Cosmología para la enseñanza media

P. Kittl[1] y G. Díaz[2]

[1]Colegio Ecológico Paine, Los Aromos 107,Hospital, Paine, Santiago.
[2]Departamento de Ingeniería Química, Biotecnología y Materiales, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 2777, Santiago, Chile.
e-mail: gediaz@ing.uchile.cl

Resumen: Se trata de exponer una cosmología simple tratando de explicar en forma elemental e intuitiva las partes más complejas. Se hace un llamado a la intuición para entender aquellas que requieren recursos del análisis matemático.

1.- La cuarta dimensión

Como en la cosmología moderna, el universo tiene, al menos, cuatro dimensiones, trataremos de que se entienda esto.

Veamos el caso de una dimensión. Sobre una recta tomaremos dos semiejes opuestos (Fig. 1) O´x y Ox´. Se ve que no podemos superponerlos a no ser que giremos un ángulo y lo desplacemos O´O. Esta operación, giro y traslación, implica que la recta está sobre un plano en el que se realiza el giro.

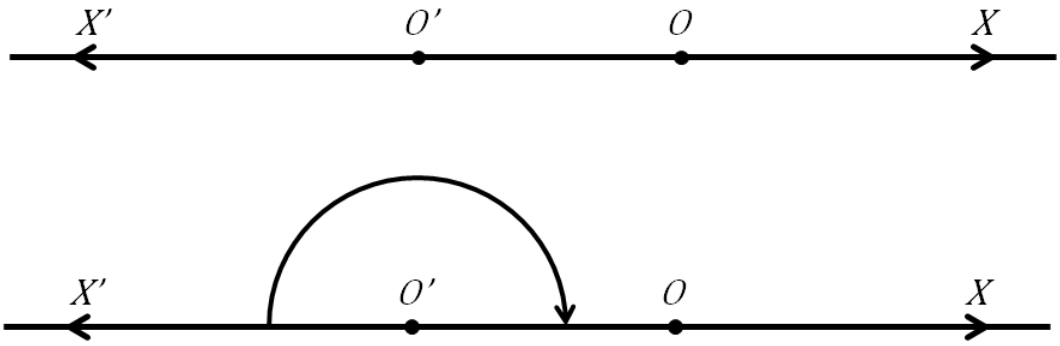

Fig.1

Así que estamos obligados a aceptar que además del desplazamiento sobre la recta podemos desplazarnos fuera de ella. La existencia de una dimensión nos obliga a pensar que esa, una dimensión, está sumergido en un espacio de dos dimensiones.
Sea ahora el caso de dos dimensiones. En un plano tomamos dos sistemas de coordenadas (Fig. 2), uno dextrógiro y otro levógiro, (O, x,y) y (O´,x´,y´). Si al sistema O´ lo desplazamos O´O y lo giramos el ánguloα que forman x con x´, solo podremos superponer los dos sistemas si giramos uno fuera del plano un ángulo π. El plano con sus dos sistemas de coordenadas, nos obliga a suponer la existencia del espacio en que está el plano sumergido.

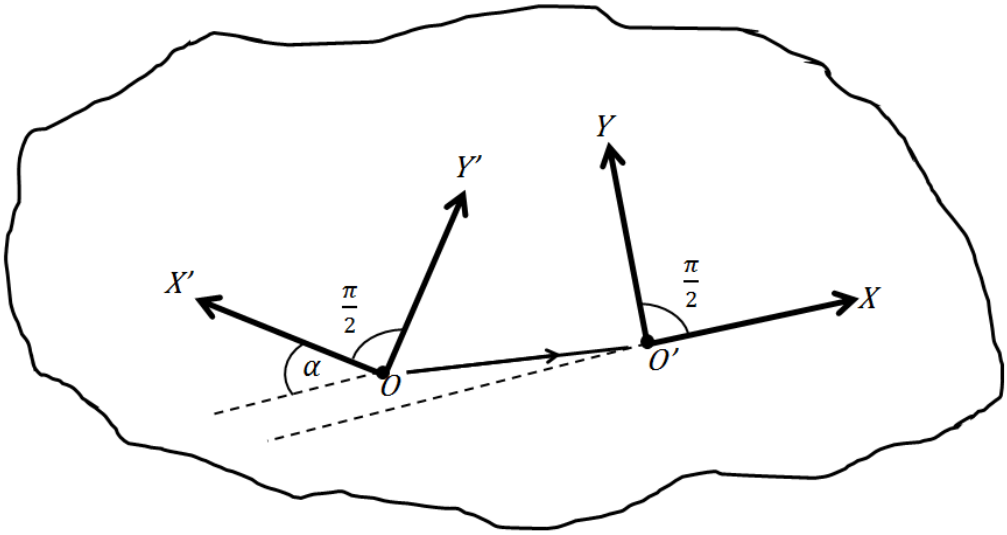

Fig. 2

Veamos el caso en tres dimensiones. Sean los triedros de coordenadas (O,x,y,z) y (O´,x´,y´,z´) uno dextrógiro y el otro levógiro (Fig. 3), se pueden superponer O con O´, x con x´e y con y´,pero no z con z´. Para esto último hace falta transformar z´en –z´, o sea, un giro en el espacio de cuatro dimensiones en que está sumergido el de tres donde están los dos sistemas coordenados O y O´.

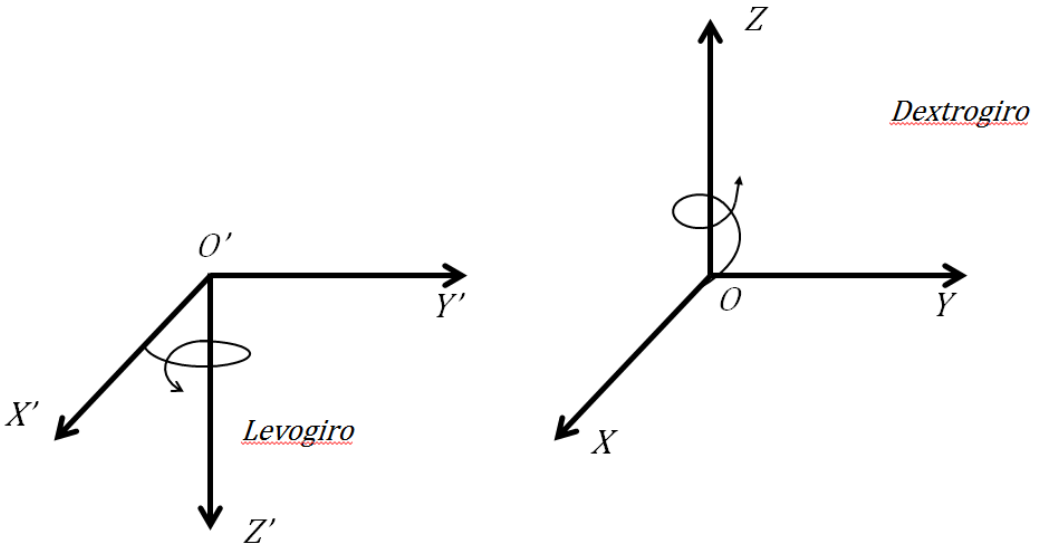

Fig. 3

En una dimensión para lograr la superposición bastaba transformar x´en –x, en dos también y lo mismo en tres. En los tres casos esto se puede lograr con un giro en un espacio de una dimensión más.

Algebraicamente una esfera en el espacio de una dimensión es $x^2 = R^2$, en dos dimensiones es $x^2 + y^2 = R^2$, en tres $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y en cuatro $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$(Fig.4).

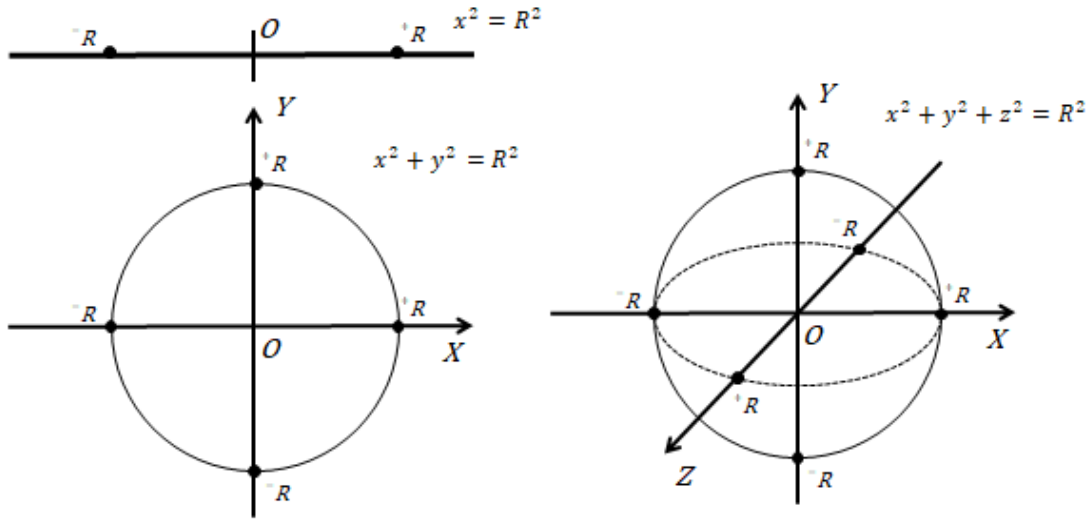

Fig. 4

No podemos dibujar en forma sencilla el caso $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$ pero es importante que la sección de la esfera de cuatro dimensiones con los planos x = 0, o y = 0, o z = 0, o u =0 da una esfera en tres dimensiones. Las dimensiones en tres da en dos y la en dos en una.

Así podemos entender que nuestro universo de tres dimensiones está sumergido en uno de cuatro. Este universo en que estamos es una cáscara de un espacio de cuatro o más dimensiones. La física actual puede hablar de infinitas dimensiones.
Algo muy interesante en la esfera de dos dimensiones, el círculo, es que si suponemos seres lineales que no pueden salir de esa esfera, que es un círculo, es que para ellos el mundo es ilimitado aunque finito.. Esto ocurre en la esfera de tres dimensiones y en la de cuatro. Por lo tanto estamos en un espacio de tres dimensiones sumergido en uno de cuatro, ilimitado pero finito.

2.- El método del análisis dimensional

La forma de las leyes de la física, puede determinarse por el análisis dimensional, salvo un coeficiente numérico que puede determinarse por una experiencia o por comparación con otra teoría.

En el mundo físico toda observación puede expresarse mediante medidas de tiempo, masa, longitud y temperatura. Estas observaciones tienen una dimensión que denotamos con [T], [M], [L], [θ], afectadas por un factor numérico y expresadas con unidades determinadas. Así, por ejemplo, la velocidad de la luz c tiene las dimensiones

$$[c] = [LT^{-1}] = \left[\frac{L}{T}\right] \qquad (1)$$

Su valor es:

$$c = 3 \times 10^{10} \frac{cm}{s} \qquad (2)$$

Todos los valores numéricos que se dan están aproximados hasta la última cifra significativa que se indica en cada caso.

Así que tendríamos:

$$\begin{aligned} \lfloor v \rfloor &= [T^{-1}]\ (frecuencia) \\ [v] &= [LT^{-1}]\ (velocidad) \\ [a] &= [LT^{-2}]\ (aceleración \\ [E] &= [mv^2] = [FL] = [ML^2T^{-2}]\ (energía) \\ [F] &= [ma] = [MLT^{-2}]\ (fuerza) \\ [T] &= [ML^2T^{-2}](trabajo) \end{aligned} \quad (3)$$

Planck [1] en 1906 postuló que todas las leyes de la física pueden expresarse con cuatro constantes:

1. La velocidad de la luz c
2. La constante de la gravitación universal f
3. La constante de Planck h
4. La constante de Boltzmann k

La constante de la velocidad de la luz es una de las más importantes, es la base de la teoría de la relatividad, ya dimos su valor antes (1). De una importancia capital es la constante de la gravitación universal f, que permite describir todos los movimientos que observa la astronomía. La fuerza F con que se atraen dos cuerpos de masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que los separa.

$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}$(4)

de (4) se obtiene

$$f = F\frac{r^2}{m_1 m_2} \qquad (5)$$

y su dimensión y valor son

$$\begin{aligned} [f] &= \left[\frac{Fr^2}{m_1 m_2}\right] = \left[\frac{ML}{T^2}\frac{L^2}{M^2}\right] = [L^3M^{-1}T^{-2}] \\ f &= 6{,}67 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2} \end{aligned} \quad (6)$$

Planck descubrió que la energía E se divide en paquetes ΔE de acuerdo a la fórmula

$$\Delta E = h\nu (7)$$

donde h es la constante de Planck y ν es la frecuencia. El ejemplo más relevante lo constituye la luz que se divide en fotones. El valor de la constante h es

$$\begin{aligned} [h] &= [L^2MT^{-1}] \\ h &= 6{,}63 \times 10^{-27} cm^2 g s^{-1} \end{aligned}$$

En el caso de la k de Boltzmann la energía cinética media de una molécula a la temperatura absoluta θ es:
$\Delta E = \theta k$(8)

el valor de k es

$$[k] = [L^2 M T^{-2} \theta^{-1}]$$
$$k = 1{,}38 \times 10^{-16} cm^2 g s^{-2} K^{-1} \quad (9)$$

K son grados Kelvin.

Con los valores de c, f, h y k Planck determinó los valores l_0, m_0, t_0, θ_0 unidades de longitud, mas, tiempo y temperatura que reemplazados en las fórmulas dimensionales dan las constantes. Obtuvo:

$$\begin{aligned} \ell_0 &= c^{3/2} f^1 h^{1/2} = 4{,}04 \times 10^{-33} cm \\ m_0 &= c^{1/2} f^{-1/2} h^{1/2} = 5{,}46 \times 10^{-5} g \\ t_0 &= c^{-5/2} f^{1/2} h^{1/2} = 1{,}35 \times 10^{-43} s \\ \theta_0 &= c^{5/2} f^{-1/2} h^{1/2} k^{-1} = 3{,}56 \times 10^{32} K \end{aligned} \quad (10)$$

Las unidades l_0, m_0, t_0, θ_0 son las mínimas de longitud, masa y tiempo que pueden existir y la θ_0 la temperatura máxima. Todo expresado en el sistema centímetro cm, gramo g, segundo s y grados Kelvin K. Tomemos un ejemplo, la velocidad de la luz es entonces:
$c = \frac{\ell_0}{t_0} = \frac{4{,}04 \times 10^{-33} cm}{1{,}35 \times 10^{-43} s} = 3 \times 10^{10} \frac{cm}{s}$(11)

Para obtener los l_0, m_0, t_0, θ_0 de los valores de c, f, h y k se debe resolver un sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas, que tiene una solución única. Por otro lado, si establecemos las ecuaciones :

$$\begin{aligned} & m_0 c^2 = \frac{f m_0^2}{\ell_0} = k\theta_0 = h\nu_0 = \frac{h}{t_0} \\ & \frac{\ell_0}{t_0} = c \\ & \frac{hc}{\ell_0} = h\nu_0 = \frac{h}{t_0} \end{aligned} \quad (12)$$

donde l_0 es el diámetro de m_0. De las (12) podemos obtener las (10), por ejemplo:

$$m_0 c^2 = \frac{f m_0^2}{\ell_0} \Rightarrow c^2 = \frac{f m_0}{\ell_0} \Rightarrow m_0 = \frac{\ell_0 c^2}{f}$$
$$\ell_0 = c t_0 \ ; \ m_0 = \frac{\ell_0 c^2}{f} \Rightarrow m_0 = \frac{t_0 c^3}{f} \Rightarrow m_0 = \frac{c^3 h}{f c^2 m_0} \quad (13)$$
$$m_0 c^2 = \frac{h}{t_0} \Rightarrow t_0 = \frac{h}{c^2 m_0}$$
$$m_0^2 = c f^{-1} h \Rightarrow m_0 = c^{1/2} f^{-1/2} h^{1/2}$$

La primera de las (12) nos dice que la energía de masa descubierta por Einstein m_0c^2 es igual a la energía gravitatoria (m_0^2f/l_0) descubierta por Newton, igual que al término $k\,\theta_0$descubierta por Boltzmann e igual a la de Planck $h\nu_0$.

Las (12) corresponden al principio de conservación de la energía. Si $m_0c^2 = m_0^2f/l_0$, entonces $m_0c^2 - m_0^2f/l_0 = 0$. La energía de un sistema compuesto por dos masas m_0 que se atraen con la ley de Newton, que es una energía potencial negativa, más la energía de masa m_0c^2 es nula. La energía del sistema es cero. Se debe recordar que la energía potencial es la que hay que agregar al sistema para llevar la materiaal infinito, es una energía que se nos debe, por lo tanto, negativa (ver Nota). La energía que nos puede entregar la masa m_0c^2 es positiva. La materia m_0 se comporta como inerte con energía m_0c^2 , como gravitatoria, como vibrante y como térmica. Es la cuádruple naturaleza de la energía: como masa, como gravitación, como onda vibrante y, finalmente, como calor. Las otras ecuaciones nos ponen en forma explícita la constancia de la velocidad de la luz (Einstein) y su división en paquetes $h\nu$, de Planck. Este sistema con contenido total de energía nula puede crearse de la nada. Es la celda elemental de Planck que tomaremos como base del Universo, como origen del mismo.

3.- La estructura del Universo

Únicamente poseemos las evidencias que obtenemos desde nuestra ubicación en él. De la observación actual, que permite aumentos muy grandes, hemos podido determinar la existencia de galaxias muy lejanas, la velocidad a la que se alejan y su número en cada dirección y distancia. El resultado es con mucha aproximación a una distancia dada su número por unidad de volumen es el mismo y todas se alejan a una misma velocidad proporcional a la distancia a la cual están. Esta proporción se conoce como constante de Hubble y es:

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{s}}{s} = 2{,}10 \times 10^{-18}\mathrm{s}^{-1} \quad (14)$$

Donde s es la distancia a la cual está la galaxia o estrella y ś su velocidad de alejamiento. Como ś tiene dimensión LT^{-1} y s L, su cuociente es T^{-1}. Tomemos en cuenta el corte de una esfera de cuatro dimensiones, $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$, por el plano u = 0, así tenemos la esfera de tres dimensiones $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Supongamos que una esfera aumenta su radio con una cierta velocidad $\dot{R}$, sobre ella tomamos un punto fijo P y sea s la distancia a otro punto P´, el ángulo al centro es ϕ. Si el radio aumenta ΔR la distancia entre los dos punto P y P´ es ahora $(R + \Delta R)\phi$ y antes $R\phi$. Luego aumentó en $\Delta R\phi$, si eso ocurre en un tiempo Δt, la velocidad de alejamiento es $\Delta R\phi/\Delta t$ y como $\Delta R\phi = \Delta S$ es el aumento de la distancia entre los puntos que antes era $S = R\phi$, la velocidad de alejamiento es $\Delta S/\Delta t$, divididapor R es$(\Delta R/\Delta t)/R = \dot{R}/R = H$, constante, independiente de ϕ. (Fig. 5).

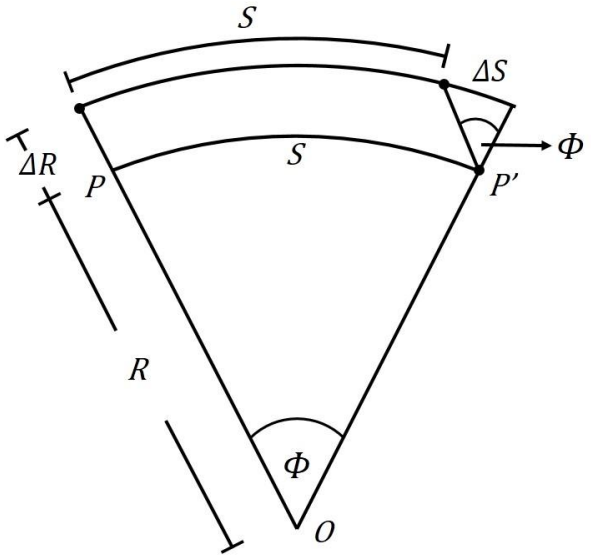

Fig.5

Todo lo anterior nos empuja a admitir que estamos sobre una esfera sobre la cual hay tres dimensiones, sumergida en un espacio de cuatro y en el cual hay un tiempo absoluto t.

Sobre la superficie de la esfera están repartidas las galaxias y las estrellas, en forma uniforme con una masa total M que incluye toda forma de energía. El radio de esa esfera, que llamamos radio de curvatura del Universo, es variable con el tiempo y actualmente creciendo.

4.- La ecuación del Universo

En la celda de Planck encontramos una masa m_0 y una longitud l_0 que vinculamos con la ecuación:

$$m_0c^2 - \frac{m_0^2 f}{l_0} = 0 \quad (15)$$

Vamos a extender esta ecuación, que significa que la celda elemental de Planck tiene energía total nula. La m_0c^2 es la energía positiva de la materia y m_0^2f/l_0 es la energía negativa de la materia gravitatoria, c y f son las constantes fundamentales. Por lo tanto, hacemos que a m_0 la masa mínima le corresponde la masa total del Universo y obtenemos:

$$\begin{gathered} \ell_0 \equiv R \\ m_0 \equiv M \\ m_0c^2 - \frac{f m_0^2}{\ell_0} \equiv Mc^2 - \frac{M^2 f}{R} = 0 \end{gathered} \quad (16)$$

De la (16) se obtiene:

$$\frac{M}{R} = \frac{c^2}{f} = 1.35 \times 10^{28} g cm^{-1} \qquad (17)$$

La ecuación (17) la obtuvo Einstein en 1917 y es [2] un poco diferente

$$\begin{gathered} \frac{M}{R} = \frac{\pi}{2}\frac{c^2}{f} \\ \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \end{gathered} \quad (18)$$

Si se tomara l_0 como $2r_0$, r_0 radio de una esfera de diámetro $l_0$se tiene que la ecuación (17) sería $M/R = 2(c^2/f) \approx 2.70 \times 10^{28}$ muy cerca del valor que da Einstein.

La ecuación (18) la obtuvo Einstein mediante la relatividad general y obviamente con el uso del cálculo tensorial.

La ecuación (18) puede compararse con la realidad, así se puede estimar la densidadρ_0 del Universo sabiendo que ésta es uniforme y pudiendo determinar la distancia y la masa de las galaxias, el valor aproximado de $M \approx 8.67 \times 10^{56}$g.

La forma de determinar M es a partir del área de cuatro dimensiones $2\pi^2R^3$, que es un volumen. El valor estimado de $\rho \approx 2 \times 10^{-29} gcm^{-3}$ nos da para M un valor, si conocemos R que se estima actualmente en $R \approx 1.3 \times 10^{28}$ cm, así que:

$$\frac{M}{R} = 2\pi^2 \rho R^2 \approx 6{,}67 \times 10^{28} gcm^{-1} (19)$$

La ecuación de Einstein da:

$$\frac{M}{R} = \frac{\pi}{2}\frac{c^2}{f} \approx 2{,}12 \times 10^{28} gcm^{-1} (20)$$

Los números son parecidos, son del mismo orden, pero para lograr una mayor concordancia introducimos [3] las energías de temperatura, de ondas y electricidad en un número $N = M/\mu_0$ donde μ_0 es el gravitón, que transporta la gravedad entre una masa y el centro de la curvatura donde se ubica la masa total M. La frecuencia del gravitón $\nu = c/R$ nos da su energía $\mu_0 c^2 = hc/R$, de donde $\mu_0 = h/cR$ en nuestro caso:

$$\mu_0 = \frac{h}{cR} = \frac{6{,}63 \times 10^{-27} cm^2 g s^{-1}}{3 \times 10^{10} cm\ s^{-1} \times 1{,}3 \times 10^{28} cm} \approx 1{,}7 \times 10^{-65} g$$
$$N = \frac{8{,}67 \times 10^{56} g}{1{,}70 \times 10^{-65} g} \approx 5{,}1 \times 10^{121} \quad (21)$$

La masa del gravitón es, con mucha aproximación la obtenida por De Broglie y N es el número de partículas del Universo según esta teoría. El gravitón puede estar en cualquier parte del interior de la esfera y transmite instantáneamente la gravedad, por eso no puede ser detectado.

5.- La dinámica del Universo

Suponemos que el Universo nace en una celda de Planck y luego crece hasta un máximo decreciendo después, hasta ser de nuevo una celda de Planck. Este proceso se repite y el Universo es oscilante, que es la teoría que desarrollaremos en lo que sigue. Hay otros casos [3,4,5] citados en estos trabajos, donde el universo se expande sin límites. Para establecer la ecuación del problema debemos tener en cuenta que, salvo pequeños movimientos laterales, toda la materia del Universo se expande en la dirección del radio de curvatura R con una velocidad $\dot{R}$. Si consideramos un sistema en reposo, que no gira, aunque puede tener un movimiento uniforme de traslación, con origen en el centro O de la esfera en el

espacio de cuatro dimensiones, la velocidad $\dot{R}$ produce una variación en la materia prevista por la teoría de la relatividad. La materia de masa M sufre una variación

$$M(R) = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{\dot{R}^2}{c^2}}} \quad ; \quad M = 2\pi^2\rho R^3$$
$$M(\dot{R}) = \frac{2\pi^2\rho_0 R^3}{\sqrt{1-\frac{\dot{R}^2}{c^2}}} \quad ; \quad \rho(\dot{R}) = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{\dot{R}^2}{c^2}}} \qquad (22)$$

Llevando las ecuaciones (22) a la (19)

$$\frac{2\pi^2\rho_0 R^3}{R\sqrt{1-\frac{\dot{R}^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{f} \qquad (23)$$

La ecuación (23) es una ecuación diferencial que no trataremos aquí y que se puede ver en [3], pero de la que mostraremos los resultados que se obtienen de allí. El valor máximo de R se llama R_m, el semiperíodo T/2, la velocidad $\dot{R}$, la densidad ρ_0 y la edad y el valor de R actual del Universo t son:

$$\begin{gathered} R \approx 10^{28} cm \ \ (actual) \\ \dot{R} = HR \approx 2{,}10 \times 10^{10} cms^{-1} \cong 0{,}7c \ \ (actual) \\ \rho = 2 \times 10^{-29} gcm^{-3} (actual) \\ \rho_0 = \frac{c^2\sqrt{1-\frac{\dot{R}^2}{c^2}}}{2\pi^2 f R^2} \cong 4{,}88 \times 10^{-30} gcm^{-3} \\ R_m \approx 1{,}636 \times 10^{28} cm \ \ (máxima) \\ \frac{T}{2} \approx 31.300 \times 10^6 años \ \ (semiperiodo) \\ t \approx 16.800 \times 10^6 años \ \ (actual) \end{gathered} \qquad (24)$$

En las (24) se ha tomado en cuenta las energías térmicas, de radiación y de la electricidad. Los datos obtenidos que se derivan de la constante de Hubble y la densidad estimada del Universo. Consultar también [4] y [5].

Epílogo

En este esquema suponemos la existencia del tiempo del espacio multidimensional y las leyes de la naturaleza. Si esto existió siempre o salió de la nada en algún momento, no lo sabemos. Pero la aparición de una celda de Planck, es muy poco probable, tanto en el tiempo como en el espacio. Luego los universos aparecen separados, unos de otro, en tiempo y en espacio.

Nota

La expresión de la energía gravitatoria que corresponde a la energía de masa, se puede obtener mediante el análisis dimensional. Las dimensiones de la energía de masa son $[m_0c^2] = [ML^2/T^2]$. Para obtener la gravitatoria que tiene dimensiones $[m_0^2f/l_0]$, se debe combinar productos y potencias de las dimensiones de m_0^2, f y l,

así que $[M^{\alpha}f^{\beta}/L^{\gamma}] = [ML^2/T^2]$, $[M^{\alpha}f^{\beta}/L^{\gamma}] = [(M^{\alpha}/L^{\gamma}).(L^{3\beta}/M^{\beta}T^{2\beta})]$. Deben verificarse entonces las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 1 \\ 3\beta - \gamma &= 2 \\ 2\beta &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto se obtiene:

$$m_0 c^2 = \frac{f m_0^2}{\ell_0}$$

Otra forma de obtenerlo es calcular la energía W necesaria para destruir la masa m_0:

$$W = -\int_{r=r_0}^{\infty} \int_{m=m_0}^{0} f \frac{m dm dr}{r^2} = \frac{m_0^2}{2} \frac{f}{r_0} = \frac{f m_0^2}{\ell_0}$$

Puesto que $2r_0 = l_0$. Con signo negativo, es la energía necesaria para dar origen a m_0 a partir de esa masa repartida en el infinito.

En forma elemental e intuitiva, si dividimos la masa m_0 en dos partes, cada una de masa $m_0/2$, y las colocamos a una distancia $l_0/4$ una de la otra, la energía gravitatoria es:

$$W = \frac{f \frac{m_0}{2} \frac{m_0}{2}}{\frac{\ell_0}{4}} = \frac{f m_0^2}{\ell_0}$$

De igual forma que en el caso anterior, es posible demostrar, con ayuda del análisis dimensional, que una teoría que contenga como parámetros fundamentales, la constante de gravitación universal f y la constancia de la velocidad de la luz, como en la relatividad general [6], no es posible deducir la constante h de la mecánica cuántica. Si lo anterior pudiera hacerse, h podría determinarse como una constante multiplicada por las dimensiones de mc^2 y f, elevadas a una potencia. En consecuencia:

$$[f^{\alpha}]\left[(mc^2)^{\beta}\right] = \left[\frac{L^{3\alpha}}{M^{\alpha}T^{2\alpha}} \frac{M^{\beta}L^{2\beta}}{T^{2\beta}}\right] = \left[\frac{L^{3\alpha+2\beta}M^{\beta-\alpha}}{T^{2\alpha+2\beta}}\right] = [h^{\gamma}] = \left[\frac{M^{\gamma}L^{2\gamma}}{T^{\gamma}}\right]$$

Deben, entonces verificarse las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \beta - \alpha = \gamma \\ 3\alpha + 2\beta = 2\gamma \\ 2\alpha + 2\beta = \gamma \end{cases}$$

Las que se satisfacen con $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Lo que significa que las constantes de gravitación universal f, y c o una teoría que las contenga, no intervienen en la determinación de h. Por lo tanto, todo sugiere que, desde la teoría de la relatividad no puede obtenerse la mecánica cuántica.

Referencias

1.- Planck, M., The theory of heat radiation. Translated from the German edition of 1912 by M. Masius, Dover (1959) New York.
2.- Einstein, A., Kosmologishe Betrachtungen zur Allgemainer Relativitäts theorie, Sitgungsberitche der Preusischen Akad & Wissenschaften (1917) translated by Perret and Jeffery in The principle of relativity, Dover (1952), New York.
3.- Kittl, P y Díaz , D.(2012), Modelo simple de un universo cíclico como extensión a la celda generalizada de Planck. http://www.ingenews.cl/web/download/publicaciones/Modelo-Simple-de-Universociclico-2704.doc
4.- Kittl, P. y Díaz , G., Sobre la celda de Planck, la relación cosmológica de Einstein y la cosmología. http://www.ingenews.cl/web/download/publicaciones/Celda-Planck-Einstein-Cosmologia-Corregido.docx
5.- Kittl,P.,(2012) Esquema de la historia de la cosmogonía. http//www.edreams.cl/esquema-de-historia-de-la-cosmogonia
6.- Einstein, A. El fundamento de la teoría general de la relatividad. Traducción al español de F. Alsina Fuertes y Damián Canal Frau en Maestros de la Ciencia, EMECE Editores S. A., Buenos Aires, 1959. Título en alemán: Die Grundlage der Allegeneine Relativitas Theorie, Annalen der Physic, Tomo 46, p. 769, 1916.