Polvos fractales de Cantor y Koch modificados de dimensión entera

Modified Cantor dust and Koch curve with entire dimension

José Salvador Ruiz Fargueta, srfargueta@gmail.com, Telefónica de España (Movistar), Valencia, España.

Cuando no eran conocidos los fractales resultaba extraño hablar de dimensiones no enteras. Ahora que son conocidos nos puede ayudar a comprenderlos mejor los casos de figuras fractales con dimensión entera.

Palabras clave: Fractales por dislocación, polvo de Cantor, curva de Koch

When the fractals was not known it was strange to speak of non entire dimensions. Now that they are known it can help us to understand them better the cases of figures fractals with entire dimension.

Key-words: Fractal by displacement, Cantor dust, Koch curve.

1.-La segunda revolución antieuclidiana, según Mandelbrot

Según Mandelbrot [2], la primera chispa de la teoría de fractales saltó el 20 de junio de 1877, en una carta de Cantor al también matemático Dedekind. En ella ponía en tela de juicio determinados fundamentos y la propia la noción de la geometría. Le parecía haber demostrado que un cuadrado no contenía más puntos que los que contiene uno de sus lados, o que para determinar la posición dentro del mismo sólo necesitaba un número y no dos, como todo el mundo sabe. La propia noción de dimensión parecía estar en peligro, pero Dedekind no tardaría en demostrar que el concepto de dimensión sobrevivía a este *ataque*. Basándose en las nuevas ideas que se encontraban en el germen de estos nuevos planteamientos, Mandelbrot concibió una nueva geometría de la naturaleza, que desarrolló y aplicó ampliamente.

En 1884, Cantor, y en 1904, Koch engendraron una especie de *monstruos o quimeras*, unas figuras intermedias entre puntos y líneas, líneas y superficies, o superficies y volúmenes, a las que Mandelbrot llamó fractales. Para ellas, en general, su dimensión de Hausdorff (y Besicovitch) o dimensión fractal es una fracción, y su valor es diferente a su dimensión topológica y normalmente mayor, aunque veremos en este trabajo que se pueden construir infinitos fractales con la misma dimensión fractal y topológica.

En 1890, Giuseppe Peano describió una sucesión de polígonos (dimensión topológica 1) que resulta llenar un cuadrado de un modo cada vez más apretado, de forma que el límite de dicha sucesión pasa por todos sus puntos, *llenando una superficie* (dimensión topológica 2). Todos estos *monstruos* fueron considerados *estructuras patológicas* por los matemáticos de la época pero Mandelbrot supo ver en ellos objetos equivalentes con los que hemos estado familiarizados desde siempre. Los polígonos de Peano están, en cierta forma, en los retículos de plantas, redes fluviales o cortes cerebrales, el polvo de Cantor aleatorio se puede observar al comparar los periodos de transmisión limpia y los periodos con errores en las líneas de datos y la curva de Koch o copo de nieve, con cierto grado de aleatoriedad, nos puede aproximar a las costas de los países.

Gracias a estas construcciones matemáticas y a la labor de Benoît Mandelbrot, la revolución intelectual resultante nos ha ofrecido un nuevo instrumento para estudiar problemas de hidrología, turbulencia, anatomía o botánica, entre una gran variedad de disciplinas.

En los últimos cincuenta años nos hemos ido acostumbrando a las dimensiones no enteras que presentan los fractales, su llamada dimensión fractal. Los polvos fractales tienen una dimensión no entera entre 0 y 1 (el polvo de Cantor: 0,6309297), las costas fractales poseen una dimensión no entera entre 1 y 2, y las superficies fractales una dimensión entre 2 y 3. Ahora veremos que modificando los *viejos monstruos* de Cantor y Koch podremos obtener infinitos polvos fractales cuya dimensión será, sorprendentemente, entera.

<u>2.-Polvo de Cantor/ Polvo modificado de Cantor de dimensión entera</u>

El polvo de Cantor es una construcción geométrica que, como vemos en la Fig.1, surge de sustraer el tercio central a un segmento. El método seguido en la primera iteración se va repitiendo sucesivamente, y en el límite tendríamos infinitos segmentos aislados que tenderían a puntos.

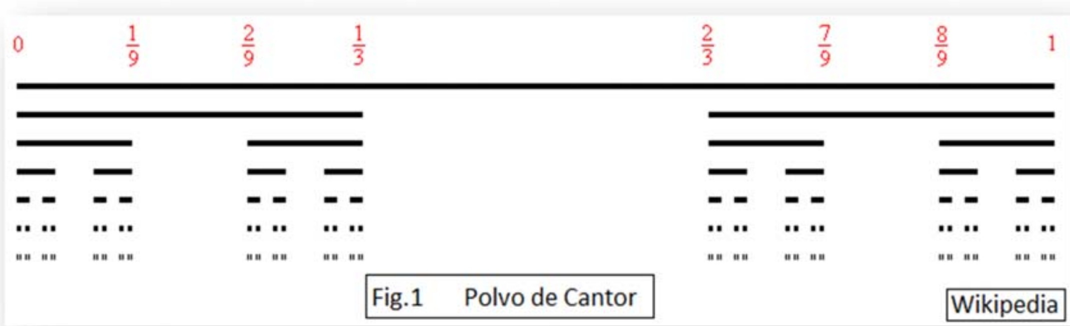


Fig.1 Polvo de Cantor

El segmento inicial queda pulverizado en infinitos segmentos de longitud tendente a cero, además la longitud de la suma de todos los segmentos también tiende a cero, pues a cada iteración esta suma se multiplica por 2/3, por lo que el término n de la sucesión geométrica será $(2/3)^n$ que tiende a cero (medida cero). La dimensión fractal de este polvo se halla analizando el método seguido en la primera iteración: a un segmento dividido en 3 partes le quedan 2 de esas partes por la sustracción de la parte central: Dim. Fractal = log (2) / log (3) = 0,63092… Una dimensión entre cero y uno, entre la dimensión del punto y de la recta.

La siguiente imagen representa la construcción del polvo de Cantor modificado:

(***fractal por dislocación o desplazamiento***)[4]

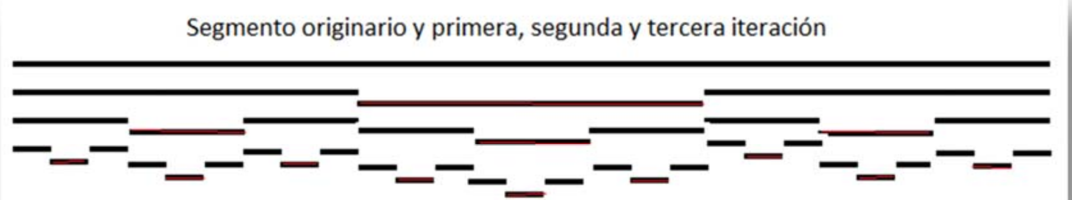


Fig.2 Polvo de Cantor modificado (Los segmentos centrales se eliminan en el polvo original)

Aquí no se sustrae el tercio central de cada segmento, sólo se escalona. En este caso la suma de todos los segmentos en cualquiera de las sucesivas iteraciones seguirá midiendo lo mismo que el segmento originario. <u>Al final se habrá pulverizado el segmento inicial en infinitos segmentos cuya suma total seguirá midiendo lo mismo</u>. La dimensión ahora será Dim. Fractal = log(3)/log (3) = 1. *Un polvo fractal de dimensión entera, concretamente dimensión unidad*.

<u>3.-Curva de Koch/ Curva modificada de Koch (polvo fractal de Koch de dimensión entera: ***fractal por dislocación o desplazamiento***). Polvo fractal de dimensión 2.</u>

Tal como se comentaba más arriba, la curva que creó Koch (año 1904) es un objeto geométrico que se sitúa entre una línea y una superficie: *ocupa más espacio que una línea, pero menos que una superficie.* Concretamente es un fractal de dimensión 1,26186…

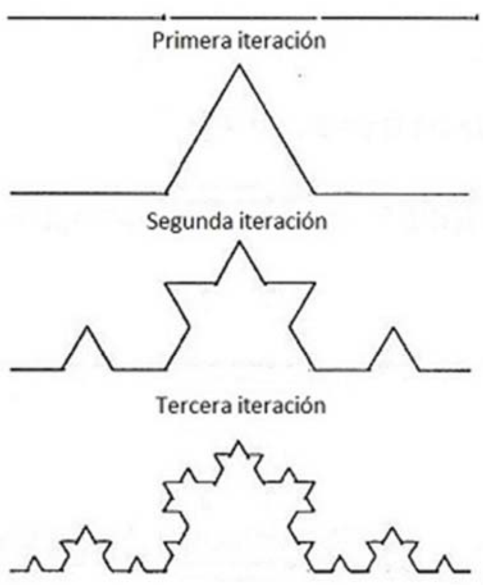


Fig. 3 Construcción de la curva de Koch.

Partiendo de un segmento de medida 3, obtenemos otro de medida 4 donde se ha sustituido su parte media por dos segmentos en ángulo de 60º. Si nos fijamos en la primera iteración calcularemos la dimensión fractal dividiendo el log (4) por el log (3). Después de n iteraciones, la longitud de la curva será $(4/3)^n$. Para n infinito la longitud será infinita.

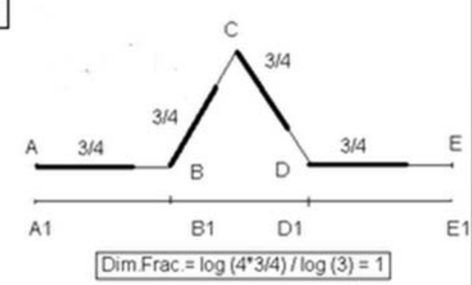
Tal como vemos en la construcción de la curva de Koch, es continua pero no derivable, pues no se puede trazar tangente a ninguno de ellos.

En general la dimensión encontrada será igual a la siguiente expresión:

Dimensión = D = log N / log (1/r), donde N son las partes en las que se ha descompuesto el todo, las cuales se pueden deducir de él por una homotecia de razón r. En la referencia [3] encontramos definiciones de la dimensión de homotecia y de la dimensión (fractal) de contenido o dimensión de Hausdorff-Besicovitch, entre otras.

La curva de Koch modificada (polvo de Koch) se presenta en la siguiente figura. Vemos la primera iteración y el cálculo de su dimensión [4]:

Fig.4



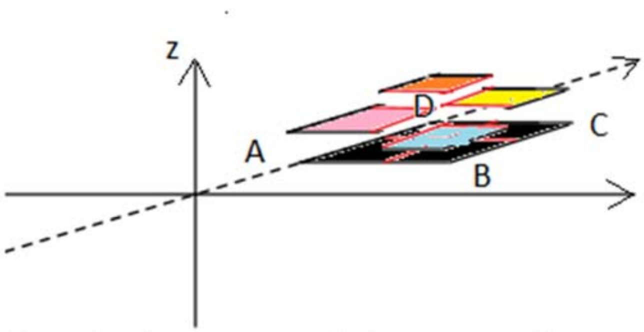
Polvo de Cantor-Koch de dim. fractal entera.

De los cuatro segmentos AB, BC, CD, DE de la primera iteración sólo se dibujan las ¾ partes iniciales, después en la siguiente iteración se realizará la misma operación. Con esto conseguimos que la longitud total de los segmentos, en cada iteración, siempre sea igual a la longitud del segmento originario. ***Al final tendremos el segmento original pulverizado en infinitos segmentos de longitud tendente a cero, pero cuya suma total seguirá siendo igual al segmento origen***. Además, a pesar de lo intrincada de la construcción, ***la dimensión del polvo resultante será entera e igual a la unidad.***

Es de resaltar que tanto Mandelbrot [2], como Falconer [1] indican que en los objetos fractales se cumple que su dimensión es mayor que su dimensión topológica. En estos casos especiales en que la recta se disloca o escalona sin perder ni ganar integridad la dimensión del fractal resultante sigue siendo, tal como vemos, la misma dimensión que la de la recta original, es decir la unidad. ***Y es lógico, porque si la dimensión de un fractal nos indica el espacio que es capaz de llenar, los fractales que hemos construido por dislocación no ocupan más espacio que la recta de la que proceden.***

La dimensión es mayor que su dimensión topológica en los fractales continuos, cuando observamos pliegues (como ocurre en la curva original de Koch), pero cuando simplemente existen dislocaciones, sin ganar ni perder longitud en las progresivas iteraciones, la dimensión sigue siendo la misma que la recta original.

Fig. 4 Polvo fractal de dimensión 2



El cuadrado ABCD, en el plano xy, se descompone en cuatro cuadrados que se dislocan sobre el mismo a diferente altura.

Si en lugar de partir de un segmento partimos de una superficie plana ocurrirá lo mismo, siempre que en las progresivas iteraciones sólo haya dislocación y no se gane ni se pierda superficie. ***El fractal resultante seguirá teniendo dimensión 2* [fig.4].** El proceso, en general, consiste en una pulverización sistemática de una entidad geométrica mediante la dislocación de sus partes de forma iterada. Cada una de ellas sigue pulverizándose paso a paso de la misma forma que el ente original. En la figura, el cuadrado original se convierte en cuatro cuadrados situados sobre él, a diferente altura cada uno de ellos. Esa posición relativa de cada uno de ellos respecto al original se vuelve a repetir en la siguiente iteración. Entonces el cuadrado original se habrá convertido en 16 cuadraditos dislocados, a diferentes alturas, cuya superficie total será la misma que la del cuadrado original.

Los viejos monstruos de Cantor y Koch, ahora modificados, nos vuelven a plantear preguntas sobre los fractales, que creíamos conocer, y sobre la dimensión. Infinitos segmentos o superficies infinitesimales cuya suma sería capaz de volver a recomponer un segmento o una superficie (o incluso un objeto 3D) originales…¿siguen teniendo dimensión 1 ó dimensión 2?

4.-Bibliografía

[1]Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications 2nd edition KJ Falconer - Wiley, 2003.

[2]Pensar la matemática, B. Mandelbrot, et al. 2ªEd. Tusquets Editores, Barcelona 1988.

[3]Los objetos fractales, B. Mandelbrot,Tusquets Editores, Barcelona 1987.

[4]Polvo fractal con dimensión entera, J.S. Ruiz Fargueta, Ciencia abierta (Universidad de Chile), nº 31.