un sumando aparece el factor a_{32} no habrá mas factores de la fila y columna correspondiente, es decir, no existirá a_{33} ni a_{12}. Representado los a_{ij} en una tabla, podemos comprender el cálculo de los menores en el que se eliminan los elementos correspondientes a la fila y la columna del menor. Un desarrollo por medio de menores es válido para dimensiones superiores evaluando los $\varepsilon(p_i)$ adecuadamente. Por ejemplo para los componentes p_2 evaluamos las permutaciones hasta la tupla destino $(b_2,b_1,b_3,b_4\ldots\ldots b_n)$, lo cual equivale al determinante de la sub-matriz que elimina el resto de los componentes a_{1j} (fila 1) y a_{i2} (columna 2), es decir, el menor M_{12}. Dado que la tupla destino no es la $(b_1,b_2\ldots b_n)$ hay que multiplicar el resultado por (-1) tantas veces como trasposiciones necesarias. En este caso hay solo una trasposición y por tanto hay que multiplicar por -1 los sumandos correspondientes a p_2. El mismo sistema se puede seguir para p_n evaluando las permutaciones hasta "la mas ordenada posible"; las siguientes serían $(b_3,b_1,b_2,b_4\ldots\ldots b_n)$, $(b_4,b_1,b_2,b_3,b_5\ldots\ldots b_n)\ldots\ldots$, y luego introducir las trasposiciones correspondientes hasta $(b_1,b_2\ldots.b_n)$. El número de trasposiciones es igual a $j-1$, donde j es la columna del menor m_{ij} y el signo correspondiente a estas trasposiciones es $(-1)^{j-1}$. Se puede desarrollar el determinante por los menores de otra fila distinta a la primera. Basta recordar que cualquier fila se pueden trasponer varias veces hasta que sea la primera y esta operación introduce el correspondiente cambio de signo. Si partimos de la fila i, habrá que hacer $i-1$ trasposiciones con las filas precedentes para que ocupe el primer lugar, lo que introduce un factor adicional $(-1)^{i-1}$. Por tanto, se puede generalizar la fórmula del determinante de esta forma

$$\det(M) = \sum_j a_{ij}(-1)^{i+j}\det(m_{ij})$$

donde m_{ij} es la sub-matriz correspondiente al menor fila i columna j.

Matriz traspuesta : La fila i de la matriz A es la columna i de la matriz traspuesta A^T. En componentes $a_{ij}=(a^T)_{ji}$.

Producto de matrices y trasposición

$$(MN)_{ij} \equiv m_{ik} n_{kj};$$
$$(MN)^T_{ij} = m_{jk} n_{ki} = n^T_{ik} m^T_{kj} = \left(N^T M^T\right)_{ij} \Rightarrow$$
$$(MN)^T = N^T M^T$$

Determinante de una matriz traspuesta

$$f(x_1, x_2 ... x_i ... x_j ... x_n) = \left[\sum_{\{p\}} a^T{}_{1p(1)} .. a^T{}_{ip(i)} .. a^T{}_{np(n)} \, \varepsilon(p) \right] f(b_1, ... b_i ... b_n)$$
$$\Rightarrow \det(A^T) = \left[\sum_{\{p\}} a_{p(1)1} .. a_{p(i)i} .. a_{p(n)n} \, \varepsilon(p) \right]$$

Si aplicamos la permutación inversa p^{-1} a los índices de cada sumando tenemos

$$a_{p(1)1} .. a_{p(i)i} .. a_{p(n)n} \rightarrow a_{1p^{-1}(1)} .. a_{ip^{-1}(i)} .. a_{np^{-1}(n)}$$

es evidente que se trata del mismo valor numérico y que cada factor de la segunda expresión está también en la primera y al revés. Por otro lado $\varepsilon(p) = \varepsilon(p^{-1})$ y los conjuntos $\{p\}$ y $\{p^{-1}\}$ son iguales y por tanto el determinante de una matriz y de su traspuesta es el mismo $det(A)=det(A^T)$

Determinante del producto de matrices.

Los términos del determinante de un producto de matrices serán de la forma(convenio de suma de Einstein)

$$m_{1\alpha} n_{\alpha p(1)} .. m_{i\eta} n_{\eta p(i)} .. m_{nw} n_{wp(n)} \varepsilon(p); \;\; \alpha, \beta .... en \; [1, n]$$

tomemos los sumandos en que haya dos índices griegos iguales, por ejemplo $\alpha=\beta$. Dada una permutación p, siempre se puede encontrar otra p' que invierta los valores correspondientes de alfa y beta : $p'(1)=p(2)$, $p'(2)=p(1)$ y que mantenga el resto de valores de p; y por tanto $\varepsilon(p) = -\varepsilon(p')$. El resto de factores que no dependen de $\alpha=\beta$ se mantienen iguales en p y en p' y por tanto la suma correspondiente se anula. Por tanto los índices griegos en el determinante se reducen al caso en que todos los índices son distintos, es decir, el caso en que los índices griegos son parte de una permutación cualquiera q en [1,n] independiente de p.

$$m_{1q(1)} n_{q(1)p(1)} .. m_{iq(i)} n_{q(i)p(i)} .. m_{nq(n)} n_{q(n)p(n)} \varepsilon(p); \;\; \alpha, \beta .... en \; [1, n]$$

reagrupando términos tenemos

$$\left[m_{1q(1)} .. m_{iq(i)} .. m_{nq(n)} \right] \left[n_{q(1)p(1)} .. n_{q(i)p(i)} .. n_{q(n)p(n)} \right] \varepsilon(p)$$

aplicando q^{-1} a los índices del segundo corchete y multiplicando por $\varepsilon(qq^{-1}) = \varepsilon(q)\varepsilon(q^{-1}) = 1$ tenemos

$$\left\{\left[m_{1q(1)}..m_{iq(i)}..m_{nq(n)}\right]\varepsilon(q)\right\}\left\{\left[n_{1q^{-1}p(1)}..n_{iq^{-1}p(i)}..n_{nq^{-1}p(n)}\right]\varepsilon(q^{-1}p)\right\};\ \varepsilon(q^{-1}p)=\varepsilon(q^{-1})\varepsilon(p)$$

que corresponden, uno por uno a los términos del producto de los determinantes de *M* y de *N* calculados por separado y por tanto

$$\det(MN)=\det(M)\det(N)$$

Matriz inversa.

Podemos expresar la fórmula de cálculo del determinante mediante un producto de matrices de esta forma

$$\det(M)=\sum_j a_{ij}(-1)^{i+j}\det(m_{ij});\ c_{ij}=(-1)^{i+j}\det(m_{ij})\Rightarrow r_{ii}=\sum_j a_{ij}c_{ji}^T=\det(M)$$

la matriz c_{ij} se denomina *matríz de cofactores* y el resultado son los coeficientes (*ii*) de la diagonal de una matriz resultado *r*, todos con un mismo valor correspondiente al determinante de *M*. El valor de los elementos no diagonales de *r* será

$$r_{ik}=\sum_j a_{ij}c_{jk}^T\ ;\ i\neq k$$

donde las componentes c^T_{jk} corresponden a menores m_{kj} que no anulan la fila *i* en su cálculo, sino otra distinta (la *k*) y por tanto la fórmula anterior corresponde al cálculo del determinante de una matriz con la fila *i* repetida y por tanto

$$r_{ik}=\sum_j a_{ij}c_{jk}^T=0;\ i\neq k$$

De estos resultados, y suponiendo *det(M)* ≠ 0, podemos definir inmediatamente la matriz inversa de *M* como

$$M_{ij}^{-1}=\frac{1}{\det(M)}c_{ij}^T\ ;\ c_{ij}=(-1)^{i+j}\det(m_{ij})$$

Inversa del producto de dos matrices

Por la definición de matriz inversa tenemos

$$\left.\begin{matrix}MN(MN)^{-1}\\(MN)^{-1}MN\end{matrix}\right\}=I$$

y multiplicando adecuadamente por las inversas de las matrices *M* y *N* ,en los dos casos llegamos al mismo resultado

$$(MN)^{-1}=N^{-1}M^{-1}$$

Evidentemente si podemos factorizar una matriz compleja en otras mas simples el cálculo de la inversa se puede simplificar por aplicación de este teorema.

Relación entre los símbolos ε_{ijk} y δ_{ij}

De la definición de ε_{ijk} y de los vectores base *e* tenemos

$$\left(\bar{e}_i \times \bar{e}_j\right) \bullet \bar{e}_k \equiv \varepsilon_{ijk}; \quad \left.\begin{array}{l} \bar{e}_i = \delta_{1i}\bar{e}_1 + \delta_{2i}\bar{e}_2 + \delta_{3i}\bar{e}_3 \\ \bar{e}_j = \delta_{1j}\bar{e}_1 + \delta_{2j}\bar{e}_2 + \delta_{3j}\bar{e}_3 \\ \bar{e}_k = \delta_{1k}\bar{e}_1 + \delta_{2k}\bar{e}_2 + \delta_{3k}\bar{e}_3 \end{array}\right\}$$

lo que nos lleva a identificar ε_{ijk} con el siguiente determinante

$$\varepsilon_{ijk} = \det\begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2i} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix}$$

si multiplicamos lo anterior por ε_{lmn} tenemos

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det\begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2i} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{2l} & \delta_{3l} \\ \delta_{1m} & \delta_{2m} & \delta_{3m} \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} \end{pmatrix}$$

ya que el producto de determinantes es igual al determinante del producto de matrices y que el determinante de una matriz y su traspuesta son iguales tenemos

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det\left\{\begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2i} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{pmatrix}\right\}$$

podemos ver que el primer elemento, fila 1 columna 1, del producto de matrices vale

$$\delta_{1i}\delta_{1l} + \delta_{2i}\delta_{2l} + \delta_{3i}\delta_{3l} = \delta_{il}$$

y de forma análoga el resto de componentes, de modo que llegamos a la siguiente expresión que relaciona ε y δ

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det\begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix}$$

El lector puede comprobar que la relación $\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{mnl} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ deducida anteriormente es una consecuencia de la expresión mas general anterior.

Bibliografía

[1] Teorema de Euler
http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_rotación_de_Euler
[2] Física de M.Alonso y E.J.Finn –Volumen 1: Mecánica. 1968
[3] *Análisis elemental del movimiento bajo fuerza central de tipo Newtoniano.*
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix
[5] *Introducción a la Mecánica Analítica.* En esta misma web por este mismo autor.
[6] *Espacio,tiempo,materia y vacío.* En esta misma web por este mismo autor.
[7] *Introducción a la Termodinámica.* En esta misma web por este mismo autor.
[8] *Sobre la Ecuación de Ondas.* En esta misma web por este mismo autor.